

Στοχαστικές Διαδικασίες II

A. N. Γιαννακοπουλος
Τμήμα Στατιστικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

8 Οκτωβρίου 2018

Περιεχόμενα

1	Βασικές εισαγωγικές έννοιες	1
1.1	Γεγονότα, συνολα και πράξεις συνόλων	1
1.2	Συλλογές γεγονότων, σ -άλγεβρες	2
1.3	Πιθανότητα	3
1.4	Τυχαίες μεταβλητές	4
1.5	Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής	7
1.6	Ανεξαρτησία	9
1.7	Δεσμευμένη μέση τιμή	11
1.7.1	Δεσμευμένη μεση τιμή ως προς γεγονός	11
1.7.2	Δεσμευμένη μεση τιμή ως προς διακριτή τυχαία μεταβλητή	13
1.7.3	Η δεσμευμένη μεση τιμή ως προς διαμέριση	14
1.7.4	Η δεσμευμένη μεση τιμή ως προς γενική σ -άλγεβρα	16
1.8	Η δεσμευμένη μεση τιμή ως η καλύτερη πρόβλεψη	21
2	Διαδικασίες <i>martingale</i>	25
2.1	Ορισμός των <i>martingale</i>	25
2.2	Χρόνοι στάσης	29
2.3	Επιλεκτική στάση	31
2.4	Σύγκλιση διαδικασιών <i>martingale</i>	35
2.5	Ανισότητες <i>martingale</i>	37
2.6	Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής	38
2.7	<i>Martingales</i> στην οικονομική	40
2.7.1	Οι τιμές των χρεογράφων ως <i>martingale</i>	40
2.7.2	Χρηματοοικονομική σε διακριτό χρόνο: Εφαρμογές της θεωρίας των <i>martingale</i> στην αποτίμηση χρεογράφων	41
2.7.3	Μοντέλα αναζήτησης (search models)	45
2.8	Ορισμένες γενικεύσεις	46
2.9	Παράρτημα: Αποδείξεις θεωρημάτων	47
2.9.1	Η ανισότητα των περασμάτων του Doob	47
2.9.2	Η απόδειξη των ανισοτήτων <i>martingale</i>	47
2.9.3	Απόδειξη του θεωρήματος L^1 -σύγκλισης	49
2.9.4	Απόδειξη του θεωρήματος της σύγκλισης ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων <i>martingale</i>	49
2.10	Βασικά σημεία του κεφαλαίου	50
3	Η κίνηση <i>Brown</i>	51
3.1	Ορισμός της κίνησης <i>Brown</i>	51
3.2	Δύο σημαντικές ιδιότητες	55
3.2.1	Η ιδιότητα Markov	55
3.2.2	Η χρήση του τελεστή μετατόπισης	56
3.2.3	Η ισχυρή ιδιότητα Markov	59
3.3	Ιδιότητες <i>martingale</i> της κίνησης <i>Brown</i>	63
3.4	Χαρακτηρισμός της κίνησης <i>Brown</i>	65
3.5	Ιδιότητες των τροχιών της κίνησης <i>Brown</i>	66
3.6	Πολυδιάστατη κίνηση <i>Brown</i>	68
3.7	Κατασκευή της κίνησης <i>Brown</i>	69

3.7.1	Αναπαράσταση της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Haar	69
3.7.2	Η εμφύθιση Skorokhod (Skorokhod Embedding)	71
3.8	Παράρτημα: Απόδειξεις θεωρημάτων	72
3.8.1	Απόδειξη της ιδιότητας Markov	72
3.8.2	Απόδειξη της ισχυρής ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown	73
3.8.3	Απόδειξη του θεωρήματος του Levy	74
3.9	Βασικά σημεία του κεφαλαίου.	75
4	Η θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης	77
4.1	Το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô	77
4.1.1	Ορισμός του ολοκληρώματος Itô : Εισαγωγή	77
4.1.2	Ορισμός του ολοκληρώματος Itô : Τεχνικά σημεία	80
4.1.3	Ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô	85
4.2	Το ολοκλήρωμα Itô σαν στοχαστική διαδικασία	86
4.2.1	Ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας $\int_0^t f(t)dB_t$ και οι ιδιότητες της	86
4.2.2	Ανισότητες σχετικά με το ολοκλήρωμα Itô	89
4.3	Διαδικασίες Itô και το λήμμα του Itô	90
4.3.1	Διαδικασίες Itô	90
4.3.2	Ο τύπος του Itô	92
4.4	Διαδικασίες Itô σε πολλές διαστάσεις	94
4.4.1	Το ολοκλήρωμα Itô επάνω σε μία πολυδιάστατη κίνηση Brown	94
4.4.2	Πολυδιάστατες διαδικασίες Itô	95
4.4.3	Ο τύπος του Itô σε περισσότερες διαστάσεις	96
4.5	Παραδείγματα της χρήσης του τύπου του Itô	97
4.5.1	Γενικά παραδείγματα.	97
4.5.2	Παραδείγματα της χρήσης του τύπου του Itô στην οικονομική: Περιθώριο διακυμάνσεως ισοτιμιών	100
4.6	Το θεώρημα αναπαράστασης των <i>martingale</i>	102
4.7	Σύντομη αναφορά στο ολοκλήρωμα του <i>Stieltjes</i>	102
4.8	Γενικεύσεις του ολοκληρώματος του Itô	103
4.8.1	Ολοκλήρωση επάνω σε διαδικασίες Itô	104
4.8.2	Το ολοκλήρωμα του Stratonovich	104
4.8.3	Ολοκλήρωση επάνω σε <i>martingales</i>	105
4.9	Παράρτημα: Απόδειξεις θεωρημάτων	106
4.9.1	Απόδειξη της πληρότητας του L^2	106
4.9.2	Απόδειξη της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy	106
4.9.3	Απόδειξη της εκθετικής ανισότητας	108
4.9.4	Απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης των <i>martingale</i>	109
4.10	Βασικά σημεία του κεφαλαίου.	112
5	Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις	113
5.1	Βασικές έννοιες	113
5.2	Ισχυρές και ασθενείς λύσεις	119
5.3	Πρώτη εφαρμογή στη χρηματοοικονομική	120
5.4	Δύο σημαντικές ιδιότητες	123
5.4.1	Η ιδιότητα Markov	123
5.4.2	Η ισχυρή ιδιότητα Markov	125
5.4.3	Εφαρμογές της ιδιότητας Markov	125
5.5	Αλλαγή μέτρου	127
5.6	Σχέση με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους	136
5.6.1	Ο γεννήτορας μίας διαδικασίας διάχυσης	136
5.6.2	Ο τύπος των Feynman-Kac	139
5.6.3	Προβλήματα συνοριακών συνθηκών: Το πρόβλημα Dirichlet	143
5.6.4	Η αναπαράσταση Feynman-Kac για προβλήματα που οι συντελεστές τους εξαρτώνται από τον χρόνο	145
5.6.5	Εφαρμογές των αναπαραστάσεων Feynman-Kac	146
5.6.6	Άλλα προβλήματα συνοριακών τιμών.	151

5.7	Αποδείξεις των θεωρημάτων	152
5.7.1	Χώροι Banach και το θεώρημα σταθερού σημείου	152
5.7.2	Απόδειξη της ιδιότητας Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων	152
5.7.3	Απόδειξη της ισχυρής ιδιότητας Markov για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων	154
5.7.4	Απόδειξη του θεωρήματος του Girsanov	155
5.8	Βασικές ιδέες του κεφαλαίου	157

Κεφάλαιο 1

Βασικές εισαγωγικές έννοιες

1.1 Γεγονότα, συνολα και πράξεις συνόλων

Θεωρούμε ότι έχουμε ένα δειγματικό χώρο Ω . Τα υποσύνολα $A \subset \Omega$ θα τα ονομάζουμε γεγονότα. Ας ονομάσουμε \mathcal{F} ένα σύνολο γεγονότων (δηλαδή ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω). Οι λογικές πράξεις **και** και **ή** συνδέονται με τις πράξεις της της τομής (\cap) και της ένωσης (\cup) των συνόλων,

$$A_1 \cap A_2 \Leftrightarrow A_1 \text{ και } A_2, \\ A_1 \cup A_2 \Leftrightarrow A_1 \text{ ή } A_2.$$

Όμοια για περισσότερα του ενός γεγονότα

$$\bigcap_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow A_1 \text{ και } A_2, \dots \text{ και } A_n \\ \bigcup_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow A_1 \text{ ή } A_2, \dots \text{ ή } A_n.$$

Φυσικά μπορούμε να πάρουμε το όριο καθώς $n \rightarrow \infty$ και να ορίσουμε το γεγονός,

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \text{συμβαίνουν τα } A_i, \text{ για κάθε } i \in \mathbb{N}, \\ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \text{συμβαίνει το } A_i, \text{ για κάποιο } i \in \mathbb{N},$$

Τέλος, εφόσον τα γεγονότα είναι σύνολα, θα μπορούσε κάποιος να τα χαρακτηρίσει ανάλογα με τα στοιχεία τα οποία περιέχουν. Συνεπώς,

$$\omega \in \bigcap_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \omega \in A_i, \forall i \in \{1, \dots, n\}. \\ \omega \in \bigcup_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \exists i \in \{1, \dots, n\} \text{ τέτοιο ώστε } \omega \in A_i,$$

και

$$\omega \in \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \omega \in A_i, \forall i \in \mathbb{N}. \\ \omega \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \Leftrightarrow \exists i \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } \omega \in A_i,$$

Επίσης, για κάθε γεγονός $A \subset \Omega$, μπορούμε να ορίσουμε το γεγονός **όχι** A , το οποίο θα συμβολίζουμε με

$$A^c = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega : \omega \notin A\}.$$

Το σύνολο A^c ονομάζεται το συμπληρωματικό του A .

Οι πράξεις της ένωσης και της τομής συνδέονται με με την πράξη του συμπληρωματικού χρησιμοποιώντας τους κανόνες του De Morgan

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i^c,$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i^c.$$

1.2 Συλλογές γεγονότων, σ -άλγεβρες

Οι συλλογές των γεγονότων που μας ενδιαφέρουν θα πρέπει να είναι τέτοιας μορφής, έτσι ώστε να μπορούν να υποστηρίξουν τις ερωτήσεις **και**, **ή** και **όχι**. Πιο συγκεκριμένα, αν μια συλλογή γεγονότων περιέχει κάποια γεγονότα $\{A_i\}$, τότε θα πρέπει να περιέχει και το γεγονός $\bigcap_i A_i$ (δηλαδή ισχύει το A_i για κάθε i), και το γεγονός $\bigcup_i A_i$ (δηλαδή ισχύει το A_i για κάποιο i), καθώς και τα γεγονότα A_i^c για κάθε i . Μια συλλογή γεγονότων που ικανοποιεί τις παραπάνω προϋποθέσεις ονομάζεται σ -άλγεβρα.

Ορισμός 1.2.1. Μια συλλογή \mathcal{F} , υποσυνόλων του Ω , ονομάζεται σ -άλγεβρα, αν ικανοποιεί τις παρακάτω ιδιότητες,

- (α) Αν $A \in \mathcal{F}$ τότε και $A^c \in \mathcal{F}$.
- (β) Αν $A_i \in \mathcal{F}$ τότε και $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
- (γ) $\emptyset \in \mathcal{F}$ και $\Omega \in \mathcal{F}$.

Σχόλιο 1.2.1. Επάνω σε ένα δειγματικό χώρο Ω μπορούμε να ορίσουμε παραπάνω από μία σ -άλγεβρες!

Παράδειγμα 1.2.1. Ας υποθέσουμε ότι

$$\Omega = \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3, H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}$$

Ο δειγματικός χώρος αυτός περιέχει π.χ. όλα τα πιθανά (απλά) ενδεχόμενα από την ρίψη 3 νομισμάτων.

Στον δειγματικό αυτό χώρο μπορούμε να φτιάξουμε πολλές σ -άλγεβρες. Δίνουμε μερικές

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}, \\ \mathcal{F}_1 &= \{\emptyset, \Omega, \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}, \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}\}, \\ \mathcal{F}_2 &= \{\emptyset, \Omega, \{T_1T_2H_3, T_1T_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}, \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, H_1H_2H_3, H_1H_2T_3\}\}, \\ \mathcal{F}_3 &= \{\emptyset, \Omega, \{T_1H_2H_3, T_1T_2H_3, H_1H_2H_3, H_1T_2H_3\}, \{T_1H_2T_3, T_1T_2T_3, H_1H_2T_3, H_1T_2T_3\}\} \end{aligned}$$

Οι σ -άλγεβρες σχετίζονται με δομές πληροφορίας. Στο παραπάνω παράδειγμα η \mathcal{F}_1 περιέχει την πληροφορία σχετικά με το αποτέλεσμα του πρώτου νομίσματος, η \mathcal{F}_2 την πληροφορία σχετικά με το αποτέλεσμα του δεύτερου και η \mathcal{F}_3 την πληροφορία σχετικά με το αποτέλεσμα του τρίτου νομίσματος.

Παράδειγμα 1.2.2. Ας υποθέσουμε ότι

$$\Omega = \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3, H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}$$

Ο δειγματικός χώρος αυτός περιέχει π.χ. όλα τα πιθανά (απλά) ενδεχόμενα από την ρίψη 3 νομισμάτων.

Στον δειγματικό αυτό χώρο μπορούμε να φτιάξουμε πολλές σ -άλγεβρες. Δίνουμε μερικές

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0 &= \{\emptyset, \Omega\}, \\ \mathcal{G}_1 &= \{\emptyset, \Omega, \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}, \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}\}, \\ \mathcal{G}_2 &= \{\emptyset, \Omega, \{T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}, \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3\}, \{H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}, \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, \dots\}\}, \\ \mathcal{G}_3 &= \{\emptyset, \Omega, \{T_1H_2H_3\}, \{T_1H_2T_3\}, \{T_1T_2H_3\}, \{T_1T_2T_3\}, \{H_1H_2H_3\}, \{H_1H_2T_3\}, \{H_1T_2H_3\}, \{H_1T_2T_3\}, \dots\}, \end{aligned}$$

όπου οι τελείες συμβολίζουν τα σύνολα που πρέπει να συμπληρώσουμε έτσι ώστε οι \mathcal{G}_2 και \mathcal{G}_3 να είναι σ -άλγεβρες. Η \mathcal{G}_1 είναι η δομή πληροφορίας που σχετίζεται με πλήρη γνώση του αποτελέσματος του πρώτου νομίσματος, η \mathcal{G}_2 είναι η δομή πληροφορίας που σχετίζεται με πλήρη γνώση του αποτελέσματος του δεύτερου νομίσματος, η \mathcal{G}_3 είναι η δομή πληροφορίας που σχετίζεται με πλήρη γνώση του αποτελέσματος του τρίτου νομίσματος (γιατί;)

Παρατηρείστε ότι

$$\mathcal{G}_0 \subset \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2 \subset \mathcal{G}_3.$$

Παράδειγμα 1.2.3. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $A \subset \Omega$ ένα ενδεχόμενο. Η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει αυτά τα ενδεχόμενα είναι η

$$\sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

Παράδειγμα 1.2.4. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $A_1, A_2 \subset \Omega$ δύο ενδεχόμενα. Η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει αυτά τα ενδεχόμενα είναι η

$$\sigma(A_1, A_2) = \{\emptyset, \Omega, A_1, A_2, A_1^c, A_2^c, A_1 \cup A_2, A_1 \cup A_2^c, A_1^c \cup A_2, A_1^c \cap A_2, A_1 \cap A_2^c\}$$

Μια ειδική κατηγορία σ -άλγεβρας είναι η σ -άλγεβρα Borel η οποία είναι μια σ -άλγεβρα που αποτελείται από υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών \mathbb{R} .

Ορισμός 1.2.2. Η σ -άλγεβρα Borel $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R} .

Το ότι η $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ περιέχει όλα τα ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R} , **δεν** σημαίνει ότι περιέχει μόνο ανοιχτά υποσύνολα του \mathbb{R} . Εκ κατασκευής, περιέχει και όλα τα κλειστά υποσύνολα (εφόσον είναι συμπληρωματικά των ανοιχτών). Επίσης περιέχει αριθμήσιμες ενώσεις κλειστών συνόλων (οι οποίες δεν είναι απαραίτητα κλειστά σύνολα), αριθμήσιμες τομές κλειστών συνόλων (οι οποίες είναι κλειστά σύνολα), αριθμήσιμες ενώσεις ανοιχτών συνόλων (οι οποίες είναι ανοιχτά σύνολα) και αριθμήσιμες τομές ανοιχτών συνόλων (οι οποίες δεν είναι απαραίτητα ανοιχτά σύνολα). Περιέχει επίσης και σύνολα της μορφής $[a, b)$, $(a, b]$, $\{a\}$. Συνοψίζοντας, η σ -άλγεβρα Borel, $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ περιέχει **σχεδόν όλα** τα υποσύνολα του \mathbb{R} τα οποία μπορεί να χρειαστούμε. Υπάρχουν βέβαια υποσύνολα του \mathbb{R} τα οποία **δεν ανήκουν** στην $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ αλλά τα σύνολα αυτά θα τα θεωρούμε παθολογικά και δεν θα ασχοληθούμε καθόλου με αυτά στην διάρκεια αυτών των διαλέξεων. Θα μας ενδιαφέρουν λοιπόν μόνο υποσύνολα $E \subset \mathbb{R}$ που έχουν την ιδιότητα $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ και τα οποία θα ονομάζουμε σύνολα Borel.

1.3 Πιθανότητα

Η πιθανότητα είναι ένας τρόπος να αποφανθούμε πόσο εύκολο ή δύσκολο είναι να συμβεί ένα απλό ή σύνθετο γεγονός το οποίο είναι ένα υποσύνολο $A \subset \Omega$, που ανήκει σε μια συλλογή γεγονότων που μαθηματικά περιγράφεται από μία σ -άλγεβρα \mathcal{F} . Το πόσο εύκολο ή δύσκολο είναι κάτι περιγράφεται σε μια κλίμακα από το 0 μέχρι το 1.

Η πιθανότητα είναι λοιπόν μια απεικόνιση από μια συλλογή ενδεχομένων \mathcal{F} στο διαστήμα $[0, 1]$ με ορισμένες ιδιότητες. Οι ιδιότητες αυτές αποτελούν γενίκευση της παρατήρησης ότι αν ο χώρος ενδεχομένων είναι πεπερασμένο σύνολο και όλα τα απλά ενδεχόμενα είναι κατά μια έννοια ισοδύναμα, ο τρόπος να μετρήσουμε το πόσο εύκολο ή δύσκολο είναι να συμβεί ένα σύνθετο γεγονός είναι να μετρήσουμε τον αριθμό των τρόπων που αυτό μπορεί να συμβεί προς το συνολικό πλήθος όλων των πιθανών αποτελεσμάτων. Την απεικόνιση αυτή την ονομάζουμε συνήθως μέτρο πιθανότητας.

Ορισμός 1.3.1. Έστω (Ω, \mathcal{F}) ένας δειγματικός χώρος εφοδιασμένος με μια σ -άλγεβρα. Η απεικόνιση $P : \mathcal{F} \rightarrow [0, 1]$ ονομάζεται μέτρο πιθανότητας αν ικανοποιεί τις παρακάτω δύο συνθήκες

$$(i) P(\emptyset) = 0 \text{ και } P(\Omega) = 1,$$

$$(ii) \text{ Αν } A_i \in \mathcal{F} \text{ και } A_i \cap A_j = \emptyset \text{ για οποιαδήποτε } i \neq j \text{ (} i, j \in \mathbb{N} \text{) τότε}$$

$$P\left(\bigcup_i A_i\right) = \sum_i P(A_i).$$

Αν $P(\Omega) \neq 1$ η απεικόνιση P ονομάζεται απλά μέτρο.

Αν τα $\{A_i\}$ δεν είναι απαραίτητα ξένα μεταξύ τους,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i),$$

δηλαδή εν γένει το μέτρο είναι υποαθροιστικό. Η περίπτωση που ο δειγματικός χώρος δεν είναι αριθμήσιμος καλύπτεται από τον παραπάνω ορισμό. Μια σημαντική τέτοια περίπτωση είναι η περίπτωση $\Omega = \mathbb{R}$. Στο σύνολο

\mathbb{R} ένα πολύ σημαντικό μέτρο είναι το μετρο Lebesgue , \mathcal{L} , το οποίο ορίζεται σαν το μονάδικό μετρο για το οποίο ισχύει

$$\mathcal{L}([a, b]) = \mathcal{L}((a, b)) = \mathcal{L}([a, b)) = \mathcal{L}((a, b]) = b - a.$$

Το μέτρο Lebesgue αποτελεί γενίκευση της έννοιας του μήκους. Βλέπουμε απο το ορισμό του ότι δεν διαφοροποιεί τα σύνολα $[a, b]$, $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b) , μεταξύ τους, συνεπώς, δεν 'καταλαβαίνει' τα μεμονωμένα σημεία $\{a\}$ και $\{b\}$. Αυτό σημαίνει ότι $\mathcal{L}(\{a_i\}) = 0$ για κάθε $a_i \in \mathbb{R}$ και συνεπώς

$$0 \leq \mathcal{L}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mathcal{L}(\{a_i\}) = 0,$$

δηλαδή

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} \{a_i\}\right) = 0.$$

Αν μας ενδιαφέρουν φραγμένα υποσύνολα $I \subset \mathbb{R}$, απο το μετρο Lebesgue μπορούμε να ορίσουμε ένα μετρο πιθανότητας P βάσει του τύπου $P(A) = \frac{\mathcal{L}(A)}{\mathcal{L}(I)}$ για κάθε $A \subset I$ (το οποία βέβαια να είναι Borel).

Προφανώς, το μέτρο Lebesgue είναι μια πολύ ειδική περίπτωση μετρο που μπορεί να οριστεί επάνω στο \mathbb{R} . Μπορούμε να ορίσουμε και μια απείρια άλλων τέτοιων μέτρων $P : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$.

Οποιοδήποτε μετρο πιθανότητας P επάνω στο \mathbb{R} , μπορεί να αναπαρασταθεί απο μια πραγματική συνάρτηση $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ η οποία συνδέεται με το μέτρο ως εξής: Αν $A = (-\infty, x]$ τότε

$$P(A) = P((-\infty, x]) = F(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Η συναρτηση αυτή ονομάζεται συνάρτηση κατανομής.

Αναφέραμε παραπάνω ότι το μέτρο Lebesgue κατέχει ειδικό ρόλο στα μέτρα που ορίζονται στο \mathbb{R} . Πράγματι, τα μέτρα πιθανότητας επάνω στο σύνολο των πραγματικών αριθμών, χωρίζονται σε δυο διαφορετικες κατηγορίες.

- (i) Εκείνα τα οποία δίνουν μη μηδενική βαρυτητα σε σύνολα της μορφής $\{a_i\}$ (και τις αριθμήσιμες ενώσεις τους), δηλαδή $P(\{a_i\}) = p_i \neq 0$, και
- (ii) εκείνα τα οποία δίνουν μηδενική βαρυτητα σε κάθε σύνολο της μορφής $\{a_i\}$ και φυσικα σε όλες τις αριθμήσιμες ενώσεις τέτοιων συνόλων.

Μπορεί να αποδειχθεί, ότι τα μετρα της δεύτερης κατηγορίας, έχουν αναπαράσταση σαν ενα ολοκλήρωμα με την χρήση μιας συναρτησης $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής

$$P(A) = \int_A f d\mathcal{L} = \int_A f dx,$$

όπου λίγο πολύ το δεύτερο ολοκλήρωμα μπορούμε να το καταλάβουμε σαν ενα ολοκλήρωμα κατά Riemann . Για να γίνει το παραπάνω πιο κατανοητό, αν $A = (a, b)$ τότε

$$P(A) = P((a, b)) = \int_a^b f(x) dx,$$

και προφανώς επιλέγοντας $a = -\infty$ έχουμε ότι $F(x) = \int_{-\infty}^x f(s) ds$. Η συναρτηση f είναι η γνωστή μας πυκνότητα συνάρτησης πιθανότητας.

1.4 Τυχαιες μεταβλητές

Ορισμός 1.4.1. *Μια πραγματικη τυχαια μεταβλητή είναι μια απεικόνιση $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.*

Η αντίστροφη απεικόνιση $X^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \Omega$ μας παίρνει απο τις τιμές που έχει πάρει η τυχαια μεταβλητή στα αντίστοιχα (σύνθετα) ενδεχομενα τα οποία μπορεί να σχετίζονται με τις τιμές αυτές.

Ορισμός 1.4.2. *Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή και $E \subset \mathbb{R}$.*

$$X^{-1}(E) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in E\} \subset \Omega.$$

Είναι εύκολο να δει κανείς ότι

$$\begin{aligned} X^{-1}(E_1 \cup E_2) &= X^{-1}(E_1) \cup X^{-1}(E_2), \\ X^{-1}(E_1 \cap E_2) &= X^{-1}(E_1) \cap X^{-1}(E_2), \end{aligned}$$

και φυσικά αυτό γενικεύεται

$$\begin{aligned} X^{-1}\left(\bigcup_i E_i\right) &= \bigcup_i X^{-1}(E_i), \\ X^{-1}\left(\bigcap_i E_i\right) &= \bigcap_i X^{-1}(E_i). \end{aligned}$$

Αν μας δώσει κάποιος μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, μπορούμε να πάρουμε όλα τα σύνολα της μορφής $X^{-1}(E)$ για οποιαδήποτε $E \subset \mathbb{R}$. Αυτό θα μας δώσει μια συλλογή από υποσύνολα του Ω . Αν αυτή την συλλογή την συμπληρώσω κατάλληλα μπορώ να φτιάξω μια σ -άλγεβρα.

Ορισμός 1.4.3. Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει την συλλογή συνόλων $\{X^{-1}(E), E \subset \mathbb{R}\}$ ονομάζεται η σ -άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X και συμβολίζεται με $\sigma(X)$.

Η $\sigma(X)$, περιέχει την πληροφορία που μας παρέχει σχετικά με το τυχαίο πείραμα η γνώση σχετικά με τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή X .

Απο την άλλη, αν ήδη μας έχει δωθεί μια σ -άλγεβρα επάνω στον Ω , έστω \mathcal{F} μπορώ να κάνω την ερώτηση, κατα πόσο, η συλλογή συνόλων $\{X^{-1}(E), E \subset \mathbb{R}\}$ που είναι μια συλλογή υποσυνόλων του Ω περιέχεται στην συλλογή υποσυνόλων \mathcal{F} ή όχι.

Ορισμός 1.4.4. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος, \mathcal{F} μια σ -άλγεβρα σε αυτόν και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. Αν

$$\{X^{-1}(E), E \subset \mathbb{R}\} \subset \mathcal{F},$$

δηλαδή (ισοδύναμα)

$$X^{-1}(E) \in \mathcal{F}, \quad \forall E \subset \mathbb{R},$$

τότε λέμε ότι η X είναι μετρήσιμη ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{F} .

Είναι προφανές ότι για κάποιο δειγματικό χώρο μπορώ να ορίσω διαφορετικές σ -άλγεβρες π.χ. \mathcal{F} και \mathcal{G} , και μια τυχαία μεταβλητή να είναι μετρήσιμη ως προς την μία από αυτές αλλά όχι ως προς την άλλη! Επίσης, οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X είναι μετρήσιμη ως προς την $\sigma(X)$.

Παράδειγμα 1.4.1. Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο Ω και ένα ενδεχόμενο $A \subset \Omega$. Μπορούμε να ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή $X = \mathbf{1}_A$, ως

$$X(\omega) = \mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega \in A, \\ 0 & \text{αν } \omega \notin A. \end{cases}$$

Εύκολα μπορούμε να δούμε ότι για κάθε $E \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X^{-1}(\{1\}) &= A, \\ X^{-1}(\{0\}) &= A^c, \\ X^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0, 1\}) &= \emptyset, \\ X^{-1}(\{0, 1\}) &= \Omega, \\ X^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\}) &= A, \\ X^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{1\}) &= A^c, \end{aligned}$$

δηλαδή συνοψίζοντας, για κάθε $E \subset \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} X^{-1}(E) &= A, \quad \text{αν } 1 \in E \text{ και } 0 \notin E, \\ X^{-1}(E) &= A^c, \quad \text{αν } 0 \in E \text{ και } 1 \notin E, \\ X^{-1}(E) &= \emptyset, \quad \text{αν } 0 \notin E \text{ και } 1 \notin E, \\ X^{-1}(E) &= \Omega, \quad \text{αν } 0 \in E \text{ και } 1 \in E. \end{aligned}$$

Η μικρότερη σ -άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή $X = \mathbf{1}_A$ είναι η

$$\sigma(\mathbf{1}_A) := \sigma(A) = \{\emptyset, \Omega, A, A^c\}.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας έχουν δώσει μια σ -άλγεβρα \mathcal{F} επάνω στον Ω . Η τυχαία μεταβλητή $X = \mathbf{1}_A$ είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{F} αν και μόνο αν $A \in \mathcal{F}$.

Παράδειγμα 1.4.2. Το παράδειγμα 1.4.1 μπορεί να γενικευθεί και ως εξής. Ας πάρουμε μια (πεπερασμένη) συλλογή από υποσύνολα A_1, A_2, \dots, A_N , του δειγματικού χώρου Ω , και για οποιαδήποτε (πεπερασμένη) συλλογή από πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2, \dots, x_N ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$X := x_1 \mathbf{1}_{A_1} + x_2 \mathbf{1}_{A_2} + \dots + x_N \mathbf{1}_{A_N} = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{1}_{A_i}.$$

Η τυχαία αυτή μεταβλητή παίρνει την τιμή $X(\omega) = x_i$ αν $\omega \in A_i$. Μπορούμε πάντοτε να επιλέξουμε τα A_i έτσι ώστε να είναι ανα δύο ξένα, και να ικανοποιούν την σχέση $\bigcup_{i=1}^N A_i = \Omega$ (να είναι δηλαδή μια διαμέριση του Ω). Μία τυχαία μεταβλητή της παραπάνω μορφής ονομάζεται **απλή** και ουσιαστικά είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή. Οι απλές τυχαίες μεταβλητές παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών, γιατί αποτελούν δομικούς λίθους για πιο γενικές τυχαίες μεταβλητές χρησιμοποιώντας την προσεγγιστική διαδικασία μέσω της έννοιας του ορίου.

Η τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{1}_{A_i}$ παράγει την σ -άλγεβρα $\sigma(X) = \sigma(A_1, A_2, \dots, A_N)$, την μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει τα ενδεχόμενα A_1, A_2, \dots, A_N .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μας έχουν δώσει μια σ -άλγεβρα \mathcal{F} επάνω στον Ω . Η τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{1}_{A_i}$ είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{F} αν και μόνο αν $A_i \in \mathcal{F}$, για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$.

Παράδειγμα 1.4.3. Ας υποθέσουμε ότι ποντάρουμε στην ριπή 3 νομισμάτων, 1 γουάν σε κάθε κορώνα. Ο δειγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega = \{T_1 H_2 H_3, T_1 H_2 T_3, T_1 T_2 H_3, T_1 T_2 T_3, H_1 H_2 H_3, H_1 H_2 T_3, H_1 T_2 H_3, H_1 T_2 T_3\}$$

Το συνολικό μας κέρδος είναι μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία μπορεί να χαρακτηριστεί πλήρως από τον πίνακα

$$\begin{aligned} X(T_1 H_2 H_3) &= 1 \\ X(T_1 H_2 T_3) &= -1 \\ X(T_1 T_2 H_3) &= -1 \\ X(T_1 T_2 T_3) &= -3 \\ X(H_1 H_2 H_3) &= 3 \\ X(H_1 H_2 T_3) &= 1 \\ X(H_1 T_2 H_3) &= 1 \\ X(H_1 T_2 T_3) &= -1 \end{aligned}$$

Μπορούμε επίσης να δούμε ότι

$$\begin{aligned} X^{-1}(\{-3\}) &= \{T_1 T_2 T_3\}, \\ X^{-1}(\{-1\}) &= \{T_1 H_2 T_3, T_1 T_2 H_3, H_1 T_2 T_3\}, \\ X^{-1}(\{1\}) &= \{T_1 H_2 H_3, H_1 H_2 T_3, H_1 T_2 H_3\}, \\ X^{-1}(\{3\}) &= \{H_1 H_2 H_3\}, \\ X^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3\}) &= \emptyset, \\ X^{-1}(\{-3, -1, 1, 3\}) &= \Omega, \end{aligned}$$

και λοιπά.

Η $\sigma(X)$ είναι η μικρότερη σ -άλγεβρα που περιέχει τα σύνολα $X^{-1}(\{-3\})$, $X^{-1}(\{-1\})$, $X^{-1}(\{1\})$, $X^{-1}(\{3\})$ και είναι η

$$\sigma(X) = \{\emptyset, \Omega, \{T_1 T_2 T_3\}, \{T_1 H_2 T_3, T_1 T_2 H_3, H_1 T_2 T_3\}, \{T_1 H_2 H_3, H_1 H_2 T_3, H_1 T_2 H_3\}, \{H_1 H_2 H_3\}, \dots\},$$

όπου τα \dots σημαίνει ότι έχουμε συμπληρώσει και όλα τα συνολα που προκύπτουν από τις ανα 2 ενώσεις, τις ανα 3 ενώσεις, κ.ο.κ. καθώς και όλα τα συμπληρωματικά.

Ας θεωρήσουμε τώρα την σ-άλγεβρα

$$\mathcal{G}_1 = \{\emptyset, \Omega, \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}, \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}\}.$$

Η τυχαία μεταβλητή X δεν είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{G}_1 . Αν π.χ. πάρουμε το $E = \{-3\} \subset \mathbb{R}$, βλέπουμε ότι

$$X^{-1}(\{-3\}) = \{T_1T_2T_3\} \notin \mathcal{G}_1.$$

Ορισμός 1.4.5. Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανότητας και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. Η απεικόνιση

$$E \mapsto P_X(E) := P(X^{-1}(E)), \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

ορίζει ένα μέτρο πιθανότητας επάνω στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Το μέτρο πιθανότητας P_X μας δίνει την πιθανότητα η τυχαία μεταβλητή X να παίρνει τιμές στο υποσύνολο $E \subset \mathbb{R}$ (το οποίο θεωρούμε ότι είναι Borel). Τις περισσότερες περιπτώσεις από εδώ και πέρα θα επικεντρώσουμε την προσοχή μας σε μετρα πιθανότητας επάνω στο \mathbb{R} δηλαδή θα δουλεύουμε με το μέτρο P_X .

Παράδειγμα 1.4.4. Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.4.3 υποθέτουμε ότι ποντάρουμε στην ριφή 3 νομισμάτων, 1 γουάν σε κάθε κορώνα. Ο δεγματικός χώρος είναι ο

$$\Omega = \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3, H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}$$

και θεωρούμε ότι

$$P(T_1H_2H_3) = P(T_1H_2T_3) = \dots = P(H_1T_2T_3) = \frac{1}{8},$$

δηλαδή ότι όλα τα γεγονότα είναι ισοπίθανα.

Το συνολικό μας κέρδος είναι μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Ακολουθώντας το Παράδειγμα 1.4.3 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} P_X(\{-3\}) &= P(X^{-1}(\{-3\})) = P(T_1T_2T_3) = \frac{1}{8}, \\ P_X(\{-1\}) &= P(X^{-1}(\{-1\})) = P(\{T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}) = \frac{3}{8}, \\ P_X(\{1\}) &= P(X^{-1}(\{1\})) = P(\{T_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3\}) = \frac{3}{8}, \\ P_X(\{3\}) &= P(X^{-1}(\{3\})) = P(\{H_1H_2H_3\}) = \frac{1}{8}, \\ P_X(\mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3\}) &= P(X^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{-3, -1, 1, 3\})) = P(\emptyset) = 0, \\ P_X(\mathbb{R}) &= P(X^{-1}(\mathbb{R})) = P(\Omega) = 1, \end{aligned}$$

και λοιπά.

1.5 Μέση τιμή τυχαίας μεταβλητής

Αν πάρουμε μια απλή τυχαία μεταβλητή $X = \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{1}_{A_i}$, μπορούμε να ορίσουμε την μέση τιμή της ως

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^N x_i P(A_i) = \sum_{i=1}^N x_i P_X(\{x_i\}).$$

Αν η X δεν είναι απλή τυχαία μεταβλητή, τότε μπορεί να προσεγγιστεί από μια ακολουθία $\{X_n\}$ από απλές τυχαίες μεταβλητές και $\mathbb{E}[X] := \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n]$.

Δυστυχώς εδώ πρέπει να μπορούμε λίγο σε λεπτομερεια σχετικά με τι εννοούμε με τον όρο προσέγγιση.

Μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές της μορφής $\{X_n\}$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να υπάρχει κάποιο $N(n)$, γεγονότα $A_{i,n} \subset \Omega$ και πραγματικοί αριθμοί $x_{i,n}$, $i = 1, \dots, N(n)$ τέτοιοι ώστε $X_n =$

$\sum_{i=1}^{N(n)} x_{i,n} \mathbf{1}_{A_{i,n}}$ και $X_n \rightarrow X$ σχεδόν παντού ως προς το μέτρο P , καθώς $n \rightarrow \infty$. Αυτό υπενθυμίζουμε τι σημαίνει: Αν πάρουμε κάποιο $\omega \in \Omega$, τότε παίρνουμε την πραγματική ακολουθία $X_n(\omega) = \sum_{i=1}^{N(n)} x_{i,n} \mathbf{1}_{A_{i,n}}(\omega)$ καθώς και τον πραγματικό αριθμο $X(\omega)$. Μπορώ να ελέγξω αν για την πραγματική ακολουθία $\{X_n(\omega)\} \subset \mathbb{R}$, ισχύει ότι $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$ ή όχι. Επαναλαμβάνω αυτό για όλα τα $\omega \in \Omega$, και κατασκευάζω το σύνολο αυτών των ω για τα οποία ισχυει ότι $X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)$. Το συμπληρωματικό του σύνολο είναι το σύνολο των $\omega \in \Omega$ για τα οποία $X_n(\omega) \not\rightarrow X(\omega)$. Λέμε ότι η $X_n \rightarrow X$ P -ς.π. αν $P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \rightarrow X(\omega)\}) = 1$ (ισοδύναμα αν $P(\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \not\rightarrow X(\omega)\}) = 0$). Μπορούμε μάλιστα να επιλέξουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών με τρόπο ώστε $X_n(\omega) \leq X_{n+1}(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Για να ορίσουμε τώρα την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X την προσεγγίζουμε απο μια ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητων $X_n \uparrow X$ P - σχεδόν παντού, για κάθε n υπολογίζουμε την μεση τιμή $\mathbb{E}[X_n]$ και μετά ορίζουμε την μεση τιμή $\mathbb{E}[X]$ σαν το οριο της ακολουθίας πραγματικων αριθμων $\mathbb{E}[X_n]$.

Η μεση τιμή της X μπορεί να γραφεί και σαν ένα ολοκλήρωμα επάνω στο συνολο των πραγματικων αριθμών,

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x dF_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x dF_X(x),$$

όπου F_X είναι η συνάρτηση κατανομής της X (ή ισοδύναμα του μετρου P_X) και το ολοκλήρωμα το κατανοούμε σαν το ολοκλήρωμα Stieltjes. Αν το μετρο P_X δίνει μηδενική βαρυτητα σε όλα τα συνολα της μορφής $\{a_i\}$ (και φυσικά και των αριθμήσιμων ενώσεων τους) οπότε υπάρχει συνάρτηση πυκνοτητας πιθανοτητας f_X , μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

Πρόταση 1.5.1 (Ιδιότητες της μέσης τιμής).

(i) Η μέση τιμή έχει τις ιδιότητες της γραμμικότητας, και της θετικότητας:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2] &= \lambda_1 \mathbb{E}[X_1] + \lambda_2 \mathbb{E}[X_2], \quad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \\ X &\geq 0, \quad P - \sigma.\pi \implies \mathbb{E}[X] \geq 0. \end{aligned}$$

(ii) Ικανοποιεί την ανισότητα του Jensen, σύμφωνα με την οποία αν $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι κυρτή συναρτηση

$$\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)].$$

Ας σκεφτούμε τώρα οτι μπορούμε να διαχωρίσουμε τις τιμες που παίρνει μια τυχαια μεταβλητή απο την πιθανότητα να πάρει τις τιμές αυτές. Έστω λοιπόν $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαια μεταβλητή (η απεικόνιση απο το Ω στο \mathbb{R}) και P_1, P_2 δύο κατανομες πιθανότητας στο Ω . Μπορούμε να υπολογίσουμε την αναμενόμενη τιμή της X τόσο αν ακολουθεί την κατανομή P_1 όσο και αν ακολουθεί την κατανομή P_2 . Βέβαια το αποτέλεσμα θα βγει διαφορετικό ανάλογα με την κατανομή που ακολουθεί. Για να θυμόμαστε ποια κατανομή χρησιμοποιήσαμε στον υπολογισμό μας θα υιοθετούμε τον συμβολισμό $\mathbb{E}_{P_1}[X]$ αν χρησιμοποιήσαμε την P_1 και τον συμβολισμό $\mathbb{E}_{P_2}[X]$ αν χρησιμοποιήσαμε την P_2 . Έτσι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{P_1}[X] &= \sum_{\omega} X(\omega) P_1(\{\omega\}), \\ \mathbb{E}_{P_2}[X] &= \sum_{\omega} X(\omega) P_2(\{\omega\}). \end{aligned}$$

Είναι προφανές ότι εν γένει $\mathbb{E}_{P_1}[X] \neq \mathbb{E}_{P_2}[X]$. Μπορούμε να συνδέσουμε τις δυο αυτές μέσες τιμες ως ακολούθως

$$\mathbb{E}_{P_1}[X] = \sum_{\omega} X(\omega) P_1(\{\omega\}) = \sum_{\omega} X(\omega) \frac{P_1(\{\omega\})}{P_2(\{\omega\})} P_2(\{\omega\}).$$

Αν ορίσουμε την τυχαια μεταβλητή $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με $Y(\omega) = \frac{P_1(\{\omega\})}{P_2(\{\omega\})}$ τότε

$$\mathbb{E}_{P_1}[X] = \mathbb{E}_{P_2}[XY] = \mathbb{E}_{P_2}\left[X \frac{P_1}{P_2}\right]$$

Η τυχαία μεταβλητή Y ονομάζεται πιθανοφάνεια και μας συνδέει τον υπολογισμό της μέσης τιμής κάτω από την κατανομή P_1 με τον υπολογισμό της μέση τιμής κάτω από την κατανομή P_2 .

Οι παραπάνω έννοιες μπορούν να γενικευθούν και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές. Αν τα μετρα πιθανότητας P_1 και P_2 μπορούν να περιγραφούν από συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, f_1 και f_2 τότε τον ρόλο της τυχαίας μεταβλητής Y παίζει ο λόγος των δύο κατανομών $f(x) := \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή $Y = f(X)$. Πιο συγκεκριμένα,

$$\mathbb{E}_{P_1}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_1(x) dx = \int_{\mathbb{R}} x \frac{f_1(x)}{f_2(x)} f_2(x) dx = \mathbb{E}_{P_2}\left[X \frac{f_1(X)}{f_2(X)}\right] = \mathbb{E}_{P_2}[X Y]$$

Μία περαιτέρω γενίκευση η οποία χρειάζεται λίγα και την γλώσσα και τις τεχνικές της θεωρίας μέτρου, είναι σε γενικότερα μέτρα πιθανότητας, τα οποία δεν μπορούν απαραίτητα να αναπαρασταθούν με την χρήση μιας συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας. Εκεί το ρόλο της Y παίζει η παράγωγος Radon-Nikodym $\frac{dP_1}{dP_2}$ των δύο μετρών. Αν τα μετρα είναι διακριτά, η παράγονται από συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας, πέφτουμε στις παραπάνω ειδικές περιπτώσεις.

Πρόταση 1.5.2. Έστω ο δειγματικός χώρος (Ω, \mathcal{F}) . Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δύο μετρα πιθανότητας P_1 και P_2 τέτοια ώστε να υπάρχει μια τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, \mathcal{F} -μετρήσιμη, με την ιδιότητα

$$P_1(A) = \int_A Y dP_2 = \mathbb{E}_{P_2}[Y \mathbf{1}_A], \quad \forall A \in \mathcal{F},$$

ή ισοδύναμα ότι υπάρχει η παράγωγος Radon-Nikodym $\frac{dP_1}{dP_2} := Y$.
Τότε,

$$\mathbb{E}_{P_1}[X] = \int_{\Omega} X dP_1 = \int_{\Omega} X \frac{dP_1}{dP_2} dP_2 = \int_{\Omega} X Y dP_2 = \mathbb{E}_{P_2}[X Y]$$

1.6 Ανεξαρτησία

Δυο γεγονότα $A_1, A_2 \subset \Omega$ ονομάζονται ανεξάρτητα ως προς το μέτρο πιθανότητας P αν $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1)P(A_2)$.

Η ανεξαρτησία μπορεί να γενικευθεί και για περισσότερα από 2 γεγονότα.

Ορισμός 1.6.1. Έστω $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ μια συλλογή από ενδεχόμενα, όπου $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}$ ένα σύνολο δεικτών. Θα λέμε ότι τα $\{A_i\}_{i \in \mathcal{I}}$ είναι ανεξάρτητα ως προς το μέτρο πιθανότητας P αν $P(\bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i) = \prod_{i \in \mathcal{J}} P(A_i)$ για κάθε $\mathcal{J} \subset \mathcal{I}$.

Η έννοια της ανεξαρτησίας μπορεί να γενικευθεί για σ-άλγεβρες. Οι σ-άλγεβρες \mathcal{F}_1 και \mathcal{F}_2 θα λέγονται ανεξάρτητες αν για κάθε ζευγος (A_1, A_2) , $A_1 \in \mathcal{F}_1$, $A_2 \in \mathcal{F}_2$, τα σύνολα A_1, A_2 είναι ανεξάρτητα. Προφανώς, μπορούμε να μιλήσουμε και για την ανεξαρτησία περισσότερων των 2 σ-άλγεβρών.

Ορισμός 1.6.2. Οι σ-άλγεβρες $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \dots, \mathcal{F}_n$ θα λέγονται ανεξάρτητες αν για οποιαδήποτε επιλογή γεγονότων $A_1 \in \mathcal{F}_1, A_2 \in \mathcal{F}_2, \dots, A_n \in \mathcal{F}_n$ ισχύει ότι τα A_1, A_2, \dots, A_n είναι ανεξάρτητα.

Τέλος μπορούμε να μιλήσουμε για την ανεξαρτησία τυχαίων μεταβλητών αν θυμηθούμε ότι με κάθε τυχαία μεταβλητή σχετίζεται μια σ-άλγεβρα (η σ-άλγεβρα που παράγεται από αυτή).

Ορισμός 1.6.3. Οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n ονομάζονται ανεξάρτητες, αν οι σ-άλγεβρες που παράγονται από αυτές, $\sigma(X_1), \sigma(X_2), \dots, \sigma(X_n)$ είναι ανεξάρτητες σ-άλγεβρες.

Ένας ισοδύναμος τρόπος να μιλήσουμε για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές είναι μέσω του πεδίου τιμών τους κατευθείαν. Ας υποθέσουμε αρχικά, για πιο απλά ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_i , $i = 1, \dots, n$ είναι διακριτές, οπότε το πεδίο τιμών τους $Rg(X_i) = \{x_{i,1}, x_{i,2}, \dots\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης (γενικά) τον συμβολισμό $X = (X_1, \dots, X_n)$.

Ορισμός 1.6.4. Οι διακριτές τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2, \dots, X_n , ονομάζονται ανεξάρτητες αν

$$P_X(X_1 = x_{1,i_1}, X_2 = x_{2,i_2}, \dots, X_n = x_{n,i_n}) = P_{X_1}(X_1 = x_{1,i_1}) P_{X_2}(X_2 = x_{2,i_2}) \cdots P_{X_n}(X_n = x_{n,i_n})$$

για κάθε $x_{m,i_m} \in Rg(X_m)$, $m = 1, \dots, n$.

Ο ορισμος αυτός μπορεί να γενικευθεί και για συνεχείς τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1, \dots, n$ όπου εκεί μπορούμε να υποθέσουμε πως $Rg(X_i) = \mathbb{R}$ (ή κάποιο υποσύνολο του).

Ορισμός 1.6.5. Οι συνεχείς τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1, \dots, n$ ονομάζονται ανεξάρτητες αν

$$P_X(X_1 \in E_1, X_2 \in E_2, \dots, X_n \in E_n) = P_{X_1}(X_1 \in E_1)P_{X_2}(X_2 \in E_2) \cdots P_{X_n}(X_n \in E_n)$$

για κάθε $E_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), i = 1, \dots, n$.

Απο τον παραπάνω ορισμο, βλέπουμε πως αν f_i είναι οι πυκνότητες πιθανότητας των X_i και οι X_i είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους, η απο κοινου πυκνότητα πιθανοτητας μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$$

Πρόταση 1.6.1. Αν X_1, X_2, \dots, X_n είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, και $f_1, f_2, \dots, f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ντετερμινιστικές συναρτήσεις, τότε και οι τυχαίες μεταβλητές $f_1(X_1), f_2(X_2), \dots, f_n(X_n)$ είναι ανεξάρτητες.

Η ανεξαρτησία και η μεση τιμή συνδέονται ως εξής.

Πρόταση 1.6.2. Ας υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $X_i, i = 1, \dots, n$ είναι ανεξάρτητες. Τότε

$$\mathbb{E}[X_1 X_2 \cdots X_n] = \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] \cdots \mathbb{E}[X_n].$$

Απόδειξη. Ας πάρουμε την περίπτωση όπου είναι συνεχείς. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1 X_2 \cdots X_n] &= \int_{\mathbb{R}^n} x_1 x_2 \cdots x_n f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2, \dots, dx_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} x_1 x_2 \cdots x_n f_1(x_1) f_2(x_2) \cdots f_n(x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}} x_1 f_1(x_1) dx_1 \right) \left(\int_{\mathbb{R}} x_2 f_2(x_2) dx_2 \right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} x_n f_n(x_n) dx_n \right) \\ &= \mathbb{E}[X_1] \mathbb{E}[X_2] \cdots \mathbb{E}[X_n], \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το Fubini-Tonelli για να γράψουμε το πολλαπλό ολοκλήρωμα επάνω στο \mathbb{R}^n σαν n επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα επάνω στο \mathbb{R} . \square

Παράδειγμα 1.6.1. Ας θεωρήσουμε το παράδειγμα της ρίψης 3 νομισματων με δεγματικό χώρο

$$\Omega = \{T_1 H_2 H_3, T_1 H_2 T_3, T_1 T_2 H_3, T_1 T_2 T_3, H_1 H_2 H_3, H_1 H_2 T_3, H_1 T_2 H_3, H_1 T_2 T_3\}$$

και θεωρούμε ότι

$$P(T_1 H_2 H_3) = P(T_1 H_2 T_3) = \cdots = P(H_1 T_2 T_3) = \frac{1}{8},$$

δηλαδή ότι όλα τα γεγονότα είναι ισοπίθανα. Ποντάρουμε 1 μάρκο σε κάθε νομισμα, και έστω X_1, X_2, X_3 οι τυχαίες μεταβλητές που περιγράφουν το κέρδος απο τον πρώτο, δεύτερο και τρίτο νομισμα, αντιστοίχως. Ισχυριζόμαστε οτι οι τυχαίες αυτές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Ας δείξουμε ότι οι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες. Θα πρέπει να καθορίσουμε πρώτα τις $\sigma(X_1)$ και $\sigma(X_2)$. Η τυχαία μεταβλητή X_1 ορίζεται ως

$$\begin{aligned} X_1(T_1 H_2 H_3) &= X_1(T_1 H_2 T_3) = X_1(T_1 T_2 H_3) = X_1(T_1 T_2 T_3) = -1, \\ X_1(H_1 H_2 H_3) &= X_1(H_1 H_2 T_3) = X_1(H_1 T_2 H_3) = X_1(H_1 T_2 T_3) = 1, \end{aligned}$$

συνεπώς,

$$\begin{aligned} X_1^{-1}(\{-1\}) &= \{T_1 H_2 H_3, T_1 H_2 T_3, T_1 T_2 H_3, T_1 T_2 T_3\}, \\ X_1^{-1}(\{1\}) &= \{H_1 H_2 H_3, H_1 H_2 T_3, H_1 T_2 H_3, H_1 T_2 T_3\}. \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}\sigma(X_1) &= \{\emptyset, \Omega, X_1^{-1}(\{-1\}), X_1^{-1}(\{1\})\} \\ &= \{\emptyset, \Omega, \{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}, \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, H_1T_2H_3, H_1T_2T_3\}\}.\end{aligned}$$

Η τυχαία μεταβλητή X_2 ορίζεται ως

$$\begin{aligned}X_2(H_1T_2T_3) &= X_1(H_1T_2H_3) = X_1(T_1T_2H_3) = X_1(T_1T_2T_3) = -1, \\ X_2(H_1H_2H_3) &= X_2(H_1H_2T_3) = X_2(T_1H_2H_3) = X_2(T_1H_2T_3) = 1,\end{aligned}$$

συνεπώς,

$$\begin{aligned}X_2^{-1}(\{-1\}) &= \{H_1T_2T_3, H_1T_2H_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}, \\ X_2^{-1}(\{1\}) &= \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, T_1H_2H_3, T_1H_2T_3\}.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}\sigma(X_2) &= \{\emptyset, \Omega, X_2^{-1}(\{-1\}), X_2^{-1}(\{1\})\} \\ &= \{\emptyset, \Omega, \{H_1T_2T_3, H_1T_2H_3, T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}, \{H_1H_2H_3, H_1H_2T_3, T_1H_2H_3, T_1H_2T_3\}\}.\end{aligned}$$

Οι $\sigma(X_1)$, $\sigma(X_2)$ είναι ανεξάρτητες σ -άλγεβρες. Πράγματι,

$$\begin{aligned}P(X_1(\{-1\}) \cap X_2(\{-1\})) &= P(\{T_1T_2H_3, T_1T_2T_3\}) = \frac{2}{8} = P((X_1(\{-1\}))P(X_2(\{-1\})) = \frac{4}{8} \frac{4}{8}, \\ P(X_1(\{-1\}) \cap X_2(\{1\})) &= P(\{T_1H_2H_3, T_1H_2T_3\}) = \frac{2}{8} = P((X_1(\{-1\}))P(X_2(\{1\})) = \frac{4}{8} \frac{4}{8}, \\ P(X_1(\{1\}) \cap X_2(\{-1\})) &= P(\{H_1T_2T_3, H_1T_2H_3\}) = \frac{2}{8} = P((X_1(\{1\}))P(X_2(\{-1\})) = \frac{4}{8} \frac{4}{8}, \\ P(X_1(\{1\}) \cap X_2(\{1\})) &= P(\{H_1H_2T_3, H_1H_2H_3\}) = \frac{2}{8} = P((X_1(\{1\}))P(X_2(\{1\})) = \frac{4}{8} \frac{4}{8}.\end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.6.2. Η ανεξαρτησία ή όχι γεγονότων και τυχαίων μεταβλητών εξαρτάται από το μετρο πιθανότητας. Για να πειστείτε ως προς αυτό επαναλάβετε μόνοι σας το παραδειγμα 1.6.1 στη περίπτωση όπου τα απλά γεγονότα δεν είναι ισοπίθανα.

1.7 Δεσμευμένη μέση τιμή

1.7.1 Δεσμευμένη μέση τιμή ως προς γεγονός

Ορισμός 1.7.1. Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο Ω και ένα γεγονός $A \subset \Omega$, τέτοιο ώστε $P(A) > 0$. Αν $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$\mathbb{E}^A[X] := \sum_{\omega \in A} X(\omega)P(\{\omega\})$$

αν το Ω είναι αριθμησιμο ή γενικότερα

$$\mathbb{E}^A[X] = \int_A X(\omega) dP(\omega)$$

αν το Ω δεν είναι αριθμησιμο.

Η ποσότητα αυτή είναι η αναμενόμενη τιμή της X αν περιοριστούμε στα γεγονότα τα οποία ανήκουν στο A . Μπορούμε να δούμε εύκολα ότι

$$\mathbb{E}^A[X] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A]$$

όπου $\mathbf{1}_A$ είναι η τυχαία μεταβλητή που ονομάζεται η δείκτρια συναρτηση του γεγονότος A , και που ορίζεται ως

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{αν } \omega \in A, \\ 0 & \text{αν } \omega \notin A \end{cases}$$

Ορισμός 1.7.2. Ας θεωρήσουμε ένα δειγματικό χώρο Ω και ένα γεγονός $A \subset \Omega$, τέτοιο ώστε $P(A) > 0$. Αν $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να ορίσουμε την ποσότητα

$$\mathbb{E}[X | A] := \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}^A[X] = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A].$$

Η ποσότητα αυτή ονομάζεται η δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς το γεγονός A .

Ας θυμηθούμε τώρα λίγο τις ιδιότητες της δεσμευμένης πιθανότητας. Είχαμε δει ότι αν $A \subset \Omega$ ένα γεγονός τέτοιο ώστε $P(A) > 0$, μπορούμε να ορίσουμε την δεσμευμένη πιθανότητα οποιουδήποτε γεγονότος $B \subset A$ ως προς το A , με τον τύπο

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Αυτό μας ορίζει μια καινούργια κατανομή πιθανότητας στο Ω την P_A η οποία ορίζεται βάσει του κανονα

$$P_A(B) := P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}, \quad \forall B \subset \Omega.$$

Η κατανομή αυτή πιθανότητα ονομάζεται η δεσμευμένη κατανομή ως προς το γεγονός A .

Μπορούμε να δούμε ότι η ποσότητα $\mathbb{E}[X | A]$ και η δεσμευμένη κατανομή P_A σχετίζονται μεταξύ τους.

Πρόταση 1.7.1. Ισχυει ότι

$$\mathbb{E}[X | A] = \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_A] = \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}_{P_A}[X],$$

δηλαδή η δεσμευμένη μέση τιμή της X ως προς το γεγονός A και χρησιμοποιώντας την κατανομή P , είναι ίση με την μέση τιμή της X αν χρησιμοποιήσουμε την δεσμευμένη κατανομή P_A .

Απόδειξη. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X | A] &= \frac{1}{P(A)} \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_A] = \frac{1}{P(A)} \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \mathbf{1}_A(\omega) P(\{\omega\}) \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \frac{1}{P(A)} P(\{\omega\} \cap A) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) P_A(\{\omega\}) = \mathbb{E}_{P_A}[X]. \end{aligned}$$

□

Παράδειγμα 1.7.1. Έστω X η τυχαία μεταβλητή που περιγράφει το κέρδος σας αν ποντάρετε 1 ευρώ στην κορώνα, στην ρίψη 2 τιμιων νομισματων. Αν A το γεγονός ότι το πρώτο νομισμα έχει φέρει κορώνα, υπολογίστε τις ποσότητες $\mathbb{E}[X]$ και $\mathbb{E}[X | A]$. Τι παρατηρείτε;

Παράδειγμα 1.7.2 (Μέθοδος αποδοχής - απόρριψης). Ας υποθέσουμε ότι στον (Ω, \mathcal{F}) έχουμε δυο μετρα πιθανότητας P_1, P_2 τέτοια ώστε $\frac{dP_2}{dP_1} = f$. Ας υποθέσουμε οτι η συνάρτηση f έχει άνω φράγμα M . Ας πάρουμε τώρα μια τυχαία μεταβλητή $Z : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ακολουθεί την ομοιόμορφη κατανομή στο $[0, 1]$ και ας πάρουμε τα γεγονοτα $A = \{(\omega, \omega') \in \Omega \times \Omega' : f(X(\omega)) \geq M Z(\omega')\}$. Για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή της μορφής $\phi(X)$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_{P_1 \otimes \mathcal{L}}[\phi(X) | A] = \mathbb{E}_{P_2}[\phi(X)]$$

Θα συμβολίσουμε με $P'_1 = P_1 \otimes \mathcal{L}$ για ευκολία, και παρατηρούμε ότι απο τον ορισμό

$$\mathbb{E}_{P_1 \otimes \mathcal{L}}[\phi(X) | A] = \mathbb{E}_{P'_1}[\phi(X) | A] = \frac{1}{P'_1(A)} \int_A \phi(X) dP'_1.$$

Ομως,

$$\begin{aligned} P'_1(A) &= P'_1(f(X(\omega)) \geq M Z(\omega')) = P'_1\left(Z(\omega') \leq \frac{1}{M} f(X(\omega))\right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{z \leq \frac{1}{M} f(x)}(x, z) f_1(x) dz dx = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\frac{1}{M} f(x)} f_1(x) dz dx = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} f_1(x) f(x) dx = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} f_2(x) dx = \frac{1}{M}, \end{aligned}$$

εφόσον $\frac{f_2(x)}{f_1(x)} = f(x)$ και η f_2 είναι συναρτηση πυκνότητας πιθανότητας.
Ομοίως,

$$\begin{aligned}\int_A \phi(X) dP'_1 &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{z \leq \frac{1}{M} f(x)}(x, z) \phi(x) f_1(x) dz dx = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{\frac{1}{M} f(x)} \phi(x) f_1(x) dz dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_1(x) \frac{1}{M} f(x) dx = \frac{1}{M} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_2(x) dx.\end{aligned}$$

Κατά συνέπεια

$$\mathbb{E}_{P_1 \otimes \mathcal{L}}[\phi(X) | A] = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) f_2(x) dx = \mathbb{E}_{P_2}[\phi(X)]$$

1.7.2 Δεσμευμενη μεση τιμή ως προς διακριτή τυχαία μεταβλητή

Ορισμός 1.7.3. Έστω Ω ένας δειγματικός χώρος και $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δύο τυχαίες μεταβλητές. Θεωρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y είναι διακριτή και $Rg(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$. Μπορούμε να ορίσουμε την δεσμευμενη μέση τιμή της X ως προς την Y σαν την τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}[X | Y] : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \mathbb{E}[X | \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}], \text{ αν } Y(\omega) = y_i.$$

Ο ορισμός αυτός μας δίνει την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη που μπορούμε να έχουμε για τις τιμές που μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή X δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι η τυχαία μεταβλητή Y πήρε την τιμή $y_i \in Rg(Y)$.

Παράδειγμα 1.7.3. Έστω το πείραμα της ρίψης δύο τιμων νομισμάτων, X η τυχαία μεταβλητή που δίνει το κέρδος αν ποντάρετε 1 ευρώ στην κορώνα και Y η τυχαία μεταβλητη που δίνει το κέρδος αν ποντάρετε 1 ευρώ στην πρώτη κορώνα και 2 ευρώ στην δεύτερη. Υπολογίστε την $\mathbb{E}[X | Y]$. Υπολογίστε επίσης την $\mathbb{E}[Y | X]$.

Παράδειγμα 1.7.4. Ας υποθέσουμε οτι ρίχνουμε 3 τίμια νομίσματα των 10, 20 και 50 λεπτών. Ας υποθέσουμε επίσης οτι X είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το άθροισμα της αξίας των νομισμάτων που εφεραν κορώνα και Y είναι η τυχαία μεταβλητή που μας δίνει το άθροισμα της αξίας των νομισμάτων των 10 και 20 λεπτών που εφεραν κορώνα. Υπολογίστε την τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}[X | Y]$ και δείξτε οτι

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \begin{cases} 25 & \text{αν } Y(\omega) = 0, \\ 35 & \text{αν } Y(\omega) = 10, \\ 45 & \text{αν } Y(\omega) = 20, \\ 55 & \text{αν } Y(\omega) = 30. \end{cases}$$

Συγκρίνετε αυτό με την $\mathbb{E}[X]$.

Αν Y είναι η σταθερή τυχαία μεταβλητή τότε $\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[X]$. Θα μπορούσαμε να πούμε ότι η γνώση σχετικά με την τιμή που παίρνει η σταθερή τυχαία μεταβλητή δεν μας παρέχει καμία πληροφορία η οποία μας επιτρέπει να προβλέψουμε με καλύτερο τρόπο την τυχαία μεταβλητή X .

Πρόταση 1.7.2. Η τυχαία μεταβλητη $\mathbb{E}[X | Y]$ παράγει την ίδια διαμέριση του δειγματικού χώρου με την τυχαία μεταβλητή Y . Ισοδύναμα, $\sigma(\mathbb{E}[X | Y]) = \sigma(Y)$.

Απόδειξη. Εφόσον $Rg(Y)$ αριθμήσιμο σύνολο ισχυει και οτι $Rg(\mathbb{E}[X | Y])$ είναι αριθμήσιμο σύνολο. Έστω $Rg(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$ και $Rg(\mathbb{E}[X | Y]) = \{z_1, z_2, \dots\}$. Μπορούμε να δούμε απο τον ορισμο της $\mathbb{E}[X | Y]$ ότι για κάθε i ισχύει

$$\mathbb{E}[X | Y]^{-1}(\{z_i\}) = \{\omega \in \Omega : \mathbb{E}[X | Y](\omega) = z_i\} = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\} = Y^{-1}(\{y_i\}).$$

Απο αυτό βλέπουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbb{E}[X | Y]$ και Y παράγουν τις ίδιες διαμερίσεις του δειγματικού χώρου Ω . \square

Εφόσον η $\mathbb{E}[X | Y]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή μπορούμε να ορίσουμε την μέση της τιμή.

Πρόταση 1.7.3. Ισχυει ότι $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}[X]$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $Rg(\mathbb{E}[X | Y]) = \{z_1, z_2, \dots\}$ και $Rg(Y) = \{y_1, y_2, \dots\}$. Έχουμε από τον ορισμό της $\mathbb{E}[X | Y]$ ότι για κάθε i

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = z_i \text{ αν } Y(\omega) = y_i.$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \sum_i z_i \bar{P}(\mathbb{E}[X | Y] = z_i) = \sum_i z_i \bar{P}(Y = y_i).$$

Απο τον ορισμό της $\mathbb{E}[X | Y]$ μπορούμε να δούμε ότι για κάθε i ,

$$z_i = \mathbb{E}[X | \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}] = \frac{1}{\bar{P}(Y = y_i)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}]$$

όπου $A_i = \{\omega \in \Omega, : Y(\omega) = y_i\}$.

Μπορούμε να δούμε επίσης ότι $\bigcup_i A_i = \Omega$ και $\sum_i \mathbf{1}_{A_i} = 1$.

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] &= \sum_i \frac{1}{\bar{P}(Y = y_i)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}] \bar{P}(Y = y_i) \\ &= \sum_i \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[X \sum_i \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

□

Μπορούμε να δούμε ότι η υπο συνθήκη μέση τιμή εξαρτάται μονάχα από την διαμέριση που παράγει μια τυχαία μεταβλητή και όχι από τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή αυτή κάθε αυτή.

Πρόταση 1.7.4. Έστω $Y, Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ δυο τυχαίες μεταβλητές οι οποίες παράγουν την ίδια διαμέριση, τότε $\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[X | Z]$.

Παράδειγμα 1.7.5. Υπολογίστε την $\mathbb{E}[X | Y]$ και την $\mathbb{E}[X | Y^2]$.

1.7.3 Η δεσμευμένη μέση τιμή ως προς διαμέριση

Ορισμός 1.7.4. Έστω $\Delta := \{A_1, \dots, A_n\}$ μια διαμεριση του δειγματικού χώρου Ω , δηλαδή μια συλλογή από συνολα με την ιδιότητα $A_i \cap A_j = \emptyset, i \neq j$ και $\bigcup_i A_i = \Omega$. Η δεσμευμένη μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ως προς την διαμέριση Δ , ορίζεται ως η τυχαία μεταβλητή

$$\mathbb{E}[X | \Delta](\omega) := \mathbb{E}[X | A_1] \mathbf{1}_{A_1}(\omega) + \dots + \mathbb{E}[X | A_n] \mathbf{1}_{A_n}(\omega),$$

όπου

$$\mathbb{E}[X | A_i] = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}].$$

Το παραπάνω άθροισμα είναι ένας κομψός και συμπαγής τρόπος να γράψουμε ότι $\mathbb{E}[X | \Delta](\omega) = \mathbb{E}[X | A_i]$ αν $\omega \in A_i$. Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω ορισμός μπορεί να χρησιμοποιηθεί ακόμα και στην περίπτωση όπου η διαμέριση αποτελείται από αριθμήσιμο πλήθος υποσυνόλων του Ω .

Επειδή μια διακριτή τυχαία μεταβλητή Y παράγει μια διαμέριση του δειγματικού χώρου Ω , την $\Delta_Y = \{A_i\}$ βάσει του κανόνα $A_i = \{\omega \in \Omega : Y(\omega) = y_i\}$ για κάθε $y_i \in Rg(Y)$, μπορούμε να δούμε ότι

$$\mathbb{E}[X | Y] = \mathbb{E}[X | \Delta_Y]$$

όπου η ισότητα αυτή είναι μια ισότητα μεταξύ δύο τυχαίων μεταβλητών δηλαδή

$$\mathbb{E}[X | Y](\omega) = \mathbb{E}[X | \Delta_Y](\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Εφόσον η $\mathbb{E}[X | \Delta]$ είναι μια τυχαία μεταβλητή θα παράγει και αυτή μέσω της αντιστροφής εικόνας της μια διαμέριση στον δειγματικό χώρο. Ποιά θα είναι η διαμέριση που παράγει; Μπορεί κανείς να δείξει ότι η διαμέριση που παράγει η $\mathbb{E}[X | \Delta]$ ταυτίζεται με την διαμέριση Δ ! Μπορούμε όμως να δείξουμε και κάτι παραπάνω:

Πρόταση 1.7.5. Η διαμεριση που παράγει στον Ω η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}[X | \Delta]$ είναι η Δ . Μπορούμε να χαρακτηρίσουμε την τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}[X | \Delta]$ σαν την **μοναδική** τυχαία μεταβλητή Z η οποία παράγει την διαμεριση Δ και που έχει την ιδιότητα

$$\mathbb{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[X\mathbf{1}_{A_i}], \text{ για κάθε } A_i \in \Delta.$$

Απόδειξη. Ας θέσουμε $Z = \mathbb{E}[X | \Delta]$.

Για κάθε i ισχύει ότι

$$Z\mathbf{1}_{A_i} = \mathbb{E}_P[X | A_i]\mathbf{1}_{A_i}.$$

Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}] &= \sum_{\omega \in A_i} Z(\omega)P(\{\omega\}) = \sum_{\omega \in A_i} \mathbb{E}[X | A_i]P(\{\omega\}) \\ &= \mathbb{E}[X | A_i] \sum_{\omega \in A_i} P(\{\omega\}) = \mathbb{E}[X | A_i]P(A_i) \\ &= \frac{1}{P(A_i)}\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_i}]P(A_i) = \mathbb{E}[X\mathbf{1}_{A_i}]. \end{aligned}$$

Άρα,

$$(1.1) \quad \mathbb{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[X\mathbf{1}_{A_i}], \text{ για κάθε } A_i \in \Delta.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι υπήρχε και μια δευτερη τυχαία μεταβλητή Y με την ιδια ιδιότητα, δηλαδή οτι η διαμέριση του Ω η οποία παράγει είναι η Δ και

$$\mathbb{E}_P[Y\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[X\mathbf{1}_{A_i}], \text{ για κάθε } A_i \in \Delta.$$

Εφόσον η Y παράγει την Δ θα παίρνει την ιδια τιμή y_i για κάθε $\omega \in A_i \in \Delta$, δηλαδή $Y(\omega) = y_i$, αν $\omega \in A_i$. Όμοια $Z(\omega) = z_i$ αν $\omega \in A_i$. Για να καθορίσουμε λοιπόν πλήρως τις τυχαίες μεταβλητές Z και Y αρκεί να καθορίσουμε τις τιμες που παίρνουν στα σύνολα που απαρτίζουν την διαμεριση. Αν $y_i = z_i$ για κάθε i τότε $Y = Z$ με την έννοια ότι $Y(\omega) = Z(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega$.

Γνωρίζουμε απο τον ορισμο της $Z = \mathbb{E}[X | \Delta]$ ότι

$$z_i = \frac{1}{P(A_i)}\mathbb{E}_P[X\mathbf{1}_{A_i}] = \frac{1}{P(A_i)}\mathbb{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}],$$

όπου χρησιμοποιήσαμε πρώρα τον ορισμό της Z και μετά την ιδιότητα (1.1).

Όμως θυμηθείτε οτι υποθέσαμε οτι $\mathbb{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[Y\mathbf{1}_{A_i}]$ για κάθε i . Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} z_i &= \frac{1}{P(A_i)}\mathbb{E}_P[Z\mathbf{1}_{A_i}] = \frac{1}{P(A_i)}\mathbb{E}_P[Y\mathbf{1}_{A_i}] \\ &= \frac{1}{P(A_i)} \sum_{\omega \in A_i} Y(\omega)P(\{\omega\}) = \frac{1}{P(A_i)} \sum_{\omega \in A_i} y_i P(\{\omega\}) \\ &= \frac{1}{P(A_i)} y_i \sum_{\omega \in A_i} P(\{\omega\}) = \frac{1}{P(A_i)} y_i P(A_i) = y_i, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι η Y παίρνει την ιδια τιμή y_i για οποιοδήποτε $\omega \in A_i$ (εφόσον η Y παράγει την διαμέριση $\Delta = \{A_i\}$). Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε i , ισχύει ότι $z_i = y_i$ κατά συνέπεια, $Z = Y$ άρα η $Z = \mathbb{E}[X | \Delta]$ είναι μοναδική. \square

Πρόταση 1.7.6. Έστω Ω ένας δεγματικός χώρος, $\Delta = \{A_i\}$ μια διαμέριση του και $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή. Ας ορίσουμε $\mathbb{E}[X | \Delta]$ την δεσμευμένη μεση τιμή της X ως προς την διαμεριση Δ . Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{E}[X | \Delta]] = \mathbb{E}_P[X].$$

Απόδειξη. Ας θέσουμε $Z = \mathbb{E}[X | \Delta]$ και $z_i = \mathbb{E}[X | A_i]$, $i = 1, \dots, n$.
Για οποιοδήποτε $A_i \in \Delta$ αποδείξαμε ότι

$$\mathbb{E}_P[Z \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_i}]$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} Z(\omega) &:= \mathbb{E}[X | \Delta](\omega) := \mathbb{E}[X | A_1] \mathbf{1}_{A_1}(\omega) + \dots + \mathbb{E}[X | A_n] \mathbf{1}_{A_n}(\omega) \\ &= z_1 \mathbf{1}_{A_1}(\omega) + \dots + z_n \mathbf{1}_{A_n}(\omega), \end{aligned}$$

Απο την γραμμικότητα της μέσης τιμής μπορώ να υπολογίσω

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P[Z] &= \mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X | A_1] \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{E}_P[X | A_n] \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= \mathbb{E}_P[z_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + z_n \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= z_1 \mathbb{E}_P[\mathbf{1}_{A_1}] + \dots + z_n \mathbb{E}_P[\mathbf{1}_{A_n}] \\ &= z_1 P(A_1) + \dots + z_n P(A_n) \\ &= \frac{1}{P(A_1)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_1}] P(A_1) + \dots + \frac{1}{P(A_n)} \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_n}] P(A_n) \\ &= \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_1}] + \dots + \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_1} + \dots + X \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= \mathbb{E}_P[X(\mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbf{1}_{A_n})] = \mathbb{E}[X], \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbf{1}_{A_n} = 1$. □

Πρόταση 1.7.7. *Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X παράγει την διαμεριση Δ για τον δειγματικό χώρο. Τότε, $\mathbb{E}_P[X | \Delta] = X$.*

Απόδειξη. Έστω $\Delta = \{A_i\}$ η διαμεριση η οποία παράγει η τυχαία μεταβλητή X . Αυτό σημαίνει ότι η X μπορεί να γραφεί ως

$$X = c_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + c_n \mathbf{1}_{A_n},$$

για κάποιες σταθερές c_1, \dots, c_n . Τότε, για κάθε i , έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_P[X | A_i] = \frac{1}{P(A_i)} \mathbb{E}_P[X \mathbf{1}_{A_i}] = \frac{1}{P(A_i)} c_i P(A_i) = c_i.$$

Απο τον ορισμο όμως της τυχαίας μεταβλητής $\mathbb{E}_P[X | \Delta]$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X | \Delta] &= \mathbb{E}[X | A_1] \mathbf{1}_{A_1} + \dots + \mathbb{E}[X | A_n] \mathbf{1}_{A_n} \\ &= c_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + c_n \mathbf{1}_{A_n} = X. \end{aligned}$$

□

Πρόταση 1.7.8. *Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητη Y παράγει την διαμεριση Δ ενώ η X όχι. Τότε*

$$\mathbb{E}[XY | \Delta] = Y \mathbb{E}[X | \Delta].$$

Πρόταση 1.7.9. *Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 2 διαμερίσεις του Ω , Δ_1 και Δ_2 όπου η Δ_2 είναι πιο λεπτή απο την Δ_1 . Τότε,*

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X | \Delta_1] | \Delta_2] = \mathbb{E}_P[X | \Delta_1].$$

1.7.4 Η δεσμευμένη μεση τιμή ως προς γενική σ-άλγεβρα

Το τελευταίο στάδιο γενίκευσης που θα χρειαστούμε για την δεσμευμένη μέση τιμή είναι ως προς μια γενική σ-άλγεβρα. Θα δώσουμε τον ορισμό της.

Ορισμός 1.7.5. *Έστω μια τυχαία μεταβλητή X ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) και μια σ-άλγεβρα \mathcal{G} . Η δεσμευμένη μέση τιμής της X ως προς την \mathcal{G} , είναι η τυχαία μεταβλητή $Z : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ με τις ιδιότητες*

- (i) Η Z είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{G} .
(ii) Ισχύει ότι

$$\int_A X dP = \int_A Z dP, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Θα συμβολίζουμε $Z = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$.

Η ύπαρξη της δεσμευμένης μεσης τιμής ως προς γενική σ -άλγεβρα προκύπτει από θεμελιώδη θεωρήματα της ανάλυσης και της θεωρίας μέτρου, όπως το θεώρημα Radon-Nikodym. Η δεσμευμένη μεση τιμή $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ υπάρχει πάντοτε αρκεί να ισχύει ότι $\mathbb{E}[X] < \infty$.

Πρόταση 1.7.10 (Ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής).

- (i) Ας υποθέσουμε ότι $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Τότε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1] | \mathcal{G}_2] &= \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1], \\ \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2] | \mathcal{G}_1] &= \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1] \end{aligned}$$

- (ii) Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι μετρήσιμη ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{G} . Τότε,

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = X.$$

- (iii) Ας υποθέσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ανεξαρτητη ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{G} , υπο την έννοια ότι η $\sigma(X)$ και η \mathcal{G} είναι ανεξαρτητες σ -άλγεβρες. Τότε,

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = \mathbb{E}[X].$$

- (iv) Ας πάρουμε την τετριμμένη σ -άλγεβρα $\mathcal{O} = \{\emptyset, \Omega\}$ και οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή X . Ισχυει ότι

$$\mathbb{E}[X | \mathcal{O}] = \mathbb{E}[X].$$

- (v) Αν $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ και X είναι \mathcal{F} -μετρησιμη ενώ Y είναι \mathcal{G} -μετρήσιμη τότε

$$\mathbb{E}[XY | \mathcal{G}] = Y \mathbb{E}[X | \mathcal{G}].$$

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε από το (ii).

(ii) Έστω ότι η X είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{G} . Για να δείξουμε ότι $Z := \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] = X$ αρκεί από τον ορισμό να δείξουμε (α) πως $Z = X$ είναι μετρησιμη ως προς την \mathcal{G} και (β) πως $\int_A Z dP = \int_A X dP$ για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Το (α) το έχουμε από την υπόθεση, ενώ το (β) είναι ταυτολογία αν $Z = X$.

(i) Ας ονομασσουμε $Z_1 := \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$. Εξ ορισμού η Z_1 είναι μετρησιμη ως προς την \mathcal{G}_1 και $\int_A Z_1 dP = \int_A X dP$ για κάθε $A \in \mathcal{G}_1$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1] | \mathcal{G}_2] = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$ δηλαδή σύμφωνα με τον παραπάνω συμβολισμό ότι $\mathbb{E}[Z_1 | \mathcal{G}_2] = Z_1$. Εφόσον $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$, επειδή η Z_1 είναι μετρησιμη ως προς την \mathcal{G}_1 θα είναι μετρήσιμη και ως προς την \mathcal{G}_2 (αυτό πρέπει να είναι προφανές, για κάθε $E \subset \mathbb{R}$, εφόσον Z_1 είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{G}_1 , ισχυει πως $Z_1^{-1}(E) \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$). Από το (ii) λοιπόν έχουμε το ζητούμενο.

Ας ονομασσουμε $Z_2 := \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2]$ η οποία εξ ορισμού είναι μετρησιμη ως προς την \mathcal{G}_2 και ισχύει πως $\int_A Z_2 dP = \int_A X dP$ για κάθε $A \in \mathcal{G}_2$. Ζητάμε να δείξουμε ότι $\mathbb{E}[Z_2 | \mathcal{G}_1] = Z_1$. Από τον ορισμό θα πρέπει να δείξουμε ότι (α) Z_1 μετρησιμη ως προς την \mathcal{G}_1 και (β) $\int_A Z_2 dP = \int_A Z_1 dP$ για κάθε $A \in \mathcal{G}_1$. Το (α) ισχύει εφόσον $Z_1 := \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$. Για το (β) παρατηρούμε πως εφόσον $\mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$ οποιοδήποτε $A \in \mathcal{G}_1$ θα ικανοποιεί και τη $A \in \mathcal{G}_2$. Έστω οποιοδήποτε $A \in \mathcal{G}_1 \subset \mathcal{G}_2$. Εφόσον $Z_1 = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_1]$,

$$(1.2) \quad \int_A Z_1 dP = \int_A X dP.$$

Όμως το $A \in \mathcal{G}_2$ επίσης και εφόσον $Z_2 = \mathbb{E}[X | \mathcal{G}_2]$ ισχύει πως

$$(1.3) \quad \int_A Z_2 dP = \int_A X dP.$$

Συγκρινοντας τις (1.2) και (1.3) καταλήγουμε στο ζητούμενο.

(iii) Θα πρέπει ισοδύναμα να δείξουμε πως (α) $\mathbb{E}[X]$ είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{G} και (β) πως $\int_A X dP = \int_A \mathbb{E}[X] dP$ για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Σχετικά με το (α) εφόσον η $\mathbb{E}[X]$ είναι η σταθερή τυχαία μεταβλητή, είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{O} = \{\emptyset, \Omega\}$ και φυσικά μετρήσιμη και ως προς κάθε άλλη σ-άλγεβρα \mathcal{G} επειδή $\mathcal{O} \subset \mathcal{G}$. Σχετικά με το (β) παρατηρούμε ότι

$$(1.4) \quad \int_A X dP = \int_{\Omega} X \mathbf{1}_A dP = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A].$$

Επειδή η X είναι ανεξάρτητη της \mathcal{G} και $A \in \mathcal{G}$ έχουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X και $\mathbf{1}_A$ είναι ανεξάρτητες οπότε

$$(1.5) \quad \mathbb{E}[X \mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X] \mathbb{E}[\mathbf{1}_A] = \mathbb{E}[X] \int_A dP = \int_A \mathbb{E}[X] dP.$$

Συγκρινοντας τις (1.4) και (1.5) καταλήγουμε στο ζητούμενο.

(iv) Η \mathcal{O} περιέχει μόνο 2 σύνολα το \emptyset και το Ω . Η σχέση $\int_A X dP = \int_A \mathbb{E}[X] dP$ ισχύει τόσο για την επιλογή $A = \emptyset$ (και τα δυο μέλη είναι ταυτοτικά 0) όσο και για την επιλογή $A = \Omega$.

(v) Ας πάρουμε αρχικά την πιο απλή \mathcal{G} -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή που μπορούμε να σκεφτούμε, την $\mathbb{1}_B$ για κάποιο $B \in \mathcal{G}$. Αν $Z := \mathbb{E}[X \mathbb{1}_B | \mathcal{G}]$ απο τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε ότι για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{G}$ ισχύει

$$(1.6) \quad \int_A Z dP = \int_A X \mathbf{1}_B dP = \int_{A \cap B} X dP.$$

Εφόσον η \mathcal{G} είναι σ-άλγεβρα και $A, B \in \mathcal{G}$, θα έχουμε και $A \cap B \in \mathcal{G}$. Απο τον ορισμό της $\mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ για κάθε $C \in \mathcal{G}$ ισχύει $\int_C X dP = \int_C \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP$, οπότε για την επιλογή $C = A \cap B$ έχουμε

$$(1.7) \quad \int_{A \cap B} X dP = \int_{A \cap B} \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP = \int_A \mathbf{1}_B \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP.$$

Συνδυάζοντας τις (1.6) και (1.7) καταλήγουμε ότι

$$\int_A Z dP = \int_A \mathbf{1}_B \mathbb{E}[X | \mathcal{G}] dP, \quad \forall A \in \mathcal{G},$$

οπότε $Z := \mathbb{E}[X \mathbf{1}_B | \mathcal{G}] = \mathbf{1}_B \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$. Λόγω της γραμμικότητας, η σχέση αυτή θα ισχύει και για κάθε απλή τυχαία μεταβλητή $Y_s = \sum_{i=1}^n y_i \mathbf{1}_{B_i}$, $B_i \in \mathcal{G}$ και $y_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, δηλαδή $\mathbb{E}[X Y_s | \mathcal{G}] = Y_s \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$. Ας θυμηθούμε τώρα ότι κάθε τυχαία μεταβλητή Y η οποία είναι \mathcal{G} -μετρήσιμη μπορεί να προσεγγιστεί σαν το όριο μιας ακολουθίας απλών τυχαίων μεταβλητών $\{Y_n\}$ κάθε όρος της οποίας είναι \mathcal{G} -μετρήσιμη, και μάλιστα η επιλογή της ακολουθίας μπορεί να γίνει με τρόπο ώστε $Y_n \uparrow Y$ P -ς. π. Για κάθε όρο της ακολουθίας αυτής ισχύει ότι $\mathbb{E}[X Y_n | \mathcal{G}] = Y_n \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ και μπορούμε να πάρουμε το αποτέλεσμα περνώντας στο όριο $n \rightarrow \infty$. Το γιατί μπορούμε να εναλλαχουμε το όριο με την δεσμευμένη μεση τιμή θέλει λίγο προσοχή, και γι αυτούς που έχουν κάποια εμπειρία απο την θεωρία της σύγκλισης ακολουθιών τυχαίων μεταβλητών βασίζεται στο θεώρημα μονότονης σύγκλισης. \square

Παράδειγμα 1.7.6. Ας υποθέσουμε ότι X, Y τυχαίες μεταβλητές με απο κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f_{X,Y}(x, y)$. Η δεσμευμένη μεση τιμή $\mathbb{E}[X | \sigma(Y)] =: \mathbb{E}[X | Y]$ μπορεί να υπολογιστεί ως

$$\mathbb{E}[X | \sigma(Y)](\omega) =: \mathbb{E}[X | Y](\omega) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, Y(\omega)) dx}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, Y(\omega)) dx}, \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Με αυτό εννοούμε ότι αν η τυχαία μεταβλητή Y έχει πάρει την τιμή $Y(\omega) = y$ η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}[X | \sigma(Y)] =: \mathbb{E}[X | Y]$ θα πάρει την τιμή $\psi(y) := \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx}$

Η $\mathbb{E}[X | \sigma(Y)] =: \mathbb{E}[X | Y]$ θα είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\sigma(Y)$. Είναι λογικό (και αποδεικνύεται μαθηματικά - είναι ένα κλασσικό αποτέλεσμα των μετροθεωρητικών πιθανοτήτων που ονομάζεται λήμμα των Doob και Dynkin) να θεωρήσουμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε αυτή την τυχαία μεταβλητή την οποία θα συμβολίσουμε Z για ευκολία ως $Z = \mathbb{E}[X | \sigma(Y)] = \psi(Y)$ όπου $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια ντετερμινιστική πραγματική συναρτηση. Απο τον ορισμό της δεσμευμένης μεσης τιμής θα πρέπει να ισχύει $\int_A X dP = \int_A Z dP$ για κάθε $A \in \sigma(Y)$. Απο τον ορισμό της $\sigma(Y)$ για κάθε $A \in \sigma(Y)$ υπάρχει $E \subset \mathbb{R}$ ($E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$)

τέτοιο ώστε $Y(\omega) \in E$ για κάθε $\omega \in A$. Εφοσον $f_{X,Y}$ είναι η απο κοινού συναρτηση κατανομής των X και Y έχουμε οτι

$$(1.8) \quad \int_A X dP = \int_E \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_E \left(\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy,$$

ενώ, απο την υπόθεση ότι $Z = \psi(Y)$ έχουμε οτι

$$(1.9) \quad \int_A Z dP = \int_E \int_{\mathbb{R}} \psi(y) f_{X,Y}(x, y) dx dy = \int_E \psi(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy.$$

Εφοσον το $A \in \sigma(Y)$ είναι αυθαίρετο θα είναι αυθαίρετο και το $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Συγκρίνοντας τις (1.8) και (1.9) καταλήγουμε ότι

$$(1.10) \quad \int_E \left(\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy = \int_E \psi(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy, \quad \forall E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

οπότε

$$\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx = \psi(y) \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx,$$

και συνεπώς

$$\psi(y) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx}, \quad \sigma.π \ y \in \mathbb{R}.$$

Μπορούμε να αναγνωρίσουμε τον παρονομαστή σαν την πυκνότητα κατανομής πιθανότητας της Y , $f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx$ ή αλλιώς την περιθώρια κατανομή της Y , οπότε ορίζοντας την συνάρτηση

$$f_{X,Y}(x | y) := \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)},$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\psi(y) = \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x | y) dx.$$

Παράδειγμα 1.7.7. Στα πλαίσια του παραδείγματος 1.7.6 επαληθεύστε οτι $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X | Y]] = \mathbb{E}[X]$.

Για ευκολία στον συμβολισμό θα χρησιμοποιήσουμε το $Z := \mathbb{E}[X | Y]$. Αυτή είναι μια τυχαία μεταβλητή

$$Z = \psi(Y) = \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, Y) dx}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, Y) dx}.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[\psi(Y)] = \int_{\mathbb{R}} \psi(y) f_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}} \psi(y) \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx}{\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx} \left(\int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x, y) dx \right) dy = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} x f_{X,Y}(x, y) dx dy = \mathbb{E}[X]. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 1.7.8. Ας υποθέσουμε οτι $X_1, X_2, X_3, \dots : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές, και $N : \Omega \rightarrow \mathbb{N}$ είναι επίσης μια τυχαία μεταβλητή ανεξάρτητη των X_i . Ορίζουμε την νέα τυχαία μεταβλητή $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ως εξής

$$Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega).$$

Υπολογίστε την μέση τιμή $\mathbb{E}[Y]$.

Θα χρησιμοποιήσουμε την δεσμευμένη μεση τιμή $Z := \mathbb{E}[Y | \sigma(N)] =: \mathbb{E}[Y | N]$. Αν επιλέξουμε $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε $N(\omega) = n$ έχουμε ότι $Y(\omega) = \sum_{i=1}^{N(\omega)} X_i(\omega) = \sum_{i=1}^n X_i(\omega)$. Κατα συνέπεια αν $\omega \in \Omega$ τέτοιο ώστε $N(\omega) = n$, ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[Z | N](\omega) = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^n X_i(\omega)\right] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i] = n \mathbb{E}[X_1] = N(\omega)\mathbb{E}[X_1],$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και την πληροφορία ότι οι X_i είναι ισονομες δηλαδή $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_i]$ για κάθε i .¹
Όμως,

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y | N]] = \mathbb{E}[N(\omega)\mathbb{E}[X_1]] = \mathbb{E}[X_1]\mathbb{E}[N].$$

Το παράδειγμα αυτό βρίσκει μεγάλες εφαρμογές στα ασφαλιστικά μαθηματικά. Ας υποθέσουμε ότι σε συγκεκριμένο χρονικό ορίζοντα T , η τυχαία μεταβλητή N μοντελοποιεί το πλήθος των αιτήσεων για κάλυψη ζημιών που καλείται να καλύψει η εταιρεία και X_i είναι η τυχαία μεταβλητή που μοντελοποιεί το μεγεθος της κάθε ζημιάς. Η τυχαία μεταβλητή Y είναι το συνολικό κόστος των αποζημιώσεων που καλείται να καλύψει η εταιρεία μέσα στον χρονικό ορίζοντα T . Τυπικό παράδειγμα αποτελεί η περίπτωση όπου $N \sim \text{Pois}(\lambda)$ και $Y_i \sim \text{Pareto}(\gamma)$.

Παράδειγμα 1.7.9. Ας πάρουμε μια συλλογή ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων μεταβλητών X_1, X_2, \dots, X_n . Υπολογίστε την $\mathbb{E}[X_i | \sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n)]$ για κάθε i .

Λόγω συμμετρίας επειδή οι X_i είναι ισόνομες θα πρέπει να έχουμε ότι $Z := \mathbb{E}[X_i | \sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n)]$ για κάθε i . Προσθέτοντας τις σχέσεις αυτές παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned} nZ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[X_i | \sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n)] = \mathbb{E}[X_1 + X_2 + \dots + X_n | \sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n)] \\ &= X_1 + X_2 + \dots + X_n, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά την γραμμικότητα της δεσμευμένης μέσης τιμής και το ότι η τυχαία μεταβλητή $X_1 + X_2 + \dots + X_n$ είναι μετρησιμη ως προς την $\sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n)$. Καταλήγουμε λοιπόν ότι

$$Z = \mathbb{E}[X_i | \sigma(X_1 + X_2 + \dots + X_n)] = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \dots + X_n).$$

Παράδειγμα 1.7.10. Ρίχνουμε διαδοχικά 2 τιμιά νομισματα και ποντάρουμε 1 ευρώ στην κορώνα. Έστω X_1 το κέρδος απο το πρώτο νομισμα και X_2 το κέρδος απο το δεύτερο. Υπολογίστε την $\mathbb{E}[X_1 + X_2 | X_1]$.

Έχουμε ότι

$$\mathbb{E}[X_1 + X_2 | X_1] = \mathbb{E}[X_1 | X_1] + \mathbb{E}[X_2 | X_1] = X_1 + \mathbb{E}[X_2] = X_1.$$

Παράδειγμα 1.7.11. Ας υποθέσουμε ότι επάνω στον δειγματικό χώρο (Ω, \mathcal{F}) έχουμε δύο διαφορετικά μετρα πιθανότητας P_1 και P_2 και $\frac{dP_1}{dP_2} = Y$, όπου $Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή, εν γένει μετρήσιμη ως προς την \mathcal{F} , τέτοια ώστε $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$. Αν $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή μετρήσιμη ως προς την \mathcal{F} και $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$, δείξτε ότι

$$\mathbb{E}_{P_1}[X | \mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_{P_2}[XY | \mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{P_2}[Y | \mathcal{G}]}.$$

Για να διευκολύνουμε τον συμβολισμό, ας ονομάσουμε $Z_2 := \mathbb{E}_{P_2}[Y | \mathcal{G}]$ και $Z := \mathbb{E}_{P_2}[XY | \mathcal{G}]$. Απο τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής $Z := \mathbb{E}_{P_2}[XY | \mathcal{G}]$, έχουμε ότι για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{G}$,

$$(1.11) \quad \int_A Z dP_2 = \int_A XY dP_2 = \int_A X \frac{dP_1}{dP_2} dP_2 = \int_A X dP_1,$$

όπου για την τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μετρου. Απο την άλλη απο τον ορισμό της δεσμευμένης μεσης τιμής $Z_1 := \mathbb{E}_{P_1}[X | \mathcal{G}]$ έχουμε ότι

$$(1.12) \quad \int_A X dP_1 = \int_A Z_1 dP_1 = \int_A Z_1 \frac{dP_1}{dP_2} dP_2 = \int_A Z_1 Y dP_2$$

¹ Αν τυχόν έχετε απορία το πως βγήκε αυτό, σκεφτείτε ότι η Y είναι μετρησιμη ως προς την σ -άλγεβρα $\mathcal{G} = \sigma(N, Y_1, Y_2, \dots)$ και η σ -άλγεβρα $\mathcal{F} = \sigma(N)$ είναι υπο-άλγεβρα της, δηλαδή $\mathcal{F} \subset \mathcal{G}$. Επίσης, η \mathcal{G} μπορεί να σπάσει σε δύο κομμάτια, το κομμάτι που περιέχει πληροφορία για το N και το κομμάτι που περιέχει πληροφορία για τα Y_i και τα δύο αυτά είναι ανεξάρτητα.

όπου για την τελευταία σχέση ξαναχρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μετρου. Συγκρίνοντας τις (1.11) και (1.12) καταλήγουμε στο ότι

$$(1.13) \quad \int_A Z dP_2 = \int_A Z_1 Y dP_2, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Η τυχαία μεταβλητή $Z_1 Y$ είναι αν γένει \mathcal{F} -μετρήσιμη ενώ η Z είναι \mathcal{G} -μετρήσιμη. Η (1.13) λοιπόν μας δίνει ότι $Z = \mathbb{E}_{P_2}[Z_1 Y | \mathcal{G}]$. Επειδή όμως η Z_1 είναι \mathcal{G} -μετρήσιμη, ισχύει ότι $\mathbb{E}_{P_2}[Z_1 Y | \mathcal{G}] = Z_1 \mathbb{E}_{P_2}[Y | \mathcal{G}]$. Συνδυάζοντας αυτά έχουμε ότι $Z = Z_1 \mathbb{E}_{P_2}[Y | \mathcal{G}]$ δηλαδή ότι

$$\mathbb{E}_{P_2}[XY | \mathcal{G}] = \mathbb{E}_{P_1}[X | \mathcal{G}] \mathbb{E}_{P_2}[Y | \mathcal{G}],$$

απο το οποίο και προκύπτει το ζητούμενο.

1.8 Η δεσμευμένη μεση τιμή ως η καλύτερη πρόβλεψη

Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε τώρα ότι η δεσμευμένη μεση τιμή είναι η καλύτερη πρόβλεψη σχετικά με μια τυχαία μεταβλητή δεδομένης της πληροφορίας που μας αποκαλύπτει η συγκεκριμένη τυχαία μεταβλητή.

Για τον σκοπό αυτό ας δούμε πρώτα την περίπτωση όπου έχουμε την δεσμευμένη μέση τιμή ως προς μία διαμεριση του δειγματικού χωρου Ω .

Πρόταση 1.8.1. Έστω Ω ένας δειγματικός χωρος και $\Delta = \{A_1, \dots, A_n\}$ μια διαμέριση του. Έστω $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ μια τυχαία μεταβλητή η οποία για την πλήρη της περιγραφή χρειάζεται μια πιο λεπτή διαμέριση απο την Δ π.χ. την $\Delta' = \{B_1, B_2, \dots, B_n, B_{n+1}, \dots, B_m\}$. Η καλύτερη προσέγγιση της X απο μια τυχαία μεταβλητή U που παράγει την διαμέριση Δ είναι η $\mathbb{E}[X | \Delta]$ υπο την έννοια ότι ελαχιστοποιει το μεσο τετραγωνικο σφάλμα $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$, δηλαδή

$$\mathbb{E}[(X - Z)^2] = \min_{Y \in \sigma(\Delta)} \mathbb{E}[(Y - Z)^2],$$

και με $\sigma(\Delta)$ συμβολίζουμε το συνολο των τυχαιων μεταβλητων που παράγουν την διαμέριση Δ .

Το συνολο $\sigma(\Delta)$ δεν είναι τιποτε άλλο απο το συνολο των τυχαίων μεταβλητών την μορφής

$$Y = x_1 \mathbf{1}_{A_1} + x_2 \mathbf{1}_{A_2} + \dots + x_n \mathbf{1}_{A_n}$$

δηλαδή μπορεί να το 'ταυτίσουμε' με το συνολο των διατεταγμενων n -άδων (x_1, x_2, \dots, x_n) για οποιαδήποτε $x_i \in \mathbb{R}$. Θα μπορούσαμε λοιπόν να θεωρήσουμε το $\sigma(\Delta)$ σαν ισοδύναμο με το $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{R}\}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στην ιδιότητα που έχει η δεσμευμένη μεση τιμή ότι αν $Z = \mathbb{E}[X | \Delta]$ τότε $\mathbb{E}[Z \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[X \mathbf{1}_{A_i}]$ για κάθε $A_i \in \Delta$. Την σχέση αυτή μπορούμε να την ξαναγράψουμε χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της μεσης τιμής ως

$$\mathbb{E}[(Z - X) \mathbf{1}_{A_i}] = 0, \quad \text{για κάθε } A_i \in \Delta.$$

Οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή Y' η οποία παράγει την Δ μπορεί να γραφεί με την μορφή $Y' = y'_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + y'_n \mathbf{1}_{A_n}$ για αυθαιρετα (ντετερμινιστικά) $y'_i \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε οτι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - Z)Y'] &= \mathbb{E}[(X - Z)(y'_1 \mathbf{1}_{A_1} + \dots + y'_n \mathbf{1}_{A_n})] = \mathbb{E}[y'_1 (X - Z) \mathbf{1}_{A_1} + \dots + y'_n (X - Z) \mathbf{1}_{A_n}] \\ &= y'_1 \mathbb{E}[(X - Z) \mathbf{1}_{A_1}] + \dots + y'_n \mathbb{E}[(X - Z) \mathbf{1}_{A_n}] = y'_1 0 + \dots + y'_n 0 = 0. \end{aligned}$$

Άρα, $\mathbb{E}[(X - Z)Y'] = 0$, για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή Y' η οποία παράγει την διαμέριση Δ .

Ας πάρουμε τώρα μια οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή Y η οποία παράγει την Δ . Όμως, $(X - Y)^2 = (X - Z + Z - Y)^2 = (X - Z)^2 + (Z - Y)^2 + 2(X - Z)(Z - Y)$ και

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[(X - Z)^2] + \mathbb{E}[(Z - Y)^2] + 2\mathbb{E}[(X - Z)(Z - Y)] = \mathbb{E}[(X - Z)^2] + \mathbb{E}[(Z - Y)^2] + 2\mathbb{E}[(X - Z)Y']$$

όπου $Y' = Z - Y$. Εφόσον οι Z και Y παράγουν τη διαμέριση Δ και η τυχαία μεταβλητή $Y' = Z - Y$ παράγει την διαμέριση Δ οπότε $\mathbb{E}[(X - Z)Y'] = 0$. Συνεπώς,

$$(1.14) \quad \mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[(X - Z)^2] + \mathbb{E}[(Z - Y)^2] \geq \mathbb{E}[(X - Z)^2], \quad \text{για κάθε } Y \in \sigma(\Delta)$$

επειδή $\mathbb{E}[(Z - Y)^2] \geq 0$. Η (1.14) μας εξασφαλίζει το ζητούμενο. \square

Το παραπάνω μπορεί να γενικευθεί και για την δεσμευμένη μεση τιμή ως προς οποιαδήποτε σ-άλγεβρα.

Πρόταση 1.8.2. Άς πάρουμε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, \mathcal{F}, P) και μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, μετρήσιμη ως προς την \mathcal{F} . Άς πάρουμε επίσης και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ και την τυχαία μεταβλητή $Z := \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$. Αν $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ τότε ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[(X - Z)^2] = \min_{Y \in m(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - Y)^2],$$

όπου με $m(\mathcal{G})$ συμβολίζουμε το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών που είναι μετρήσιμες ως προς την \mathcal{G} .
Ισχύει επίσης ότι

$$\mathbb{E}[(X - Z)Y] = 0, \quad \forall Y \in m(\mathcal{G}),$$

συμπεριλαμβανομένης και της επιλογής $Y = Z$.

Απόδειξη. Ξεκινώντας από τον ορισμό της δεσμευμένης μεσης τιμής $Z := \mathbb{E}[X | \mathcal{G}]$ έχουμε ότι

$$\int_A Z dP = \int_A X dP, \quad \forall A \in \mathcal{G},$$

το οποίο μπορεί να γραφεί και ως

$$\int_{\Omega} Z \mathbf{1}_A dP = \int_{\Omega} X \mathbf{1}_A dP, \quad \forall A \in \mathcal{G},$$

ή ισοδύναμα ως

$$\mathbb{E}[(Z - X) \mathbf{1}_A] = \int_{\Omega} (Z - X) \mathbf{1}_A dP = 0, \quad \forall A \in \mathcal{G}.$$

Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε απλή τυχαία μεταβλητή η οποία είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{G} , αυτή θα είναι της μορφής $Y_s := \sum_{i=1}^N y_i \mathbf{1}_{A_i}$ για $A_i \in \mathcal{G}$ και $y_i \in \mathbb{R}$. Από την γραμμικότητα της μέσης τιμής, έχουμε πως

$$0 = \sum_{i=1}^N y_i \mathbb{E}[(Z - X) \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[(Z - X) \sum_{i=1}^N y_i \mathbf{1}_{A_i}] = \mathbb{E}[(Z - X)Y_s],$$

συνεπώς,

$$\mathbb{E}[(Z - X)Y_s] = 0, \quad \text{για κάθε απλή τυχαία μεταβλητή } Y_s \text{ μετρήσιμη ως προς την } \mathcal{G}.$$

Όμως, γνωρίζουμε πως κάθε τυχαία μεταβλητή Y η οποία είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{G} μπορεί να προσεγγιστεί από μια ακολουθία απλών τυχαίων μεταβλητών, Y_n μετρησιμων ως προς την \mathcal{G} , υπο την έννοια ότι $Y_n \rightarrow Y$ P -ς.π. Για κάθε n έχουμε $\mathbb{E}[(Z - X)Y_n] = 0$ και περνώντας στο όριο $n \rightarrow \infty$ (και χρησιμοποιώντας π.χ. το θεώρημα μονότονης σύγκλισης εφόσον μπορούμε να προσεγγίσουμε την Y με μια μονότονη ακολουθία απλών $Y_n \uparrow Y$) καταλήγουμε ότι

$$(1.15) \quad \mathbb{E}[(Z - X)Y] = 0, \quad \text{για κάθε τυχαία μεταβλητή } Y \text{ μετρήσιμη ως προς την } \mathcal{G}.$$

Αυτό μας θυμίζει λιγάκι το θεώρημα της προβολής (και πολύ σωστά!). Άς πάρουμε οποιαδήποτε Y μετρήσιμη ως προς την \mathcal{G} και ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την ποσότητα $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$ παρεμβάλλοντας την Z . Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - Y)^2] &= \mathbb{E}[(X - Z + Z - Y)]^2 = \mathbb{E}[(X - Z)^2 + 2(X - Z)(Z - Y) + (Z - Y)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - Z)^2] + \mathbb{E}[(Z - Y)^2] + 2\mathbb{E}[(X - Z)(Z - Y)]. \end{aligned}$$

Εφόσον οι Z και Y είναι \mathcal{G} -μετρησιμες, θα είναι \mathcal{G} -μετρήσιμη και η $Z - Y$, οπότε από την (1.15) έχουμε ότι $\mathbb{E}[(X - Z)(Z - Y)] = 0$. Η παραπάνω σχέση μας δίνει λοιπόν ότι

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \mathbb{E}[(X - Z)^2] + \mathbb{E}[(Z - Y)^2] \geq \mathbb{E}[(X - Z)^2],$$

εφόσον $\mathbb{E}[(Z - Y)^2] \geq 0$ για κάθε Y μετρήσιμο ως προς \mathcal{G} . Καταλήγουμε λοιπόν πως, αν με $m(\mathcal{G})$ συμβολίζουμε το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών που είναι μετρήσιμες ως προς την \mathcal{G} ,

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] \geq \mathbb{E}[(X - Z)^2], \quad \forall Y \in m(\mathcal{G}),$$

απο το οποίο προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[(X - Z)^2] = \min_{Y \in m(\mathcal{G})} \mathbb{E}[(X - Y)^2].$$

□

Παράδειγμα 1.8.1. Έστω ότι ρίχνουμε 2 νομισματα και ποντάρουμε 1 ευρώ στην κορώνα. Ποια θα είναι η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας συνολικά μέχρι και το τέλος του παιχνιδιού αν γνωρίζουμε τι έγινε στο παιχνίδι την πρώτη ρίψη;

Οι διαδοχικές ρίψεις των δυο νομισμάτων παράγουν τις ακόλουθες διαμερίσεις του δειγματικού χώρου:

Η μηδενική ρίψη την διαμερίση $\Delta_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.

Η πρώτη ρίψη την διαμερίση $\Delta_1 = \{A_1, A_2\}$ όπου $A_1 = \{H_1H_2, H_1T_2\}$, $A_2 = \{T_1H_2, T_1T_2\}$.

Η δεύτερη ρίψη την διαμερίση $\Delta_2 = \{B_1, B_2, B_3, B_4\}$, όπου $B_1 = \{H_1H_2\}$, $B_2 = \{H_1T_2\}$, $B_3 = \{T_1H_2\}$, $B_4 = \{T_1T_2\}$.

Η διαμερίση Δ_2 είναι πιο λεπτή από την Δ_1 και η Δ_1 είναι πιο λεπτή από την Δ_0 . Αυτό προκύπτει από το ότι $A_1 = B_1 \cup B_2$ και $A_2 = B_3 \cup B_4$.

Η τυχαία μεταβλητή X μπορεί να γραφεί ως

$$X = 2\mathbf{1}_{B_1} + 0\mathbf{1}_{B_2} + 0\mathbf{1}_{B_3} + (-2)\mathbf{1}_{B_4}$$

Ας πάρουμε τώρα οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή Y η οποία παράγει την διαμερίση $\sigma(\Delta_1)$. Αυτή θα είναι της μορφής

$$Y = x_1\mathbf{1}_{A_1} + x_2\mathbf{1}_{A_2}$$

όπου x_1, x_2 αυθαίρετοι πραγματικοί αριθμοί. Θα πρέπει να βρούμε τα x_1, x_2 κατά τρόπο ώστε να ελαχιστοποιείται η ποσότητα $\mathbb{E}[(X - Y)^2]$.

Παρατηρούμε ότι $\mathbf{1}_{A_1} = \mathbf{1}_{B_1 \cup B_2} = \mathbf{1}_{B_1} + \mathbf{1}_{B_2}$ και $\mathbf{1}_{A_2} = \mathbf{1}_{B_3 \cup B_4} = \mathbf{1}_{B_3} + \mathbf{1}_{B_4}$ (εφόσον $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ και $B_3 \cap B_4 = \emptyset$). Κατά συνέπεια,

$$Y = x_1\mathbf{1}_{A_1} + x_2\mathbf{1}_{A_2} = x_1(\mathbf{1}_{B_1} + \mathbf{1}_{B_2}) + x_2(\mathbf{1}_{B_3} + \mathbf{1}_{B_4}) = x_1\mathbf{1}_{B_1} + x_1\mathbf{1}_{B_2} + x_2\mathbf{1}_{B_3} + x_2\mathbf{1}_{B_4},$$

οπότε

$$X - Y = (2 - x_1)\mathbf{1}_{B_1} + (0 - x_1)\mathbf{1}_{B_2} + (0 - x_2)\mathbf{1}_{B_3} + (-2 - x_2)\mathbf{1}_{B_4}$$

και

$$\begin{aligned} (X - Y)^2 &= (2 - x_1)^2\mathbf{1}_{B_1} + (0 - x_1)^2\mathbf{1}_{B_2} + (0 - x_2)^2\mathbf{1}_{B_3} + (-2 - x_2)^2\mathbf{1}_{B_4} \\ &= (2 - x_1)^2\mathbf{1}_{B_1} + x_1^2\mathbf{1}_{B_2} + x_2^2\mathbf{1}_{B_3} + (-2 - x_2)^2\mathbf{1}_{B_4}, \end{aligned}$$

οπότε

$$\mathbb{E}[(X - Y)^2] = \frac{1}{4}(2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}(2 + x_2)^2$$

Αυτό είναι μια ποσότητα που εξαρτάται από τα x_1, x_2 τα οποία πρέπει να επιλεγούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί η ποσότητα αυτή. Αυτό είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα ελαχιστοποίησης για την συνάρτηση $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{4}(2 - x_1)^2 + \frac{1}{4}x_1^2 + \frac{1}{4}x_2^2 + \frac{1}{4}(2 + x_2)^2$$

Για να υπολογίσουμε το ελάχιστο θα πρέπει να ψάξουμε ανάμεσα στα κρίσιμα σημεία της συναρτησης αυτής, και λόγω της κυρτότητας της έχουμε ότι τα κρίσιμα σημεία θα είναι και ελάχιστα. Τα κρίσιμα σημεία δίνονται απο την λύση του συστήματος

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2) &= -\frac{1}{2}(2 - x_1) + \frac{1}{2}x_1 = x_1 - 1 = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2) &= \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}(2 + x_2) = x_2 + 1 = 0,\end{aligned}$$

δηλαδή $x_1^* = 1$, $x_2^* = -1$. Συνεπώς,

$$Z = \mathbb{E}[X \mid \Delta_1] = x_1^* \mathbf{1}_{A_1} + x_2^* \mathbf{1}_{A_2} = (+1)\mathbf{1}_{A_1} + (-1)\mathbf{1}_{A_2}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας λέει οτι η καλύτερη μας πρόβλεψη για το κέρδος απο την ρίψη των δυο νομισματων δεδομένου του αποτελέσματος του πρώτου νομίσματος, θα είναι 1 αν το πρώτο νομισμα φέρει κορώνα και -1 αν το πρώτο νομισμα φέρει γράμματα.

Παράδειγμα 1.8.2. Ας υποθέσουμε το ακόλουθο υποδειγμα για την εξελιξη των τιμων μιας μετοχής στο χρηματιστήριο αξιών. Η τιμή της μετοχής μεταβάλλεται σε διακριτούς χρονους (π.χ. κάθε μερα) και ας ονομάσουμε S_n την τιμή της μετοχης την χρονική στιγμή n . Κάθε χρονικη περίοδο η αξία (τιμή) της μετοχής μπορεί είτε να μεταβληθει κατά u σε σχέση με την προηγούμενη

Παράδειγμα 1.8.3 (Εκτιμητές κατά Bayes). Ας υποθέσουμε οτι έχουμε δεδομένα $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ που η κατανομή τους εξαρτάται απο μια τυχαία παράμετρο θ , η οποία θεωρούμε ότι ακολουθει μια κατανομή πιθανότητας (εκ των προτέρων κατανομή -a priori distribution). Ο σκοπός μας είναι να καθορίσουμε απο τα δεδομένα (τις παρατηρήσεις μας) την τιμή του θ . Η εκτιμήτρια θα πρέπει να είναι (προφανώς) μια συνάρτηση των δεδομένων, έστω $\psi(X) = \psi(X_1, X_2, \dots, X_n)$ τέτοια ώστε να ελαχιστοποιεί το μέσο τετραγωνικό σφάλμα, δεδομένων όμως των παρατηρησεων μας, δηλαδή θα πρέπει να επιλέξουμε αυτή την συνάρτηση $\psi(X)$ για την οποία θα ελαχιστοποιείται το $\mathbb{E}[(\psi(X) - \theta)^2 \mid \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)]$. Απο την παραπάνω συζητηση προκύπτει οτι η εκτιμήτρια αυτή είναι η εκτιμήτρια του Bayes, $\psi(X) = \mathbb{E}[\theta \mid \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)]$. Επιπλέον, η εκτιμήτρια αυτή έχει την ιδιότητα $\mathbb{E}[\psi(X) \mid \sigma(\theta)] = \theta$. αν και μονο αν $\mathbb{E}[\theta \mid \sigma(X)] = \theta$ με πιθανότητα 1. Με άλλα λόγια η εκτιμήτρια του Bayes είναι αμερόληπτη αν και μονο αν $\mathbb{E}[\theta \mid \sigma(X)] = \theta$ με πιθανότητα 1.

Το οτι η εκτιμήτρια θα πρέπει να είναι η $\mathbb{E}[\theta \mid \sigma(X_1, X_2, \dots, X_n)]$ είναι άμεσο αποτέλεσμα του οτι η δεσμευμενη μέση τιμή είναι η καλύτερη εκτιμήτρια με την έννοια της ελαχιστοποίησης του μεσου τετραγωνικού σφάλματος. Για να δείξουμε τώρα τον ισχυρισμο μας σχετικά με την αμεροληψία, αρκεί να δείξουμε οτι αν $\mathbb{E}[\psi(X) \mid \sigma(\theta)] = \theta$, τότε αναγκαστικά $\mathbb{E}[(\theta - \mathbb{E}[\theta \mid \sigma(X)])^2] = 0$.

Για να απλοποιήσουμε λίγο τον συμβολισμό ας γράψουμε $Z := \mathbb{E}[\theta \mid \sigma(X)]$. Παρατηρούμε οτι $\mathbb{E}[(\theta - Z)Z] = 0$ (όπως προκύπτει απο τις ιδιότητες της προβολής). Με παρόμοιο τρόπο αν γράψουμε $Y := \mathbb{E}[\psi(X) \mid \sigma(\theta)]$ έχουμε πως $\mathbb{E}[(\psi(X) - Y)Y] = 0$ και αν υποθέσουμε πως $Y = \theta$ η σχέση αυτη μας δίνει $\mathbb{E}[(\psi(X) - \theta)\theta] = 0$. Προσθέτοντας τις δυο αυτές σχέσεις έχουμε πως

$$0 = \mathbb{E}[(\theta - Z)Z] + \mathbb{E}[(\psi(X) - \theta)\theta] = \mathbb{E}[(\theta - Z)Z + (\psi(X) - \theta)\theta] = \mathbb{E}[-(\theta - Z)^2],$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και την παρατήρηση οτι $Z = \psi(X)$.

Παράδειγμα 1.8.4. Δείξτε οτι αν $Z := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ τότε $\mathbb{E}[Z^2] \leq \mathbb{E}[X^2]$.

Γνωρίζουμε οτι $\mathbb{E}[(X - Z)Z] = 0$. Αυτό μας δίνει ισοδύναμα οτι

$$(1.16) \quad \mathbb{E}[XZ] = \mathbb{E}[Z^2].$$

Απο την ανισότητα Cauchy - Schwartz έχουμε οτι

$$(1.17) \quad \mathbb{E}[XZ] \leq |\mathbb{E}[XZ]| \leq \mathbb{E}[|XZ|] \leq (\mathbb{E}[X^2])^{1/2} (\mathbb{E}[Z^2])^{1/2}.$$

Συνδυάζοντας τις (1.16) και (1.17) καταλήγουμε οτι

$$\mathbb{E}[Z^2] \leq (\mathbb{E}[X^2])^{1/2} (\mathbb{E}[Z^2])^{1/2},$$

και διαιρώντας και τα 2 μελη με $(\mathbb{E}[Z^2])^{1/2}$ καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Παράδειγμα 1.8.5. Το παραπάνω ισχυει και γενικότερα, δηλαδή, αν $Z_1 := \mathbb{E}[X_1 \mid \mathcal{G}]$ και $Z_2 := \mathbb{E}[X_2 \mid \mathcal{G}]$, τότε $\mathbb{E}[|Z_1 - Z_2|^2] \leq \mathbb{E}[|X_1 - X_2|^2]$.

Κεφάλαιο 2

Διαδικασίες *martingale*

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με μία ειδική κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις διαδικασίες *martingale*, οι οποίες παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην σύγχρονη θεωρία πιθανοτήτων, την στοχαστική ανάλυση και τις εφαρμογές της. Επίσης οι διαδικασίες *martingale* είναι πολύ σημαντικές στα μαθηματικά υποδείγματα της χρηματοοικονομικής. Η θεωρία των *martingales* είναι ιδιαίτερα εκτενής και στα πλαίσια του βιβλίου αυτού θα αρχεστούμε να παραθέσουμε τις βασικές ιδιότητες τους, συχνά χωρίς απόδειξη, τις οποίες θα χρειαστούμε στην ανάπτυξη των θεμάτων που μας ενδιαφέρουν.

Αν και το μεγαλύτερο μέρος της μαθηματικής θεωρίας των *martingales* οφείλεται στον Αμερικανό πιθανοθεωρητικό Doob, η βασική ιδέα ήταν γνωστή αρκετά νωρίτερα, ίσως ακόμα και από την εποχή του Bachelier στις αρχές του 20ου αιώνα.

2.1 Ορισμός των *martingale*

Ας ορίσουμε πρώτα την έννοια της **διήθησης** (filtration).

Ορισμός 2.1.1. Μία **διήθηση** (filtration) είναι μία οικογένεια από σ -άλγεβρες \mathcal{F}_t τέτοια ώστε

$$s \leq t \implies \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

Όπως αναφέραμε και στα προηγούμενα κεφάλαια, η σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία η οποία είναι διαθέσιμη μέχρι την χρονική στιγμή t . Μία διήθηση μπορεί να θεωρηθεί απλά σαν μία αυξανόμενη δομή πληροφορίας καθώς περνάει ο χρόνος. Μία αρκετά συνηθισμένη έννοια είναι η έννοια της **φυσικής διήθησης**. Αυτή είναι η διήθηση η οποία παράγεται από μία στοχαστική διαδικασία X_t . Όσο περνάει ο χρόνος και παρατηρούμε την εν λόγω στοχαστική διαδικασία τόσο αυξάνει και η πληροφορία που έχουμε στην διάθεση μας για την διαδικασία αυτή.

Στην συνέχεια θα ορίσουμε την έννοια των **προσαρμοσμένων** (adapted) τυχαίων μεταβλητών.

Ορισμός 2.1.2. Μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών X_t ονομάζεται **προσαρμοσμένη** στην διήθηση \mathcal{F}_t αν η X_t είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη για κάθε t .

Με λόγια αυτό σημαίνει ότι όλη η πληροφορία η οποία αφορά την στοχαστική μεταβλητή X_t μέχρι την χρονική στιγμή t περιέχεται στην σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t . Από τον ίδιο τον ορισμό της φυσικής διήθησης μπορούμε να δούμε ότι μία στοχαστική διαδικασία X_t είναι προσαρτημένη στην φυσική της διήθηση.

Έχοντας ορίσει τις παραπάνω έννοιες μπορούμε τώρα να ορίσουμε μία ενδιαφέρουσα ειδική κατηγορία τυχαίων μεταβλητών (ή στοχαστικών διαδικασιών) τις *martingale* καθώς και τις συναφείς με αυτές *supermartingale* και *submartingale*.

Ορισμός 2.1.3. Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας χώρος πιθανοτήτων, \mathcal{F}_t μία διήθηση στην \mathcal{F} ($\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$) και X_t μία οικογένεια πραγματικών, ολοκληρώσιμων ($E[|X_t|] < \infty$) τυχαίων μεταβλητών που είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση \mathcal{F}_t .

(i) Η οικογένεια X_t είναι μία **martingale** αν

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad \sigma.β. \quad s \leq t.$$

(ii) Η οικογένεια X_t είναι μία **supermartingale** αν

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s \text{ σ.β. } s \leq t.$$

(iii) Η οικογένεια X_t ονομάζεται μία **submartingale** αν

$$E[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s \text{ σ.β. } s \leq t.$$

Σχόλιο: Το t μπορεί να είναι είτε ένας συνεχής δείκτης $t \in \mathbb{R}$ είτε ένας διακριτός δείκτης. Στην περίπτωση αυτή ο δείκτης θα συμβολίζεται συνήθως με n, k ή m και θα έχουμε ότι $n, k, m \in \mathbb{N}$.

Με απλά λόγια οι παραπάνω ορισμοί μας λέμε ότι για μία martingale έχοντας υπόψη μας την πληροφορία που περιέχεται στην \mathcal{F}_s η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t είναι η τιμή X_s . Αν η X_t είναι supermartingale η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην \mathcal{F}_s θα είναι μικρότερη από την τιμή X_s . Τέλος, αν η X_t είναι submartingale η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να κάνουμε για την τιμή της X_t έχοντας υπόψη την πληροφορία που περιέχεται στην \mathcal{F}_s θα είναι μεγαλύτερη από την τιμή X_s .

Η παραπάνω εικόνα γίνεται πιο καθαρή αν θεωρήσουμε την X_t σαν μία στοχαστική διαδικασία με το t να έχει την έννοια του χρόνου. Η \mathcal{F}_t μπορεί να είναι οποιαδήποτε διήθηση αλλά μία επιλογή μπορεί να είναι η φυσική διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(X_u, u \leq t)$, δηλαδή η διήθηση που παράγεται από τις τροχιές της τυχαίας διαδικασίας¹. Η \mathcal{F}_t στην περίπτωση αυτή μπορεί να θεωρηθεί σαν η πληροφορία που αποκομίζουμε για την συμπεριφορά της στοχαστικής διαδικασίας X_t παρατηρώντας την από την αρχή των χρόνων $t = 0$ ως την χρονική στιγμή t . Αν η X_t είναι martingale, έχοντας πλήρη γνώση του ότι έχει συμβεί μέχρι την χρονική στιγμή s η καλύτερη πρόβλεψη για το $X_t, t > s$ είναι η τιμή X_s δηλαδή η τελευταία της τιμή όταν τελειώσει η περίοδος της παρατήρησης. Συνεπώς για μία martingale η πληροφορία που περιέχεται στην \mathcal{F}_s δεν θα μας βοηθήσει να προβλέψουμε τίποτε σχετικά με το μέλλον της στοχαστικής διαδικασίας X_t .

Για να κάνουμε τα πράγματα ακόμα πιο απτά ας υποθέσουμε ότι η martingale X_t μπορούσε να θεωρηθεί σαν το κέρδος από κάποιο τυχερό παιχνίδι (π.χ. ρουλέτα), τότε η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας την χρονική στιγμή t έχοντας παρακολουθήσει την έκβαση του παιχνιδιού μέχρι την χρονική στιγμή s θα είναι το κέρδος που είχαμε την χρονική στιγμή s δηλαδή το X_s . Μία martingale μπορεί λοιπόν να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα τίμιο παιχνίδι. Αντίθετα, αν η X_t είναι μία supermartingale τότε η καλύτερη πρόβλεψη για το κέρδος μας έχοντας παρακολουθήσει το παιχνίδι μέχρι την χρονική στιγμή s θα είναι ότι το κέρδος μας θα μειωθεί. Συνεπώς μία supermartingale μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα μη τίμιο παιχνίδι όταν ποντάρουμε στο ενδεχόμενο που δεν ευνοείται από τον σχεδιασμό του παιχνιδιού. Τέλος αν η X_t είναι submartingale τότε η καλύτερη μας πρόβλεψη για το κέρδος μας έχοντας παρακολουθήσει το παιχνίδι μέχρι την χρονική στιγμή s θα είναι ότι το κέρδος μας θα αυξηθεί. Συνεπώς μία submartingale μπορεί να θεωρηθεί σαν το κέρδος από ένα μη τίμιο παιχνίδι αν ποντάρουμε στο ενδεχόμενο το οποίο ευνοείται από τον σχεδιασμό του παιχνιδιού. Για την πιο ακριβή παράθεση των ιδεών αυτών δείτε τα παραδείγματα 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3.

Οι martingales έχουν την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα ως προς την μέση τιμή.

Θεώρημα 2.1.1. Αν η X_t είναι μία martingale τότε

(i) $E[X_t] = E[X_0]$

(ii) $E[X_t - X_s] = 0$

Απόδειξη: Για να αποδειχθεί αυτό θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε μία από τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής και συγκεκριμένα τον νόμο της ολικής πιθανότητας. \square

Ανάλογες ιδιότητες ισχύουν και για submartingales και supermartingales με τις κατάλληλες ανισότητες στην θέση της ισότητας.

Θα παραθέσουμε τώρα μερικά παραδείγματα από στοχαστικές διαδικασίες που είναι martingale ή super- και submartingales. Τα παραδείγματα θα είναι σε διακριτό χρόνο. Παραδείγματα σε συνεχή χρόνο θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο που θα εισάγουμε την κίνηση Brown.

Παράδειγμα 2.1.1. Παράδειγμα μίας martingale

Ένα κλασικό παράδειγμα σχετικά με τις διαδικασίες martingale είναι το ακόλουθο: Ας θεωρήσουμε διαδοχικές

¹ Υπενθυμίζουμε ότι $\sigma(X_u, u \leq t)$ είναι η σ-άλγεβρα κάτω από την οποία είναι μετρήσιμες οι τυχαίες μεταβλητές X_u για $u \leq t$

ρίψεις ενός τίμιου νομίσματος (δηλαδή ένα νόμισμα που έχει ίδια πιθανότητα να φέρει κορώνα και ίδια πιθανότητα να φέρει γράμματα), και ως ορίσουμε για την n -ρίψη ($n \in \mathbb{N}$) την τυχαία μεταβλητή

$$X_n = \begin{cases} 1 & \text{κορώνα} \\ -1 & \text{γράμματα} \end{cases}$$

καθώς και την τυχαία μεταβλητή $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Αν θεωρήσουμε ένα παιχνίδι κατά το οποίο κάποιος παίκτης ποντάρει μία δραχμή στο αν θα έρθει κορώνα ή γραμματα (κερδίζει μία δραχμή αν έρθει κορώνα και χάνει μία δραχμή αν έρθουν γράμματα) τότε η μεταβλητή S_n μας δίνει την περιουσία του παίκτη την χρονική στιγμή n (θεωρώντας ότι ξεκινήσαμε με περιουσία 0).

Ας ορίσουμε σαν \mathcal{F}_n την σ -άλγεβρα που παράγεται από τις τυχαίες μεταβλητές (X_1, \dots, X_n) . Είναι φανερό (τουλάχιστον διαισθητικά) ότι η τυχαία μεταβλητή X_{n+1} είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας \mathcal{F}_n έτσι ώστε

$$\begin{aligned} E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[S_n + X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = E[S_n | \mathcal{F}_n] + E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \\ &= S_n + E[X_{n+1}] = S_n \end{aligned}$$

Στο παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή S_n είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμη. Από αυτό μπορούμε να συνάγουμε ότι $E[S_m | \mathcal{F}_n] = S_n$ για $m > n$. Εφόσον $E[|S_n|] < \infty$, η S_n είναι μία martingale ως προς την διήθηση \mathcal{F}_n . Αυτό μας λέει ότι ο παίκτης περιμένει να έχει στην $n+1$ ρίψη την ίδια περιουσία που είχε στην n ρίψη, δεδομένης της ιστορίας του παιχνιδιού.

Παράδειγμα 2.1.2. Παράδειγμα μίας supermartingale

Θα παραμείνουμε στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 με την διαφορά ότι θα υποθέσουμε πως το νόμισμα έχει παραπάνω πιθανότητα να φέρει γράμματα παρά κορώνα δηλαδή ότι $P(X_n = 1) \leq 1/2$. Τότε, επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία μπορούμε να δείξουμε ότι $E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] \leq S_n$, συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό η S_n είναι μία supermartingale. Η απόδειξη είναι πολύ απλή και αφήνεται σαν άσκηση.

Παράδειγμα 2.1.3. Παράδειγμα μίας submartingale

Θα παραμείνουμε στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 με την διαφορά ότι θα υποθέσουμε πως το νόμισμα έχει παραπάνω πιθανότητα να φέρει κορώνα παρά γράμματα δηλαδή ότι $P(X_n = 1) \geq 1/2$. Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι $E[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq S_n$, συνεπώς σύμφωνα με τον ορισμό η S_n είναι μία submartingale. Η απόδειξη είναι πολύ απλή και αφήνεται σαν άσκηση.

Τα τρία προηγούμενα παραδείγματα διασαφηνίζουν την ερμηνεία μίας martingale σαν ένα τίμιο (δίκαιο) παιχνίδι καθώς και την ερμηνεία μίας sub- ή super-martingale σαν ένα μη τίμιο παιχνίδι.

Σημαντικό Σχόλιο: Μία martingale δεν ορίζεται μόνο ως προς μία διήθηση αλλά επίσης και σε σχέση με ένα μέτρο πιθανότητας (το οποίο ουσιαστικά εμπλέκεται στον ορισμό της μέσης τιμής E). Μπορεί να συμβαίνει για κάποια διήθηση η στοχαστική διαδικασία X_t να είναι μία martingale ως προς κάποιο μέτρο πιθανότητας P ενώ να μην είναι μία martingale ως προς κάποιο άλλο μέτρο πιθανότητας Q . Συνεχίζοντας το παραπάνω συλλογισμό, μπορούμε να μετατρέψουμε μία δεδομένη στοχαστική διαδικασία X_t σε μία martingale προσαρτώντας σε αυτή το κατάλληλο μέτρο πιθανότητας (κρατώντας δηλαδή τις τροχιές της διαδικασίας ως έχουν αλλά προσαρτώντας στις τροχιές αυτές κάποια πιθανότητα να εμφανιστούν). Μπορούμε να ξεκαθαρίσουμε το παραπάνω σχόλιο στα πλαίσια του παραδείγματος που αναφέραμε. Η στοχαστική διαδικασία S_n είναι μία martingale αν σαν μέτρο πιθανότητας πάρουμε το μέτρο που ορίζεται ξεκινώντας από την υπόθεση ότι $P(H) = P(T) = \frac{1}{2}$ αλλά **δεν** είναι μία martingale αν την θεωρήσουμε ως προς το μέτρο πιθανότητας που ορίζεται ξεκινώντας από την υπόθεση ότι το νόμισμα δεν είναι τίμιο δηλαδή ως προς κάποιο μέτρο τέτοιο ώστε $Q(T) \neq Q(H)$. Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι έχουμε δεδομένη τη διαδικασία S_n (δηλαδή μία συλλογή ακολουθιών (X_1, \dots, X_n, \dots) από -1 και 1 και από αυτές κατασκευάζουμε τα επιμέρους αθροίσματα $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ παίρνοντας έτσι μία συλλογή από ακολουθίες αριθμών S_n). Η συλλογή των X_n και με την σειρά της η συλλογή των S_n είναι δεδομένες. Ας θεωρήσουμε τώρα ότι με κάποια πιθανότητα μπορούμε να επιλέξουμε στοιχεία των συλλογών αυτών. Ας φανταστούμε λοιπόν ότι η πιθανότητα επιλογής μίας ακολουθίας (X_1, \dots, X_n, \dots) που έχει οτιδήποτε στοιχείο σε οτιδήποτε θέση αλλά $+1$ στην θέση i είναι $P(X_i = 1) = p$. Η πιθανότητα επιλογής μίας ακολουθίας (X_1, \dots, X_n, \dots) που έχει οτιδήποτε στοιχείο σε οτιδήποτε θέση αλλά -1 στην θέση i είναι $P(X_i = -1) = 1 - p$. Η πιθανότητα επιλογής είναι στην διακριτική μας ευχέρεια και αυτό ουσιαστικά είναι η επιλογή του μέτρου πιθανοτήτων το οποίο προσάπτουμε στην στοχαστική διαδικασία. Αν επιλέξουμε $p = \frac{1}{2}$ τότε η X_t γίνεται μία martingale. Αν επιλέγουμε $p \neq \frac{1}{2}$, ανάλογα με την τιμή του p η ίδια ακριβώς στοχαστική διαδικασία (οι ίδιες ακριβώς τροχιές) με τις προηγούμενες μπορεί να γίνουν είτε supermartingale είτε submartingale.

Τονίζεται ότι δεν είναι πάντοτε δυνατό για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία να κατασκευάσουμε μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία να είναι martingale.

Το σχόλιο αυτό αποτελεί την βάση για ένα πολύ σημαντικό αποτέλεσμα στην θεωρία της στοχαστικής ανάλυσης (και ιδιαίτερα στην θεωρία διάχυσης), το θεώρημα Cameron-Martin-Girsanov. Το θεώρημα αυτό έχει πολλές εφαρμογές στην χρηματοοικονομική, όπως π.χ. στην μαθηματική θεωρία της αποτίμησης χρεογράφων (asset pricing). Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό με περισσότερη λεπτομέρεια στην συνέχεια.

Συνεχίζουμε με παράθεση μερικών ακόμη χρήσιμων παραδειγμάτων.

Παράδειγμα 2.1.4. Έστω Z τυχαία μεταβλητή, η οποία ορίζεται σε κάποιο χώρο πιθανοτήτων (Ω, \mathcal{F}, P) , η οποία είναι ολοκληρώσιμη ($E[|Z|] < \infty$) και μία διήθηση $\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$. Αν ορίσουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (δηλαδή την στοχαστική διαδικασία) $X_n = E[Z | \mathcal{F}_n]$, η X_n είναι martingale.

Η απόδειξη, που χρησιμοποιεί τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής, αφήνεται σαν άσκηση. Αντίστοιχο αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί και όταν ο δείκτης είναι συνεχής ($t \in \mathbb{R}$)

Παράδειγμα 2.1.5. Έστω μία ακολουθία από ανεξάρτητες όμοια κατανομημένες (independent identically distributed (i.i.d.)) τυχαίες μεταβλητές $(Y_i), i = 1, 2, \dots$ για τις οποίες ισχύει $E[Y_i] = 0, E[Y_i^2] = \sigma^2, i = 1, 2, \dots$. Ας ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή $X_0 = 0, X_n = (\sum_{k=1}^n Y_k)^2 - n\sigma^2$. Τότε η $X_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μία martingale ως προς την διήθηση που παράγεται από τις μεταβλητές Y_n και την οποία ας συμβολίσουμε $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$.

Η απόδειξη έχει ως εξής. Πρώτα βλέπουμε ότι $E[|X_n|] \leq 2n\sigma^2 < \infty$. Παίρνοντας την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{F}_n έχουμε

$$\begin{aligned} E[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[(Y_{n+1} + \sum_{k=1}^n Y_k)^2 - (n+1)\sigma^2 | \mathcal{F}_n] \\ &= E[Y_{n+1}^2 + 2Y_{n+1} \sum_{k=1}^n Y_k + X_n - \sigma^2 | \mathcal{F}_n] \\ &= E[Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] + 2 \sum_{k=1}^n Y_k E[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] + X_n - \sigma^2 \\ &= X_n \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την ιδιότητα martingale για την τυχαία μεταβλητή X_n . Σημειώστε ότι χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_n και $\sum_{k=1}^n Y_k$ είναι \mathcal{F}_n -μετρήσιμες (αφού εξαρτώνται μόνο από τις Y_1, \dots, Y_n), έτσι ώστε να μπορέσουμε εξάγουμε από την υπό συνθήκη πιθανότητα ως προς την σ -άλγεβρα αυτή. Χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός ότι οι Y_k είναι ανεξάρτητες, συνεπώς λοιπόν και Y_{n+1} ανεξάρτητη της \mathcal{F}_n , για να πάρουμε ότι

$$\begin{aligned} E[Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] &= E[Y_{n+1}^2] = \sigma^2 \\ E[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= E[Y_{n+1}] = 0. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.1.6. Η διαδικασία martingale του Wald

Στο ίδιο πλαίσιο με το προηγούμενο παράδειγμα ας ορίσουμε την τυχαία μεταβλητή $X_0 = 0, X_n = \phi(\lambda)^{-n} \exp(\lambda(Y_1 + \dots + Y_n))$ όπου $\phi(\lambda) = E[\exp(\lambda Y_k)], k = 1, 2, \dots$. Τότε η $X_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$.

Η απόδειξη αφήνεται σαν άσκηση.

Θα κλείσουμε αυτό τον κύκλο παραδειγμάτων με μία πολύ χρήσιμη κατηγορία martingales. Αυτές μπορεί να παραχθούν από κάποια δεδομένη martingale μέσω ενός μετασχηματισμού, του μετασχηματισμού martingale. Η γενίκευση του μετασχηματισμού αυτού σε συνεχή χρόνο θα αποτελέσει την βάση της μελέτης του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Παράδειγμα 2.1.7. Ο μετασχηματισμός martingale

Έστω X_n μία martingale ως προς ένα μέτρο πιθανότητας P και μία διήθηση \mathcal{F}_n και ας θεωρήσουμε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών a_n , τέτοια ώστε $a_n(\omega)$ φραγμένη για κάθε $n, n \in \mathbb{N}$ και $a_n \in \mathcal{F}_{n-1}$. Τυχαίες μεταβλητές

που ικανοποιούν τις συνθήκες που ικανοποιούν οι a_n ονομάζονται **προβλέψιμες**. Ας κατασκευάσουμε τώρα την στοχαστική διαδικασία

$$\bar{X}_n := (X \bullet a)_n := \sum_{i=1}^n a_i (X_i - X_{i-1}) = a_1 (X_1 - X_0) + \dots + a_n (X_n - X_{n-1})$$

Η \bar{X}_n ονομάζεται ο μετασχηματισμός *martingale* της X_t και είναι και αυτή *martingale*.

Για αν το δούμε αυτό αρκεί να υπολογίσουμε το $E[\bar{X}_n | \mathcal{F}_{n-1}]$ και να δείξουμε ότι ισούται με \bar{X}_{n-1} . Στην απόδειξη παίζει σημαντικό ρόλο το ότι η a_n είναι προβλέψιμη. Μετά αρκεί να εργαστούμε επαγωγικά για να δείξουμε ότι

$$E[\bar{X}_n | \mathcal{F}_m] = \bar{X}_m, \text{ για } m < n.$$

Παράδειγμα 2.1.8. Στα πλαίσια του παραπάνω παραδείγματος ας θεωρήσουμε ότι η X_n είναι *super(sub)martingale* και η στοχαστική διαδικασία a_n είναι προβλέψιμη και επιπλέον $a_n \geq 0$. Τότε η στοχαστική διαδικασία

$$\bar{X}_n := (X \bullet a)_n := \sum_{i=1}^n a_i (X_i - X_{i-1}) = a_1 (X_1 - X_0) + \dots + a_n (X_n - X_{n-1})$$

είναι επίσης μία *super(sub)martingale*.

Θα πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι οποιαδήποτε συνάρτηση μίας *martingale* **δεν** είναι απαραίτητα και αυτή μία *martingale* ! Το ακόλουθο θεώρημα μας δίνει ένα τρόπο κατασκευής *submartingales* από *martingales*.

Θεώρημα 2.1.2. Μία κυρτή συνάρτηση μίας *martingale* X_t είναι μία *submartingale*. Συγκεκριμένα αν X_t είναι μία *martingale* ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t και ϕ είναι μία κυρτή συνάρτηση, τότε η στοχαστική διαδικασία $M_t = \phi(X_t)$ είναι μία *submartingale* ως προς την ίδια διήθηση.

Απόδειξη: Η απόδειξη προκύπτει εύκολα από την ανισότητα του Jensen (βλ. Θεώρημα ;). Έστω ϕ μία κυρτή συνάρτηση. Τότε

$$E[\phi(X_t) | \mathcal{F}_s] \geq \phi(E[X_t | \mathcal{F}_s]) = \phi(X_s)$$

(εφόσον X_t είναι μία *martingale*). Η ανισότητα αυτή μας δείχνει ότι η στοχαστική διαδικασία M_t είναι μία *submartingale*. □

Παράδειγμα 2.1.9. Κατασκευή *submartingale* από *martingale*

Θα κινηθούμε και πάλι στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1. Εφόσον η συνάρτηση $\phi(x) = x^2$ είναι μία κυρτή συνάρτηση και η S_n είναι μία *martingale* σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα η S_n^2 θα πρέπει να είναι μία *submartingale*.

Αυτό μπορεί να επαληθευθεί εύκολα και από τον ορισμό της *submartingale* ως εξής: Μπορούμε να γράψουμε $S_n = S_{n-1} + X_n$. Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} E[S_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] &= E[S_{n-1}^2 + X_n^2 + 2S_{n-1}X_n | \mathcal{F}_{n-1}] \\ &= S_{n-1}^2 + 2S_{n-1}E[X_n] + E[X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \geq S_{n-1}^2 \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ευθέως ότι η S_n είναι *submartingale*. Στα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το ότι η S_{n-1} είναι \mathcal{F}_{n-1} μετρήσιμη, η X_n είναι ανεξάρτητη της \mathcal{F}_{n-1} , ότι $E[X_n] = 0$ και ότι εφόσον $X_n^2 \geq 0$ ισχύει ότι $E[X_n^2 | \mathcal{F}_{n-1}] \geq 0$.

2.2 Χρόνοι στάσης

Στο τμήμα αυτό θα ορίσουμε μία πολύ σημαντική κατηγορία τυχαίων χρόνων, τους **χρόνους στάσης** (stopping times).

Ορισμός 2.2.1. Έστω $(\mathcal{F}_t)_{t \in I}$ μία διήθηση σε ένα σύνολο Ω , όπου I είναι ένα σύνολο δεικτών (όχι απαραίτητα διακριτό). Ένας **χρόνος στάσης** σχετικά με τη διήθηση αυτή είναι μία απεικόνιση $T : \Omega \rightarrow I$ τέτοια ώστε

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \quad \forall t \in I$$

Από τον παραπάνω ορισμό είναι φανερό ότι η T είναι μία τυχαία μεταβλητή. Αν ο χρόνος στάσης $\tau < \infty$, σ.β. λέμε ότι ο τ είναι πεπερασμένος σ.β. Αν ισχύει ότι $\tau \leq T < \infty$ τότε λέμε ότι ο χρόνος στάσης τ είναι φραγμένος.

Αν η διήθηση \mathcal{F}_t θεωρηθεί σαν η φυσική διήθηση που παράγεται από κάποια στοχαστική διαδικασία X_t (ή πιο γενικά θεωρήσουμε ότι η \mathcal{F}_t είναι μία διήθηση που κάνει την X_t μετρήσιμη), διασθητικά μπορούμε να πούμε ότι η τυχαία μεταβλητή T είναι ένας χρόνος στάσης αν η τιμή της μπορεί να καθοριστεί από την γνώση της στοχαστικής διαδικασίας μόνο κατά το παρελθόν και δεν χρειάζεται πληροφορία από το μέλλον. Στις περισσότερες περιπτώσεις ένας χρόνος στάσης είναι η **πρώτη φορά** που θα συμβεί ένα γεγονός.

Παράδειγμα 2.2.1. Στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 ας ορίσουμε σαν $T(\omega) = \inf\{n : S_n = K\}$, δηλαδή την πρώτη φορά που ο παίκτης παίρνει K δραχμές. Τότε η τυχαία μεταβλητή $T(\omega)$ είναι ένας χρόνος στάσης.

Παράδειγμα 2.2.2. Ένας χρόνος που δεν είναι χρόνος στάσης

Στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 ας ορίσουμε σαν $T_4(\omega)$ τον χρόνο που θα πρέπει να σταματήσουμε το παιχνίδι έτσι ώστε να είμαστε ακριβώς 4 ρίψεις πριν φτάσουμε στο ποσό των K δραχμών. Ο χρόνος αυτός δεν είναι χρόνος στάσης δεν μπορούμε να ξέρουμε ποιος θα είναι ο χρόνος αυτός παρά μόνο αφού θα τον έχουμε περάσει. Πιο συγκεκριμένα (αν γινόταν να ταξιδεύουμε στο παρελθόν και στο μέλλον) θα έπρεπε να φτάναμε στο ποσό K (το οποίο θα γίνει σε μια χρονική στιγμή $\tau(\omega) > T_4(\omega)$ και μόνο τότε θα μπορούσαμε να καθορίσουμε τον $T_4(\omega) = \tau(\omega) - 4$. Μιά και ο $\tau(\omega)$ είναι χρόνος στάσης βλέπουμε ότι η τυχαία μεταβλητή T_4 απαιτεί γνώση του μέλλοντος γιατί $\{T_4 \leq t\} \notin \mathcal{F}_t$.

Παράδειγμα 2.2.3. Χρόνοι εισόδου και εξόδου σε κάποιο σύνολο

Κάτω από ορισμένες σχετικά ασθενείς συνθήκες, τις οποίες δεν θα αναφέρουμε εδώ, ο χρόνος εισόδου T^G μίας στοχαστικής διαδικασίας X_t σε ένα σύνολο $G \subset \mathbb{R}^n$ δηλαδή ο

$$T^G(\omega) = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in G\}$$

είναι ένας χρόνος στάσης. Το ίδιο ισχύει και για τον χρόνο εξόδου από το σύνολο G

$$\tau^G = \inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \notin G\}$$

Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $T^G = \tau^{G^c}$ και $\tau^G = T^{G^c}$.

Σαν τελευταία παραδείγματα αναφέρουμε τα ακόλουθα, τα οποία είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην απόδειξη αποτελεσμάτων σχετικά με τους χρόνους στάσης.

Παράδειγμα 2.2.4. Αν T και S χρόνοι στάσης τότε και $S + T$, $S \wedge T$, $S \vee T$ είναι επίσης χρόνοι στάσης. Το ίδιο ισχύει και για το $t \wedge T$.

Παράδειγμα 2.2.5. Έστω μία ακολουθία τ_n από χρόνους στάσης ως προς κάποια διήθηση \mathcal{F}_s . Τότε και οι χρόνοι $\inf_n \tau_n$, $\liminf_n \tau_n$, $\limsup_n \tau_n$ είναι επίσης χρόνοι στάσης ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t αρκεί η διήθηση αυτή να είναι δεξιά συνεχής δηλαδή να ισχύει $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$.

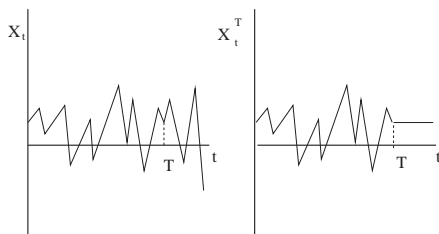
Παράδειγμα 2.2.6. Προσέγγιση ενός χρόνου στάσης από μία ακολουθία φραγμένων χρόνων στάσης

Με βάση τις παρατηρήσεις του παραδείγματος 2.2.4) μπορούμε να δούμε ότι κάθε χρόνος στάσης τ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία από φραγμένους χρόνους στάσης και συγκεκριμένα από την ακολουθία $\tau \wedge n$, για την οποία φυσικά ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau \wedge n = \tau$. Η προσέγγιση αυτή χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην απόδειξη θεωρημάτων σχετικά με τους χρόνους στάσης.

Παράδειγμα 2.2.7. Προσέγγιση συνεχών χρόνων στάσης από διακριτούς χρόνους στάσης [8] Πολλές φορές στην απόδειξη αποτελεσμάτων σε συνεχή χρόνο, είναι πιο εύκολο να αποδεικνύουμε πρώτα το αποτέλεσμα σε διακριτό χρόνο και κατόπιν να χρησιμοποιούμε την προσέγγιση του συνεχούς χρόνου από μία ακολουθία διακριτών χρόνων και να παίρνουμε το κατάλληλο όριο. Στην περίπτωση αυτή είναι απαραίτητο να προσεγγίσουμε έναν συνεχή χρόνο στάσης από μία ακολουθία διακριτών χρόνων στάσης. Αυτό μπορεί να γίνει με τον ακόλουθο τρόπο:

Ας θεωρήσουμε μία ακολουθία χρόνων $t_i := t_i^n$ για την οποία ισχύει $0 = t_0^n < t_1^n < \dots$ και $\lim_{i \rightarrow \infty} t_i^n = \infty$ και $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup |t_{k+1}^n - t_k^n| = 0$. Ας θεωρήσουμε έναν (συνεχή) χρόνο στάσης τ ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_{t+} := \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ και ας ορίσουμε την ακολουθία

$$\tau_n = \begin{cases} t_{k+1}^n, & \text{αν } t_k^n \leq \tau < t_{k+1}^n, \quad k \geq 0 \\ \infty, & \text{αν } \tau = \infty \end{cases}$$



Σχήμα 2.1: Στάση (διακοπή) της στοχαστικής διαδικασίας X_t στον χρόνο στάσης T . Στην πρώτη εικόνα φαίνεται η αρχική στοχαστική διαδικασία X_t και στην δεύτερη η σταματημένη διαδικασία X_t τον τυχαίο χρόνο T .

Παρατηρούμε ότι αν $t_n = \max\{t_k^n : t_k^n \leq t\}$ τότε

$$\{\tau_n \leq t\} = \{\tau_n \leq t_n\} = \{\tau < t_n\} \in \mathcal{F}_{t_n} \subset \mathcal{F}_t$$

Συνεπώς, η ακολουθία τ_n είναι μία ακολουθία διακριτών χρόνων στάσης ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t για την οποία ισχύει $\lim_{n \rightarrow \infty} \tau_n = \tau$. Η ακολουθία τ_n λοιπόν μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν διακριτή προσέγγιση του συνεχούς χρόνου στάσης τ . Υπάρχει μία ελευθερία στον τρόπο επιλογής της ακολουθίας t_k^n . Μία πιθανή επιλογή είναι $t_k^n = \frac{k}{2^n}$. Για την επιλογή αυτή μπορούμε να γράψουμε σε συμπαγή μορφή $\tau_n = 2^{-n}[2^n\tau + 1]$ όπου $[\cdot]$ συμβολίζει το ακέραιο μέρος, και ισχύει $\tau_n \downarrow \tau$.

Πολύ χρήσιμος στο μέλλον θα είναι και ο ορισμός της σ-άλγεβρας που αντιστοιχεί στην πληροφορία για μία στοχαστική διαδικασία μέχρι κάποιο χρόνο στάσης T .

Ορισμός 2.2.2. Έστω $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$ μία διήθηση. Η \mathcal{F}_T όπου T είναι ένας χρόνος στάσης ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t είναι το σύνολο που αποτελείται από τα γεγονότα $A \in \mathcal{F}$ που ικανοποιούν την συνθήκη $A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Η \mathcal{F}_T είναι μία σ-άλγεβρα.

Αν S και T είναι δύο χρόνοι στάσης τέτοιοι ώστε $S \leq T$ τότε $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

2.3 Επιλεκτική στάση

Η επιλεκτική στάση (optional stopping) μας δίνει πληροφορία σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί αν σταματήσουμε μία martingale ή μία super(sub)martingale σε κάποιο χρόνο στάσης T . Η επιλεκτική στάση αποτελεί μία ιδιαίτερα χρήσιμη τεχνική στην στοχαστική ανάλυση και την θεωρία των martingale και διευκολύνει υπολογισμούς μέσω των τιμών και ποσοτήτων που σχετίζονται με χρόνους στάσης.

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της σταματημένης διαδικασίας (stopped process).

Ορισμός 2.3.1. Αν T είναι ένας χρόνος στάσης τότε μπορούμε να ορίσουμε την σταματημένη διαδικασία $X_t^T := X_{t \wedge T}$.

Είναι προφανές από τον ορισμό, ότι η σταματημένη διαδικασία X_t^T έχει ακριβώς τις ίδιες τροχιές με την X_t μέχρι τον χρόνο στάσης T , ενώ μετά τον χρόνο στάσης T η X_t^T είναι 'παγωμένη' στην τιμή X_T , δηλαδή

$$X_t^T = \begin{cases} X_t(\omega), & \text{αν } t < T(\omega) \\ X_T(\omega), & \text{αν } t \geq T(\omega) \end{cases}$$

Μία πραγματοποίηση της διαδικασίας X_t και η σταματημένη διαδικασία $X_t^T = X_{t \wedge T}$ φαίνονται στο Σχ. 2.1. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι μία σταματημένη super(sub)martingale είναι και αυτή μία super(sub)martingale.

Θεώρημα 2.3.1. Μία σταματημένη martingale είναι μία martingale

(i) Αν X_t είναι μία martingale ως προς μία διήθηση (\mathcal{F}_t και T ένας χρόνος στάσης ως προς την ίδια διήθηση τότε η σταματημένη διαδικασία $X_t^T = X_{t \wedge T}$ είναι και αυτή μία martingale ως προς την ίδια διήθηση. Ισχύει συνεπώς $E[X_{t \wedge T}] = E[X_0]$

(ii) Αν η X_t είναι μία super(sub)martingale τότε η σταματημένη διαδικασία είναι επίσης μία super(sub)martingale. Ισχύει συνεπώς $E[X_{t \wedge T}] \leq (\geq) E[X_0]$.

Απόδειξη: Θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος σε διακριτό χρόνο $t = n \in \mathbb{N}$ και θα σκιαγραφήσουμε μόνο την διαδικασία της απόδειξης σε συνεχή χρόνο $t \in \mathbb{R}$. Για την πλήρη απόδειξη σε συνεχή χρόνο παραπέμπουμε στον [1].

(i) Ορίζουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (στοχαστική διαδικασία) a_n έτσι ώστε

$$a_n = \begin{cases} 1, & \text{αν } n \leq T \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αν $n \leq T$ τότε $X_{n \wedge T} = X_n$ και $a_m = 1$ για $1 \leq m \leq n$. Συνεπώς, στην περίπτωση αυτή

$$\begin{aligned} X_{n \wedge T} - X_0 = X_n - X_0 &= a_n(X_n - X_{n-1}) + a_{n-1}(X_{n-1} - X_{n-2}) \\ &+ \dots + a_1(X_1 - X_0) \end{aligned}$$

Αν $n > T$ τότε $T = m$ όπου $m < n$ και $X_{n \wedge T} = X_T = X_m$. Στην περίπτωση αυτή έχουμε $a_1 = \dots = a_m = 1$ και $a_{m+1} = a_{m+2} = \dots = a_n = 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned} X_{n \wedge T} - X_0 &= X_m - X_0 = a_m(X_m - X_{m-1}) + a_{m-1}(X_{m-1} - X_{m-2}) \\ &+ \dots + a_1(X_1 - X_0) = (X \bullet a)_n \end{aligned}$$

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν έχουμε ότι

$$X_{n \wedge T} - X_0 = \sum_{i=1}^n a_i(X_i - X_{i-1})$$

Μπορούμε επίσης να παρατηρήσουμε ότι $a_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, δηλαδή η στοχαστική διαδικασία a_n είναι προβλέψιμη. Αυτό μπορεί να φανεί από το ότι το γεγονός $\{a_n = 0\} = \{T(\omega) \leq n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$ καθώς επίσης και από το ότι το γεγονός $\{a_n = 1\} = \{T(\omega) \geq n\} = \{T > n-1\} \in \mathcal{F}_{n-1}$. Με άλλα λόγια μπορούμε να αποφανθούμε σχετικά με το αν η μεταβλητή a_n παίρνει την τιμή 1 ή την τιμή 0, γνωρίζοντας την ιστορία της X_i μόνο ως το $i = n-1$ και όχι απαραίτητα ως το $i = n$. Επιστρέφοντας στο παράδειγμα 2.1.7 βλέπουμε ότι $X_{n \wedge T} = (X \bullet a)_n$ όπου με $(X \bullet a)$ συμβολίζουμε τον μετασχηματισμό martingale της martingale X_n με την στοχαστική διαδικασία a_n (βλ. Παράδειγμα 2.1.7). Δείξαμε όμως στο παράδειγμα αυτό ότι ο μετασχηματισμός martingale μίας martingale είναι και αυτός martingale. Συνεπώς η $X_{n \wedge T}$ είναι martingale και ισχύει $E[X_{n \wedge T}] = E[X_0]$.

Για τον συνεχή χρόνο ορίζουμε μία ακολουθία διακριτών χρόνων $T_n = \frac{(k+1)t}{2^n}$ αν $\frac{kt}{2^n} \leq T \leq \frac{(k+1)t}{2^n}$. Η στοχαστική διαδικασία $X_{\frac{kt}{2^n}}$ είναι μία martingale σε διακριτό χρόνο (ο δείκτης του χρόνου είναι το k , οπότε γι αυτή ισχύει $E[X_{T_n}] = E[X_t]$ για κάθε n . Μετά πρέπει απλά να πάρουμε το όριο $n \rightarrow \infty$. Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε στον [1]. Τονίζεται ότι στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου είναι απαραίτητο η martingale X_t να ικανοποιεί την ιδιότητα της δεξιάς συνέχειας.

(ii) Για την περίπτωση των super ή submartingales η απόδειξη είναι παρόμοια μόνο που θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2.1.8. \square

Σχόλιο: Στο παραπάνω θεώρημα, αν η X_t είναι μία διαδικασία σε συνεχή χρόνο θεωρούμε ότι είναι δεξιά συνεχής.

Είναι πολύ σημαντικό να απαντήσουμε την ερώτηση σχετικά με το τι συμβαίνει στην μέση τιμή μίας σταματημένης martingale. Από το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να δούμε ότι για κάθε t έχουμε ότι $E[X_{t \wedge T}] = E[X_0]$. Είναι επιτρεπτό όμως να γράψουμε απλά $E[X_T] = E[X_0]$; Ή θέτοντας το ερώτημα λίγο διαφορετικά είναι επιτρεπτό να πάρουμε το όριο $t \rightarrow \infty$, να αντιστρέψουμε την σειρά της μέσης τιμής και του ορίου, και να καταλήξουμε ότι $E[X_T] = E[X_0]$; Μπορούμε να καταλάβουμε ότι κάτι τέτοιο μπορεί να είναι προβληματικό αν ο χρόνος στάσης T δεν είναι πεπερασμένος. Η απάντηση λοιπόν στο παραπάνω ερώτημα είναι καταφατική σε **ορισμένες μόνο** περιπτώσεις! Το ίδιο συμβαίνει και στην περίπτωση μίας super(sub)martingale αλλά τώρα το ερώτημα είναι η ισχύ της αντίστοιχης ανισότητας στο όριο καθώς $t \rightarrow \infty$. Οι περιπτώσεις αυτές συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 2.3.2. Έστω X μία *super(sub)martingale* και T ένας χρόνος στάσης. Τότε η X_T είναι ολοκληρώσιμη και ισχύει $E(X_T) \leq E(X_0)$ σε κάθε μία από τις παρακάτω περιπτώσεις

- (i) T φραγμένος
- (ii) X φραγμένη για κάθε t και T σ.β. φραγμένος
- (iii) $E[T] < \infty$ και για κάποιο K ισχύει

$$|X_s(\omega) - X_t(\omega)| \leq K, \quad \forall s, t, \omega$$

Αν η X είναι μία *martingale* ισχύει η ισότητα.

Απόδειξη: Θα δώσουμε την απόδειξη για την διακριτή περίπτωση. Για την συνεχή περίπτωση αρκεί να εργαστούμε όπως και στο θεώρημα 2.3.1.

Από το θεώρημα 2.3.1 η $X_t^T = X_{t \wedge T}$ είναι ολοκληρώσιμη και $E[X^T - X_0] \leq 0$.

Στην περίπτωση (i) αρκεί να πάρουμε το n ίσο με το άνω φράγμα για το T .

Στην περίπτωση (ii) μπορούμε να θέσουμε $n \rightarrow \infty$ στην ανισότητα για την μέση τιμή της σταματημένης *super(sub)martingale* και να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης. Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με αυτό το θεώρημα αν $X_n \rightarrow X$ σ.β. και $|X_n| \leq K, \forall n$, τότε $E(|X_n - X|) \rightarrow 0$.

Για το (iii) στην διακριτή περίπτωση έχουμε

$$|X_{T \wedge n} - X_0| = \left| \sum_{k=1}^{T \wedge n} (X_k - X_{k-1}) \right| \leq KT$$

και αφού $E[T] < \infty$ μπορούμε να θέσουμε $n \rightarrow \infty$ στην ανισότητα για την μέση τιμή της σταματημένης *super(sub)martingale* και να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (dominated convergence theorem).

Για την συνεχή περίπτωση απλά μπορούμε να επιλέξουμε μία κατάλληλη ακολουθία από χρόνους στάσης και να σταματήσουμε την (super)martingale στην ακολουθία των χρόνων αυτών. \square

Σχόλιο: Αρκετοί συγγραφείς (π.χ. [4] ή [13]) συνοψίζουν τις συνθήκες για το παραπάνω θεώρημα στις τρεις παρακάτω συνθήκες που πρέπει να ισχύουν ταυτόχρονα:

1. $T < \infty$, σ.β.
2. X_T ολοκληρώσιμη
3. $E[X_n \mathbf{1}_{\{T > n\}}] \rightarrow 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$

Ο λόγος που παραθέσαμε το θεώρημα στην μορφή που είναι εδώ (βλ. π.χ. [37]) είναι γιατί στην μορφή αυτή οι συνθήκες είναι συνήθως πιο εύκολο να ελεγχθούν. Είναι βέβαια δυνατόν να δειχθεί ότι οι δύο μορφές είναι ισοδύναμες.

Παράδειγμα 2.3.1. Παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης

Ας θεωρήσουμε έναν τυχαίο περίπατο σε μία διάσταση. Ο τυχαίος περιπατητής έχει ίση πιθανότητα για μία κίνηση προς τα δεξιά ή μία κίνηση προς τα αριστερά. Ας ονομάσουμε Y_i την τυχαία μεταβλητή

$$Y_i = \begin{cases} 1, & \text{κίνηση προς τα δεξιά} \\ -1, & \text{κίνηση προς τα αριστερά} \end{cases}$$

Οι τυχαίες μεταβλητές Y_i είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες (i.i.d) με $E[Y_i] = 0$ και $E[Y_i^2] = 1$. Τότε η θέση του τυχαίου περιπατητή (θεωρώντας ότι ξεκινάει από το 0) είναι η τυχαία μεταβλητή $S_0 = 0, S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$. Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $T = \min\{n : S_n = -a \text{ or } S_n = b\}$ (η πρώτη φορά που ο τυχαίος περιπατητής φτάνει στο σημείο $-a$ ή b).

- (i) Δείξτε ότι με πιθανότητα 1 ο περιπατητής θα εγκαταλείψει τα διάστημα $[-a, b]$ σε πεπερασμένο χρόνο.
- (ii) Βρείτε την πιθανότητα ο τυχαίος περιπατητής να φτάσει στο $-a$ πριν το b .
- (iii) Ποιά είναι η μέση τιμή της T ;

Έχουμε ήδη δει ότι η στοχαστική διαδικασία S_n είναι μία *martingale* ως προς την διήθηση $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Το

ίδιο συμβαίνει και για την στοχαστική διαδικασία $Z_n = S_n^2 - n$. Μπορούμε επίσης σχετικά εύκολα να δούμε ότι η μεταβλητή T είναι ένας χρόνος στάσης ως προς την διήθηση \mathcal{F}_n .

(i) Ισχύει ότι $E[S_{n \wedge T}^2 - (n \wedge T)] = E[S_0^2 - 0] = 0$ (θυμηθείτε ότι αυτό ισχύει πάντοτε χωρίς κανένα περιορισμό στον T). Το $S_{n \wedge T}$ είναι φραγμένο και ισχύει $-a \leq S_{n \wedge T} \leq b$ οπότε και $S_{n \wedge T}^2 \leq K$ για κατάλληλη επιλογή του K . Συνεπώς $E[T] = E[S_{n \wedge T}^2] \leq K$. Από αυτό μπορούμε να συμπεράνουμε ότι $T < \infty$ σ.β. (αν αυτό δεν το βλέπετε αμέσως χρησιμοποιήστε την ανισότητα του Chebychev) οπότε $P(T < \infty) = 1$ και ο περιπατητής θα εγκαταλείψει το διάστημα $[-a, b]$ σε πεπερασμένο χρόνο.

(ii) Ας ονομάσουμε p_a την άγνωστη πιθανότητα. Ισχύει ότι $E[S_{n \wedge T}] = E[S_0] = 0$ (θυμηθείτε ότι αυτό ισχύει πάντοτε χωρίς κανένα περιορισμό στον T). Η στοχαστική διαδικασία $S_{n \wedge T}$ είναι φραγμένη εφόσον $-a \leq S_{n \wedge T} \leq b$ και συνεπώς από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$E[S_0] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[S_{n \wedge T}] = E[\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n \wedge T}] = E[S_T]$$

(ουσιαστικά χρησιμοποιούμε το (iii) του θεωρήματος 2.3.2). Για τον χρόνο στάσης T λοιπόν ισχύουν οι συνθήκες του θεωρήματος 2.3.2 και έχουμε $E[S_0] = E[S_T]$. Εφόσον $S_0 = 0$ το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι ίσο με το 0. Από τον ορισμό του T , η S_T μπορεί να πάρει είτε την τιμή $-a$ με πιθανότητα p_a είτε την τιμή b με πιθανότητα $1 - p_a$. Είναι λοιπόν προφανές ότι $E[S_T] = -ap_a + (1 - p_a)b$. Έτσι από το θεώρημα επιλεκτικής στάσης έχουμε ότι

$$0 = -ap_a + (1 - p_a)b \implies p_a = \frac{b}{a + b}$$

(iii) Για να βρούμε την μέση τιμή της T θα χρησιμοποιήσουμε ξανά ότι η τυχαία μεταβλητή $Z_n = S_n^2 - n$ είναι μία martingale. Όπως είδαμε παραπάνω ο χρόνος στάσης T ικανοποιεί μία από τις συνθήκες του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης (2.3.2) οπότε έχουμε

$$\begin{aligned} E[Z_T] &= E[Z_0] \implies \\ 0 &= p_a a^2 + (1 - p_a) b^2 - E[T] \implies \\ E[T] &= ab < \infty. \end{aligned}$$

Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να βρεθεί και με στοιχειώδη τρόπο χρησιμοποιώντας συνδυαστική για να βρούμε την κατανομή που ακολουθεί η S_n αλλά αυτός ο τρόπος είναι κατά πολύ πιο εύκολος.

Πρόβλημα σχετικά με το παραπάνω παράδειγμα βρίσκουν σημαντικές εφαρμογές στην αναλογιστική επιστήμη και συγκεκριμένα στον υπολογισμό του αποθεματικού ασφαλιστικών εταιρειών. Δεν θα επεκταθούμε σε τέτοιες εφαρμογές στο βιβλίο αυτό. Για μία πολύ καλή κάλυψη του θέματος παραπέμπουμε στο [19].

Θα δώσουμε τώρα και ένα παράδειγμα στο οποίο οι συνθήκες του θεωρήματος 2.3.2 δεν ισχύουν.

Παράδειγμα 2.3.2. Ένας χρόνος στάσης για τον οποίο δεν ισχύει το θεώρημα επιλεκτικής στάσης

Θα παραμείνουμε στα πλαίσια του παραπάνω παραδείγματος αλλά τώρα ας ορίσουμε σαν $T = \min\{n : S_n = b\}$, $b \neq 0$, δηλαδή T είναι ο πρώτος χρόνος που ο περιπατητής φτάνει στο σημείο b . Ο χρόνος T είναι ένας χρόνος στάσης. Έστω ότι μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα 2.3.2 για την martingale S_n . Τότε θα είχαμε $E[S_T] = E[S_0]$ και αφού $S_T = b$ και $S_0 = 0$ θα έχουμε $b = 0$ το οποίο είναι άτοπο. Που υπάρχει το πρόβλημα; Το πρόβλημα είναι ότι και μεν ισχύει $E[S_{n \wedge T}] = E[S_0] = 0$ οπότε και $\lim_{n \rightarrow \infty} E[S_{n \wedge T}] = 0$ αλλά τώρα

$$0 = E[S_0] = \lim_{n \rightarrow \infty} E[S_{n \wedge T}] \neq E[\lim_{n \rightarrow \infty} S_{n \wedge T}] = E[S_T]$$

μιά και η $S_{n \wedge T}$ δεν είναι πλέον απαραίτητα φραγμένη (μπορεί να γίνει και $-\infty$) οπότε το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης δεν μπορεί πλέον να εφαρμοστεί για να δικαιολογηθεί η αντιμετάθεση της μέσης τιμής με το όριο. Επίσης το $S_{n \wedge T}$ δεν είναι απαραίτητα μονότονη ακολουθία και έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε ούτε το θεώρημα μονότονης σύγκλισης. Μπορεί μάλιστα να αποδειχθεί ότι για τον χρόνο στάσης T ισχύει $T < \infty$, σ.β. αλλά $E[T] = \infty$.

Κλείνοντας το τμήμα αυτό, θέλουμε να τονίσουμε ότι η εφαρμογή του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης απαιτεί πολύ μεγάλη προσοχή και ίσως είναι καλύτερο να ξεκινάμε από την σχέση $E[X_{n \wedge T}] = E[X_0]$ που ισχύει για μία martingale για **οποιοδήποτε** χρόνο στάσης T και μετά να προσπαθούμε να δικαιολογήσουμε την σχέση $E[X_T] = E[X_0]$ αν ισχύει παίρνοντας το όριο $n \rightarrow \infty$ και προσπαθώντας να χρησιμοποιήσουμε κάποιο από τα θεωρήματα σύγκλισης, παρά να εφαρμόζουμε κατευθείαν το θεώρημα 2.3.2 εκτός και αν είμαστε πολύ σίγουροι για την ισχύ των συνθηκών (i) – (iii).

2.4 Σύγκλιση διαδικασιών martingale

Θα ασχοληθούμε τώρα με την σύγκλιση των διαδικασιών martingale. Το θέμα αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον από θεωρητικής άποψης καθώς και ιδιαίτερα χρήσιμο σε μία σειρά από εφαρμογές. Υπάρχουν μία σειρά από θεωρήματα σύγκλισης για martingale αλλά εμείς εδώ θα περιοριστούμε σε δύο θεωρήματα τα οποία είναι αρκετά για τους σκοπούς μας. Τα θεωρήματα αυτά αναφέρονται στην σύγκλιση martingales οι οποίες είναι L^1 και στην σύγκλιση martingales οι οποίες είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες (ο ορισμός της έννοιας αυτής ακολουθεί).

Ξεκινάμε με το θεώρημα σχετικά με την σύγκλιση L^1 martingale.

Θεώρημα 2.4.1. Σύγκλιση L^1 -martingale

Έστω X_t μία L^1 super(sub)martingale, δηλαδή μία super(sub)martingale για την οποία ισχύει $E | X_t | < \infty$. Τότε το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ υπάρχει σ.β.

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Το όριο $X := \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ είναι μία L^1 τυχαία μεταβλητή δηλαδή ισχύει $E[|X|] < \infty$. Το παραπάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει σχεδόν βέβαιη σύγκλιση αλλά όχι σύγκλιση στον L^1 η οποία είναι και απαραίτητη όταν θέλουμε να μελετήσουμε τις μέσες τιμές κάποιας στοχαστικής διαδικασίας και τα όρια τους. Για να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση στον L^1 θα πρέπει να επιβάλλουμε κα μία επιπλέον συνθήκη στις martingales, την συνθήκη της **ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας** (uniform integrability).

Ορισμός 2.4.1. Η στοχαστική διαδικασία X_t ονομάζεται **ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη** αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε

$$\int_{\{|X_t| > M\}} |X_t| dP = E[|X_t| \mathbf{1}_{\{|X_t| > M\}}] < \epsilon$$

για κάθε t .

Σχόλια:(1) Η X_t μπορεί να θεωρηθεί απλά και σαν μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών ή σαν μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών.

(2) Μπορούμε να δείξουμε (αφήνεται σαν άσκηση) ότι η τυχαία μεταβλητή X είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $E[|X|; \{|X| > M\}] < \epsilon$. Συνεπώς για κάθε ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_t υπάρχει ακολουθία αριθμών M_t τέτοια ώστε $E[|X_t|; \{|X_t| > M_t\}] < \epsilon$. Αν τα M_t είναι ανεξάρτητα του t τότε η ακολουθία X_t είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

(3) Άλλοι συγγραφείς χρησιμοποιούν για τον ορισμό της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας την συνθήκη $\lim_{M \rightarrow \infty} \sup_t E[|X_t|; \{|X_t| > M\}] = 0$. Ίσως αυτή η μορφή του ορισμού να είναι και πιο καθαρή σχετικά με το τι σημαίνει η ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα και το πως η ιδιότητα αυτή εξασφαλίζει την σύγκλιση κατά L^1 .

Το παρακάτω παράδειγμα που οφείλεται στον Williams [37] δίνει πολύ εύστοχα την διαφορά μεταξύ L^1 τυχαίων μεταβλητών και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών και το γιατί μπορεί να χρειαστεί ο διαχωρισμός αυτός όταν μελετάμε σύγκλιση.

Παράδειγμα 2.4.1. Ας θεωρήσουμε το χώρο πιθανοτήτων $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]), P)$ όπου P είναι το μέτρο Lebesgue στο διάστημα $[0, 1]$. Ας πάρουμε την ακολουθία διαστημάτων $I_n = (0, \frac{1}{n})$ και ας θεωρήσουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_n = n\mathbf{1}_{I_n}$. Η X_n μπορεί να θεωρηθεί σαν μία στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο n .

(i) Η ακολουθία αυτή είναι L^1 (εννοούμε δηλαδή φραγμένη στον L^1) εφόσον $E[X_n] = 1$ για κάθε n . Όμως, η ακολουθία αυτή δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη όπως μπορεί να φανεί καθαρά από το ότι για οποιοδήποτε $M > 0$ αν επιλέξουμε $n > M$ έχουμε ότι

$$E[|X_n|; \{|X_n| > M\}] = E[|X_n| \mathbf{1}_{\{|X_n| > M\}}] = nP(I_n) = 1$$

Συνεπώς μία L^1 ακολουθία τυχαίων μεταβλητών δεν είναι απαραίτητα και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Βέβαια μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη ακολουθία τυχαίων μεταβλητών θα είναι απαραίτητως και L^1 .

(ii) Ας δούμε τώρα τις συνέπειες του παραπάνω στην σύγκλιση. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι $X_n \rightarrow 0$ σχεδόν βέβαια αλλά $E[X_n] = 1$ για κάθε n και συνεπώς $E[X_n] \not\rightarrow 0$. Συνεπώς για ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών που είναι L^1 η σχεδόν βέβαιη σύγκλιση δεν συνεπάγεται απαραίτητα και την σύγκλιση κατά L^1 . Αυτό ισχύει μόνο για ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών. Η παρατήρηση αυτή είναι συμβατή με τα αποτελέσματα της παραγράφου ;;

Ένα εύλογο ερώτημα είναι το πώς μπορούμε να παράγουμε ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες στοχαστικές διαδικασίες

Παράδειγμα 2.4.2. Αν X_t είναι μία στοχαστική διαδικασία τέτοια ώστε $E[|X|^p] < C, p > 1$ για κάθε t τότε η X_t είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Πράγματι, αν $v \geq M > 0$ τότε $v \leq M^{1-p}v^p$. Συνεπώς για κάθε t έχουμε

$$\int_{\{|X_t|>M\}} |X_t| dP \leq M^{1-p} \int_{\{|X_t|>M\}} |X_t|^p dP \leq M^{1-p}C$$

Συνεπώς, επιλέγοντας $\epsilon = M^{1-p}C$ μπορούμε να δούμε ότι η X_t ικανοποιεί την συνθήκη για την ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα.

Παρατήρηση: Το παραπάνω αποτέλεσμα δεν ισχύει για $p = 1$. Αν μία στοχαστική διαδικασία είναι φραγμένη στον L^1 τότε δεν ισχύει απαραίτητα ότι αυτή είναι και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη όπως προέκυψε από το παράδειγμα 2.4.1.

Παράδειγμα 2.4.3. Αν η στοχαστική διαδικασία X_t είναι φραγμένη από μία L^1 τυχαία μεταβλητή δηλαδή $|X_t(\omega)| \leq Y(\omega), E[Y] \leq \infty$, τότε η στοχαστική διαδικασία X_t είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Αυτό και πάλι δεν έρχεται σε αντίθεση με τα όσα είπαμε παραπάνω γιατί και μεν η X_t που έχει την παραπάνω ιδιότητα είναι L^1 αλλά οι X_t με την ιδιότητα αυτή αποτελούν μία πιο ειδική κατηγορία L^1 στοχαστικών διαδικασιών εφόσον μία οποιαδήποτε L^1 στοχαστική διαδικασία δεν ικανοποιεί απαραίτητα την συνθήκη $|X(\omega)| < Y(\omega)$ για κάθε ω .

Θα κλείσουμε την παράθεση των παραδειγμάτων με ένα πολύ χρήσιμο παράδειγμα για τα θέματα που ακολουθούν.

Παράδειγμα 2.4.4. Αν X είναι μία ολοκληρώσιμη τυχαία μεταβλητή και \mathcal{F}_t κάποια διήθηση τότε η στοχαστική διαδικασία X_t που ορίζεται από την σχέση $X_t = E[X | \mathcal{F}_t]$ είναι μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη στοχαστική διαδικασία. Μάλιστα μπορούμε πολύ απλά να δούμε ότι είναι και μία martingale. Αυτό είναι και το πρώτο παράδειγμα μίας ομοιόμορφα ολοκληρώσιμης martingale.

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε ένα θεώρημα σύγκλισης για ομοιόμορφα ολοκληρώσιμες martingale.

Θεώρημα 2.4.2. Σύγκλιση ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale

(i) Έστω X_t ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale. Τότε υπάρχει τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X$ και η σύγκλιση είναι στον L^1 .

(ii) Αν η X_t είναι martingale τότε μπορεί να γραφεί σαν $X_t = E[X | \mathcal{F}_t]$ όπου $X = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ το όριο της X_t στον L^1 , και $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ (η σ -άλγεβρα που παράγεται από την X_t).

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Παράδειγμα 2.4.5. Αν X_t είναι μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale και $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = a$ στον L^1 για κάποιο $a \in \mathbb{R}$ τότε $X_t = a, \sigma.β.$

Πράγματι, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα έχουμε ότι $X_t = E[X | \mathcal{F}_t]$ όπου $X = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X$ το όριο της X_t στον L^1 . Εφόσον $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = a$ στον L^1 θα έχουμε ότι $X_t = E[a | \mathcal{F}_t] = a$. Η παραπάνω ισότητα ισχύει $\sigma.β.$

Η εναλλακτική απόδειξη του νόμου 0 – 1 του Kolmogorov αποτελεί κλασσικό παράδειγμα εφαρμογής του θεωρήματος σύγκλισης ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingales.

Παράδειγμα 2.4.6. Νόμος 0 – 1 του Kolmogorov

Έστω X_n μία ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε τις σ -άλγεβρες $\mathcal{T}_n = \sigma(X_{n+1}, X_{n+2}, \dots)$ και $\mathcal{T} = \bigcap_n \mathcal{T}_n$. Στην \mathcal{T}_n περιέχεται η πληροφορία από την μεταβλητή $n + 1$ και πέρα, ενώ η \mathcal{T} περιέχει την ασυμπτωτική πληροφορία καθώς $n \rightarrow \infty$. Αν $F \in \mathcal{T}$ τότε $P(F) = 0$ ή $P(F) = 1$.

Απόδειξη: Ορίζουμε τις σ -άλγεβρες $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \dots, X_n)$ και την στοχαστική διαδικασία $Y_n = E[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n]$ όπου $A \in \mathcal{T}$. Σύμφωνα με το παράδειγμα 2.4.4 η Y_n είναι μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale οπότε υπάρχει μία τυχαία μεταβλητή Y τέτοια ώστε $Y_n \rightarrow Y$ (στον L^1) και $Y_n = E[Y | \mathcal{F}_n]$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $E[Y | \mathcal{F}_n] = E[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n]$ για κάθε n . Συνεπώς $Y = \mathbf{1}_A$ $\sigma.β.$ Εφόσον όμως οι X_n είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{1}_A$ είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας \mathcal{F}_n . Άρα $Y_n = E[\mathbf{1}_A | \mathcal{F}_n] = E[\mathbf{1}_A] = P(A)$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $P(A) = Y_n = Y = \mathbf{1}_A$. Η $\mathbf{1}_A$ είναι όμως μία τυχαία μεταβλητή που παίρνει μόνο δύο τιμές 0 και 1. Άρα $P(A) = 0$ ή $P(A) = 1$.

Θα κλείσουμε την παράγραφο αυτή με ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι ιδιαίτερα χρήσιμο.

Θεώρημα 2.4.3. Έστω X μία L^1 τυχαία μεταβλητή και \mathcal{F}_t μία διήθηση. Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X | \mathcal{F}_t] = E[X | \mathcal{F}_\infty]$$

όπου η σύγκλιση είναι σχεδόν βέβαιη (σ.β.) και L^1 -σύγκλιση. Ως \mathcal{F}_∞ ορίζεται η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ δηλαδή η σ -άλγεβρα που παράγεται από τα σύνολα $A \in \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

2.5 Ανισότητες martingale

Θα παραθέσουμε τώρα ορισμένες βασικές ανισότητες που ισχύουν για martingales. Θα παραθέσουμε τις ανισότητες για συνεχή χρόνο αλλά η γενίκευση σε διακριτό χρόνο είναι προφανής.

Θεώρημα 2.5.1. Ανισότητα για submartingales του Doob. Έστω X μία μη αρνητική submartingale. Τότε για $c > 0$

$$cP(\sup_{k \leq n} X_k \geq c) \leq E[X_n; \{\sup_{k \leq n} X_k \geq c\}] \leq E[X_n]$$

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Η επόμενη ανισότητα είναι επίσης ιδιαίτερα χρήσιμη

Θεώρημα 2.5.2. Έστω $p > 1$. Αν X_t είναι μία martingale ή μία θετική submartingale τότε

$$E[(\sup_{s \leq t} |X_s|)^p] \leq cE[|X_t|^p]$$

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Παράδειγμα 2.5.1. Αν X_n είναι ανεξάρτητες, όμοια κατανομημένες (iid) τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $P(X_i = \pm 1) = 1/2$ και $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Αποδείξτε ότι

$$P[\sup_{m \leq n} |Y_m| \geq a] \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

Απόδειξη Η Y_n είναι μία martingale. Εφόσον η συνάρτηση e^{bx} είναι κυρτή συνάρτηση η e^{bY_n} είναι μία μη αρνητική submartingale (βλ. Θεώρημα 2.1.2). Συνεπώς έχουμε

$$P[\sup_{m \leq n} Y_m \geq a] = P[\sup_{m \leq n} e^{bY_m} \geq e^{ab}] \leq e^{-ab} E[e^{bY_n}] = e^{-ab} (\cosh b)^n$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των X_i για να υπολογίσουμε την μέση τιμή $E[e^{bY_n}]$. Επαναλαμβάνουμε το ίδιο με την $-Y_n$ και παίρνουμε

$$P[\sup_{m \leq n} (-Y_m) \geq a] = P[\sup_{m \leq n} e^{-bY_m} \geq e^{ab}] \leq e^{-ab} E[e^{-bY_n}] = e^{-ab} (\cosh b)^n$$

Αθροίζοντας τις δύο αυτές ανισότητες παίρνουμε

$$P[\sup_{m \leq n} |Y_m| \geq a] \leq 2e^{-ab} (\cosh b)^n$$

Επειδή για κάθε b ισχύει $\cosh b \leq e^{b^2/2}$ η παραπάνω ανισότητα μπορεί να γραφεί ως

$$P[\sup_{m \leq n} |Y_m| \geq a] \leq 2e^{-ab+b^2n/2}$$

Μέχρι τώρα το b ήταν αυθαίρετο. Αν λοιπόν επιλέξουμε $b = a/n$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα

$$P[\sup_{m \leq n} |Y_m| \geq a] \leq e^{-\frac{a^2}{2n}}$$

2.6 Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής

Τα θεωρήματα που ακολουθούν μας δίνουν ένα χαρακτηρισμό γενικών διαδικασιών supermartingale σαν τη διαφορά μίας martingale και μίας αύξουσας διαδικασίας. Τα θεωρήματα αυτά είναι ιδιαίτερα χρήσιμα σε διάφορες εφαρμογές της θεωρίας των martingales, για παράδειγμα σε προβλήματα βέλτιστοποίησης π.χ προβλήματα βέλτιστης στάσης (optional stopping). Ένα μεγάλο μέρος των προβλημάτων που εμφανίζονται στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά μπορεί να εκφραστούν σαν προβλήματα αυτής της μορφής. Θα επανέλθουμε στα προβλήματα αυτά και την αντιμετώπιση τους αργότερα.

Θεώρημα 2.6.1. Αποσύνθεση Doob-Meyer Μία δεξιά συνεχής ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale X_t μπορεί να γραφεί στην ακόλουθη μορφή

$$X_t = M_t - A_t$$

όπου $\{M_t\}$ είναι μία δεξιά συνεχής martingale και $\{A_t\}$ είναι μία αύξουσα διαδικασία (increasing process) για την οποία ισχύει $A_0 = 0$. Τόσο η M_t όσο και η A_t είναι προσαρμοσμένες στην διήθηση που παράγει η X_t . Επιπλέον η αποσύνθεση αυτή είναι μοναδική.

Απόδειξη: Παραλείπεται. Βλ. π.χ. [8].□

Η αποσύνθεση Doob-Meyer παίρνει μία κατά κάποιον τρόπο διαφορετική μορφή στην διακριτή περίπτωση στον χρόνο γι' αυτό και την παραθέτουμε εδώ. Η αποσύνθεση αυτή στην διακριτή περίπτωση ονομάζεται αποσύνθεση του Doob.

Θεώρημα 2.6.2. Αν $X_n, n \in \mathbb{N}$ είναι μία supermartingale, τότε υπάρχει μία martingale M_n και μία αύξουσα διαδικασία A_n τέτοια ώστε $X_n = M_n - A_n$. Η M_n είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{F}_n και η A_{n+1} είναι μετρήσιμη ως προς την \mathcal{F}_n . Υπενθυμίζουμε πως $\mathcal{F}_n = \sigma(X_k, k \leq n)$.

Απόδειξη: Δεν θα δοκιμάσουμε να παραθέσουμε εδώ την απόδειξη του θεωρήματος στην γενική περίπτωση αλλά θα δώσουμε κάποιο σχέδιο απόδειξης για την διακριτή περίπτωση. Ας ορίσουμε την μεταβλητή

$$\begin{aligned} M_0 &= X_0 \\ M_n &= M_{n-1} + X_n - E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) \end{aligned}$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι η M_n είναι μία martingale. Τώρα ας ορίσουμε $A_n = M_n - X_n$. Τότε

$$A_n = A_{n-1} + X_{n-1} - E(X_n | \mathcal{F}_{n-1})$$

και αφού η $\{X_n\}$ είναι μία supermartingale μπορούμε να δούμε από τον ορισμό της supermartingale ότι $A_n \geq A_{n-1}$. Αφήνουμε την απόδειξη της μοναδικότητας στον αναγνώστη. Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε π.χ. στο [27].□

Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να ορίσουμε την έννοια της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής μίας martingale.

Ορισμός 2.6.1. Αν X_t είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της (quadratic variation process) είναι η συνεχής αύξουσα διαδικασία $\langle X \rangle_t$ η οποία είναι τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία $X_t^2 - \langle X \rangle_t$ να είναι martingale η οποία μηδενίζεται στο $t = 0$.

Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής έχει και ένα διαφορετικό χαρακτηρισμό ο οποίος θα μας φανεί χρήσιμος στην ανάπτυξη του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Ορισμός 2.6.2. Εναλλακτικός ορισμός της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής Έστω $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t\}$ μία διαμέριση του διαστήματος $[0, t]$ και X_t μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale. Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της X_t μπορεί να οριστεί και σαν το όριο κατά πιθανότητα

$$\langle X \rangle_t = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2$$

όπου $|\Delta| = \sup |t_{i+1} - t_i|$.

Ο πρώτος ορισμός της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μία martingale μπορεί να χρησιμοποιηθεί και για martingales σε διακριτό χρόνο.

Σχόλιο: Όπως θα δούμε και παρακάτω στο κεφάλαιο 4 όταν συζητήσουμε την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος, η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής μίας συνεχούς martingale μπορεί να οριστεί και μέσω του στοχαστικού ολοκληρώματος. Υπό την έννοια αυτή ο εναλλακτικός ορισμός είναι περιττός και θα μπορούσαμε να δείξουμε ότι οι διαδικασίες που ορίζονται στους ορισμούς 2.6.1 και 2.6.2 ταυτίζονται. Ενώ εμείς εδώ στηρίξαμε την ύπαρξη της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής στην αποσύνθεση Doob-Meyer θα μπορούσαμε να την δείξουμε απευθείας κάνοντας χρήση του ορισμού του στοχαστικού ολοκληρώματος. Για μία τέτοια οπτική παραπέμπουμε π.χ. στον [15].

Παράδειγμα 2.6.1. Στα πλαίσια του παραδείγματος 2.1.1 έχουμε ότι $\langle Y \rangle_n = n$.

Θα συνεχίσουμε τώρα με ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα το οποίο θα χρησιμοποιηθεί πολύ στην θεωρία του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Ορισμός 2.6.3. Διαδικασίες φραγμένης μεταβολής (Processes of bounded variation). Έστω $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t\}$ μία διαμέριση του διαστήματος $[0, t]$. Για μία διαδικασία X_t ορίζουμε

$$S_t^\Delta = \sum_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|$$

Λέμε ότι η διαδικασία X είναι πεπερασμένης μεταβολής (finite variation) αν για κάθε t

$$S_t = \sup_{\Delta} S_t^\Delta < \infty$$

Αν $\lim_{t \rightarrow \infty} S_t < \infty$ τότε λέμε ότι η διαδικασία είναι φραγμένης μεταβολής (bounded variation).

Θεώρημα 2.6.3. Μία συνεχής martingale $\{X_t\}$ με πεπερασμένη μεταβολή (finite variation) και $X_0 = 0$ είναι ίση με το 0 για κάθε t , δηλαδή $X_t = 0$.

Απόδειξη: Ας ονομάσουμε V_t την μεταβολή της X στο διάστημα $[0, t]$. Τότε

$$E[X_t^2] = E\left[\sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}}^2 - X_{t_i}^2)\right] = E\left[\sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2\right]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες της υπό συνθήκης μέσης τιμής και το γεγονός ότι η X_t είναι martingale. Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση.

Έχουμε όμως ότι

$$E\left[\sum_{i=0}^{k-1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2\right] \leq E\left[\sup_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}| V_t\right] \leq KE\left[\sup_i |X_{t_{i+1}} - X_{t_i}|\right]$$

όπου K είναι ένα φράγμα για την μεταβολή της διαδικασίας. Καθώς $\Delta \rightarrow 0$ λόγω της συνέχειας της X_t , το δεξί μέλος της ισότητας αυτής τείνει στο 0 έτσι ώστε

$$E[X_t] \rightarrow 0 \implies X_t = 0, \quad \forall t, \sigma.\beta.$$

Αυτό και ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής μπορεί να γενικευθεί και στην περίπτωση που έχουμε περισσότερες από μία martingale. Μπορούμε τότε να ορίσουμε την από κοινού διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής.

Ορισμός 2.6.4. Έστω M και N δύο τετραγωνικά ολοκληρώσιμες martingale. Η από κοινού διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής (joint quadratic variation) των M και N ορίζεται η διαδικασία

$$\langle M, N \rangle_t := \frac{1}{2}(\langle M + N, M + N \rangle_t - \langle M, M \rangle_t - \langle N, N \rangle_t)$$

Η από κοινού διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής δύο martingale έχει και έναν εναλλακτικό ορισμό ο οποίος μπορεί να είναι χρήσιμος.

Ορισμός 2.6.5. Εναλλακτικός ορισμός της από κοινού διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής- Έστω $\Delta = \{0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = t\}$ μία διαμέριση του διαστήματος $[0, t]$ και M_t, N_t δύο τετραγωνικά ολοκληρώσιμες martingale. Η από κοινού διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής των M_t και N_t μπορεί να οριστεί και σαν το όριο κατά πιθανότητα

$$\langle M, N \rangle_t := \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})(N_{t_{i+1}} - N_{t_i})$$

όπου $|\Delta| = \sup |t_{i+1} - t_i|$.

Παράδειγμα 2.6.2. $H \langle M, N \rangle_t$ είναι η μοναδική διαδικασία τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία $M_t N_t - \langle M, N \rangle_t$ να είναι μία martingale η οποία μηδενίζεται στο $t = 0$.

Πράγματι, μπορούμε να γράψουμε

$$M_t N_t = \frac{1}{2} (M_t + N_t)^2 - \frac{1}{2} M_t^2 - \frac{1}{2} N_t^2$$

Αφαιρούμε και από τα δύο μέλη της σχέσης αυτής την ποσότητα $\langle M, N \rangle_t$ και χρησιμοποιώντας τον ορισμό 2.6.2 παίρνουμε

$$\begin{aligned} M_t N_t - \langle M, N \rangle_t &= \frac{1}{2} ((M_t + N_t)^2 - \langle M + N, M + N \rangle_t) \\ &+ \frac{1}{2} (M_t^2 - \langle M, M \rangle_t) + \frac{1}{2} (N_t^2 - \langle N, N \rangle_t) \end{aligned}$$

Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μια martingale το ζητούμενο έπεται. Με βάση την παρατήρηση αυτή μπορούμε να δείξουμε ότι για οποιονδήποτε πεπερασμένο χρόνο στάσης τ ισχύει

$$E[M_\tau N_\tau] = \langle M, N \rangle_\tau$$

2.7 Martingales στην οικονομική

Οι διαδικασίες martingale βρίσκουν πολλές χρήσιμες εφαρμογές στην οικονομική θεωρία. Μία από τις πλέον ενδιαφέρουσες εφαρμογές, είναι στην χρηματοοικονομική σαν μοντέλα για τις τιμές των χρεογράφων σε μία αγορά ή στην αποτίμηση χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων. Άλλες ενδιαφέρουσες εφαρμογές είναι σε προβλήματα βέλτιστης στάσης ή γενικότερα σε προβλήματα ελέγχου.

2.7.1 Οι τιμές των χρεογράφων ως martingale

Στην χρηματοοικονομική, οι τιμές των χρεογράφων συχνά θεωρούνται ότι έχουν κάποια δομή martingale. Το υπόδειγμα αυτό για τις τιμές των χρεογράφων υποστηρίχθηκε ισχυρά από τον Αμερικανό οικονομολόγο Paul Samuelson². Το υπόδειγμα αυτό μπορεί να συνδεθεί με βασικές υποθέσεις για τις αποδόσεις και τις προτιμήσεις και άρα μπορεί να συνδεθεί με άλλες οικονομικές θεωρίες. Επίσης το υπόδειγμα αυτό μπορεί να συνδεθεί με την υπόθεση της **αποτελεσματικότητας της αγοράς (market efficiency)** που χρησιμοποιείται πολύ συχνά στην χρηματοοικονομική. Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή η ήδη υπάρχουσα πληροφορία για την οικονομία αντανακλάται στις τιμές.

Θα παρουσιάσουμε εδώ εν συντομία τα επιχειρήματα του Samuelson που χρησιμοποίησε για να υποστηρίξει την θέση ότι οι τιμές έχουν την ιδιότητα martingale³

Ας ξεκινήσουμε παρουσιάζοντας την διαμάχη μεταξύ δύο διαφορετικών σχολών οικονομικής σκέψης και θα προσπαθήσουμε να δείξουμε πως το επιχειρήμα του Samuelson κατάφερε να τις συμφιλιώσει. Μία σχολή είναι η σχολή της **θεμελιώδους ανάλυσης (fundamental analysis)** σύμφωνα με την οποία η ενδογενής ή 'θεμελιώδης' τιμή ενός χρεογράφου ισούται με την ροή κεφαλαίων την οποία το χρεόγραφο αυτό εξασφαλίζει στο μέλλον στον κάτοχο του, έχοντας λάβει υπόψη την κατάλληλη διόρθωση ως προς την αξία του χρήματος (discounted cash flow). Οι πραγματικές (παρατηρούμενες) τιμές παρουσιάζουν διακυμάνσεις γύρω από τις θεμελιώδεις τιμές.

²Ο Samuelson τιμήθηκε με το βραβείο Nobel το 1970 για την οικονομική επιστήμη

³Δείτε το πολύ κατατοπιστικό άρθρο [22]

Έτσι, σύμφωνα με την σχολή αυτή, ένας οξυδερκής αναλυτής μπορεί χρησιμοποιώντας την κατάλληλη πληροφορία να υπολογίσει την τιμή κάποιου χρεογράφου. Κέρδος μπορεί να επιτευχθεί αγοράζοντας ή πουλώντας μη σωστά εκτιμημένα προϊόντα, και στην περίπτωση αυτή όμως η πραγματική (ορθολογική) τους αξία εντέλει θα φανεί! Αυτή η θεωρία ήταν πολύ αγαπητή στους κλασσικούς οικονομολόγους αλλά δεν φαινόταν να ισχύει στην πράξη. Διάφοροι ερευνητές (μεταξύ άλλων και ο διάσημος στατιστικός Kendal ή ο γνωστός από την θεωρία των fractal Mandelbrot) μελέτησαν την συμπεριφορά των τιμών διαφόρων χρεογράφων και κατάληξαν στο συμπέρασμα ότι οι τιμές φαίνονται σαν να είναι πλήρως τυχαίες. Η παρατήρηση αυτή έδωσε ώθηση στην ανάπτυξη μίας σειράς υποδειγμάτων τα οποία ονομάστηκαν υποδείγματα **τυχαίου περιπάτου (random walk models)**. Τα μοντέλα αυτά φαίνονταν (τουλάχιστον την εποχή αυτή) τελείως εκτός του γενικότερου πλαισίου της παραδοσιακής οικονομικής σκέψης.

Θα παρουσιάσουμε τώρα το επιχείρημα του Samuelson. Ακολουθώντας την οπτική των οπαδών της θεμελιώδους σχολής (fundamentalists) η τιμή μίας μετοχής την χρονική στιγμή t θα πρέπει να αντανακλά την αναμενόμενη μελλοντική τιμή της, συν τα μερίσματα, προεξοφλούμενη την σημερινή ημέρα

$$p_t = (1+r)^{-1}E[p_{t+1} + d_{t+1} | \mathcal{F}_t]$$

Η σχέση αυτή είναι μία καθαρά ‘ορθολογική’ σχέση. Όπως όμως θα δούμε μπορούμε από την σχέση αυτή να πάρουμε μία τυχαία και απρόβλεπτη ποσότητα. Ας ονομάσουμε h_t τον αριθμό των χρεογράφων που κατέχει ένα αμοιβαίο κεφάλαιο την χρονική στιγμή t . Τότε η αξία του αμοιβαίου κεφαλαίου την χρονική στιγμή t , προεξοφλούμενη την χρονική στιγμή $t = 0$ θα ήταν

$$v_t = (1+r)^{-t}p_t h_t$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι το αμοιβαίο κεφάλαιο τοποθετεί το εισόδημα του από τα μερίσματα ξανά σε νέα χρεόγραφα (επανατοποθετεί τα κέρδη του από τα μερίσματα σε μετοχές). Τότε

$$p_{t+1}h_{t+1} = (p_{t+1} + d_{t+1})h_t$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την υπό συνθήκη μέση τιμή της προεξοφλημένης τιμής (discounted value) του αμοιβαίου κεφαλαίου ως προς την πληροφορία που είναι διαθέσιμη την χρονική στιγμή t

$$\begin{aligned} E[v_{t+1} | \mathcal{F}_t] &= E[(1+r)^{-t-1}p_{t+1}h_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= E[(1+r)^{-t+1}(p_{t+1} + d_{t+1})h_t | \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-t}h_t(1+r)^{-1}E[p_{t+1} + d_{t+1} | \mathcal{F}_t] \\ &= (1+r)^{-t}p_t h_t = v_t \end{aligned}$$

Η σχέση αυτή δείχνει ότι η αξία του αμοιβαίου κεφαλαίου, v_t είναι μία martingale! Έτσι, έστω και ξεκινώντας από ένα μοντέλο που ξεκινάει από την οπτική της θεμελιώδους σχολής μπορεί να καταλήξουμε με ποσότητες που έχουν ιδιότητες martingale. Μπορεί οι τιμές των χρεογράφων αυτές καθαυτές να μην είναι martingale αλλά η ποσότητα v_t που είναι άμεσα συνδεδεμένη με αυτές, είναι martingale.

Περαιτέρω, χρησιμοποιώντας ιδιότητες των martingale ο Samuelson απέδειξε ότι

$$p_t = \sum_{j=1}^{\infty} (1+r)^{-j} E[d_{t+j} | \mathcal{F}_t]$$

το οποίο μας λέει ότι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t είναι ίση με το άθροισμα της μέσης τιμής (αναμενόμενης τιμής) της σημερινής αξίας των μελλοντικών μερισμάτων. Αυτό είναι επίσης ένα αποτέλεσμα το οποίο είναι συμβιβαστό με μία άποψη της θεμελιώδους σχολής.

2.7.2 Χρηματοοικονομική σε διακριτό χρόνο: Εφαρμογές της θεωρίας των martingale στην αποτίμηση χρεογράφων

Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία X_i , $i \in \mathbb{N}$. Αυτή η στοχαστική διαδικασία θεωρούμε ότι μπορεί να περιγράψει την τιμή ενός χρεογράφου τις διακριτές χρονικές στιγμές i . Το γεγονός ότι ο χρόνος είναι διακριτός δεν είναι τόσο κακό, δεδομένου ότι οι τιμές καταγράφονται σε συγκεκριμένες στιγμές της ημέρας π.χ. στο άνοιγμα και το κλείσιμο της αγοράς. Έτσι οι καταγεγραμμένες τιμές των χρεογράφων μπορεί να θεωρήσουμε ότι παράγουν μία στοχαστική διαδικασία σε διακριτό χρόνο.

Θεωρούμε τώρα μία συλλογή τέτοιων στοχαστικών διαδικασιών $\{X_{n,i}\}$, η καθεμιά από τις οποίες αντιστοιχεί στην τιμή ενός δεδομένου χρεογράφου (το n χαρακτηρίζει το χρεόγραφο και το i τον χρόνο). Από τα χρεόγραφα

αυτά ένα παίζει διαφορετικό ρόλο, καθώς θεωρείται ότι δεν εμπεριέχει κίνδυνο και θα το ονομάζουμε **ομόλογο** (bond). Τα ομόλογα, στα πλαίσια του απλού αυτού μοντέλου που θα παρουσιάσουμε, μπορεί να θεωρηθούν ότι παίζουν τον ρόλο μίας ασφαλούς τραπεζικής κατάθεσης. Το ειδικό αυτό χρεόγραφο πολλές φορές θα θεωρείται ότι παίζει τον ρόλο της μονάδας μέτρησης με την οποία μετράμε την αξία κάποιου άλλου χρεογράφου που μπορεί να εμπεριέχει κίνδυνο. Θα θεωρήσουμε επίσης ότι υπάρχει κάποιο επιτόκιο r ανά περίοδο, οπότε κάθε περίοδο η αξία του χρήματος αυξάνει κατά ένα παράγοντα $1 + r$. Έτσι ένα ομόλογο αξίας $X_{0,0}$ την χρονική στιγμή $t = 0$, θα έχει αξία $X_{0,t} = (1 + r)^t X_{0,0}$ την χρονική στιγμή t . Η $X_{0,t}$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μεταφέρει την αξία οποιουδήποτε χρεογράφου στην χρονική στιγμή t στην αντίστοιχη του αξία την χρονική στιγμή $t = 0$. Έτσι η $\bar{X}_{n,t} = \frac{X_{n,t}}{X_{0,t}}$ είναι η αξία την χρονική στιγμή $t = 0$ του χρεογράφου $X_{n,t}$ με την έννοια του ότι είναι το ποσό που αν τοποθετηθεί σε μία ασφαλή επένδυση σήμερα ($t = 0$) θα αποδώσει το ποσό $X_{n,t}$ την χρονική στιγμή t . Η $\bar{X}_{n,t}$ ονομάζεται προεξοφλημένη τιμή.

Τώρα θεωρούμε ότι συνθέτουμε ένα **χαρτοφυλάκιο**. Ένα χαρτοφυλάκιο δεν είναι τίποτε άλλο από μία συλλογή από μετοχές και ομόλογα. Θεωρώντας ότι $a_{n,i}$ είναι η ποσότητα κομματιών από το κάθε χρεόγραφο n , $n = 0, 1, \dots, N$ την χρονική στιγμή i η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή i θα είναι $V_i = \sum_{n=0}^N a_{n,i} X_{n,i}$. Υποθέτουμε πως το χαρτοφυλάκιο ενημερώνεται την χρονική στιγμή i , έχοντας γνώση μόνο των τιμών μέχρι την χρονική στιγμή $i - 1$. Η παραπάνω υπόθεση μπορεί να εκφραστεί γράφοντας ότι οι (τυχαίες) μεταβλητές $a_{n,i}$ είναι \mathcal{F}_{i-1} μετρήσιμες ή ότι $a_{n,i} \in \mathcal{F}_{i-1}$ (όλη η πληροφορία που χρειάζεται για να απαντήσουμε ερωτήσεις σχετικές με τις τιμές που παίρνουν οι μεταβλητές $a_{n,i}$ περιέχονται στην σ -άλγεβρα \mathcal{F}_{i-1} η οποία είναι η πληροφορία που μπορεί να ληφθεί παρατηρώντας τις στοχαστικές διαδικασίες $X_{n,i}$ ως την χρονική στιγμή $t = i - 1$).

Θεωρούμε τώρα ότι την χρονική στιγμή $t = i$ ένας επενδυτής κρατάει $a_{n,i}$ μονάδες από το χρεόγραφο n . Η μεταβολή της τιμής του χρεογράφου αυτού από την χρονική στιγμή $t = i - 1$ στην χρονική στιγμή $t = i$ είναι $\Delta X_i^n = X_{n,i} - X_{n,i-1}$. Το κέρδος του επενδυτού εξαιτίας της κίνησης της τιμής του συγκεκριμένου χρεογράφου είναι $G_i^n = a_{n,i} \Delta X_i^n$. Το συνολικό κέρδος από όλα τα χρεόγραφα την χρονική στιγμή $t = i$ είναι $G_i = \sum_{n=0}^N G_i^n = \sum_{n=0}^N a_{n,i} \Delta X_i^n$. Υποθέτουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου μπορεί να μεταβληθεί μόνο εξαιτίας των κερδών από την κίνηση των τιμών των χρεογράφων δηλαδή δεν προστίθεται ή αφαιρείται κανένα εξωτερικό χρηματικό ποσό στο χαρτοφυλάκιο. Κάτω από τις συνθήκες αυτές η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή t θα είναι

$$(2.1) \quad V_t = V_0 + \sum_{i=0}^t G_i$$

Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο (δηλαδή μία τέτοια στρατηγική επενδύσεων $a_{n,i}$) ονομάζεται **αυτο-χρηματοδοτούμενο** (self-financing). Από τον ορισμό ενός αυτο-χρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου μπορούμε να δούμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού είναι ο μετασχηματισμός martingale των $X_{n,i}$. Ο μετασχηματισμός martingale είναι το διακριτό ανάλογο του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Από την άλλη μεριά, η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή t μπορεί να δοθεί και από την σχέση $V_i = \sum_{n=0}^N a_{n,i} X_{n,i}$. Η παραπάνω σχέση ισχύει ανεξάρτητα από το αν το χαρτοφυλάκιο είναι αυτοχρηματοδοτούμενο ή όχι. Αν το χαρτοφυλάκιο είναι αυτό-χρηματοδοτούμενο, συνδυάζοντας την παραπάνω σχέση με την εξίσωση (2.1) βλέπουμε ότι για ένα αυτο-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο ισχύει

$$\sum_{n=0}^N \Delta a_{n,i} X_{n,i-1} = 0 \quad \forall i$$

Η παραπάνω σχέση λέει ότι η αθροιστική επίδραση των μεταβολών την χρονική στιγμή i των ποσών του κάθε χρεογράφου που έχει στην κατοχή του ένας επενδυτής πρέπει να εξισορροπείται. Αυτό γίνεται πιο καθαρό όταν $N = 1$ δηλαδή υπάρχει μόνο μία μετοχή και μία ομολογία. Στην περίπτωση αυτή είναι φανερό από την παραπάνω σχέση ότι οι αλλαγές στο ποσό των μετοχών που έχει στην κατοχή του ο επενδυτής πρέπει να πληρώνονται από τα κέρδη που λαμβάνονται από την αλλαγή της τιμής της ομολογίας και αντίστροφα.

Οι τιμές ενός χρεογράφου είναι πιο χαρακτηριστικές αν είναι κανονικοποιημένες ως προς κάποιο σχετικό μέγεθος, το οποίο μπορεί να επιλεγεί να είναι η τιμή των ομολογιών. Ένα ενδιαφέρον αποτέλεσμα είναι ότι αν ένα χαρτοφυλάκιο είναι αυτο-χρηματοδοτούμενο τότε και η κανονικοποιημένη του μορφή θα είναι και αυτή αυτο-χρηματοδοτούμενη⁴. Το αποτέλεσμα αυτό πολλές φορές στην χρηματοοικονομική αναφέρεται σαν το numeraire invariance theorem. Άρα για ένα αυτο-χρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο έχουμε ότι

$$\bar{V}_t = V_0 + \bar{G}_t$$

⁴Εξυπακούεται ότι η διαδικασία σύμφωνα με την οποία κανονικοποιούμε είναι παντα θετική.

όπου $\bar{V}_t = \sum_{n=0}^N a_{n,i} \bar{X}_{n,i}$, $\bar{X}_{n,i} = N_i^{-1} X_{n,i}$, και παρομοίως για την \bar{G} . Η διαδικασία N είναι η διαδικασία την οποία χρησιμοποιούμε για την κανονικοποίηση, και για την οποία χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε πως $N_0 = 1$. Σε πολλές περιπτώσεις $N_i = X_{0,i}$.

Θα εισάγουμε τώρα την βασική έννοια του **arbitrage**⁵. Με την έννοια arbitrage έννοουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να επιφέρει βέβαιο κέρδος χωρίς κίνδυνο. Ο μαθηματικός ορισμός του arbitrage είναι ο ακόλουθος

Ορισμός 2.7.1. Ένα χαρτοφυλάκιο a είναι ένα **arbitrage**, αν είναι αυτο-χρηματοδοτούμενο και αν ισχύει $V_0(a) = 0$ και $V_t(a) \geq 0$ για κάθε t και $E[V_T(a)] > 0$.

Στα παραπάνω γράφουμε $V(a)$ για να καθορίσουμε ότι αυτή είναι η στοχαστική διαδικασία που αντιστοιχεί στην αξία ενός συγκεκριμένου χαρτοφυλακίου a . Παρόλο που το arbitrage είναι το όνειρο του κάθε επενδυτή δεν είναι αποδεκτή στην χρηματοοικονομική γιατί θεωρείται ότι κινεί την αγορά μακριά από την κατάσταση ισορροπίας.

Ένας περαιτέρω περιορισμός που επιφέρουμε στην στοχαστική διαδικασία που αντιστοιχεί σε ένα χαρτοφυλάκιο είναι ότι η διαδικασία αυτή θα πρέπει να είναι κάτω φραγμένη από ένα πεπερασμένο αρνητικό αριθμό. Αυτή η ιδιότητα καλείται **ιδιότητα του αποδεκτού**, (**admissibility**) και η οικονομική της σημασία είναι ότι ένας επενδυτής έχει ένα περιορισμένο περιθώριο χρέους πριν αναγκαστεί να εγκαταλείψει την αγορά. Όλα τα χαρτοφυλάκια τα οποία θα λάβουμε υπόψη μας θα έχουν την ιδιότητα αυτή.

Είμαστε τώρα σε θέση να δούμε την πρώτη εφαρμογή της θεωρίας των martingale στην χρηματοοικονομική. Το θεώρημα που ακολουθεί λέει ουσιαστικά ότι η απουσία arbitrage σε κάποια δεδομένη αγορά είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου κάτω από το οποίο η προεξοφλημένη διαδικασία των τιμών (discounted price process) είναι μία martingale. Ένα τέτοιο μέτρο ονομάζεται το **ισοδύναμο μέτρο martingale** (**equivalent martingale measure**)⁶.

Θεώρημα 2.7.1. Δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage σε μία αγορά αν και μόνο αν υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε εδώ μόνο το ικανό δηλαδή ότι αν υπάρχει ισοδύναμο μέτρο martingale δεν θα υπάρχει arbitrage στην αγορά. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα ανάλογα με αυτά που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του numeraire invariance theorem μπορούμε να δούμε ότι ένα χαρτοφυλάκιο είναι ένα arbitrage αν και μόνο αν οποιαδήποτε κανονικοποιημένη μορφή του είναι ένα arbitrage. Θα εργαστούμε λοιπόν με την προεξοφλημένη μορφή (discounted version) ενός χαρτοφυλακίου. Για την αξία ενός αυτο-χρηματοδοτούμενου χαρτοφυλακίου ισχύει

$$\bar{V}_t = V_0 + \sum_{u=1}^t a_u \cdot \Delta \bar{X}_u$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την συντομογραφία $a_u \cdot \Delta \bar{X}_u = \sum_{n=0}^N a_{n,u} \Delta \bar{X}_u^n$. Θεωρούμε ότι κάτω από το μέτρο Q η στοχαστική διαδικασία προεξοφλημένης τιμής (discounted price process) \bar{X} είναι μία martingale ως προς κάποια διήθηση (\mathcal{F}). Τότε εφόσον η V είναι ο μετασχηματισμός martingale της στοχαστικής διαδικασίας \bar{X} είναι και αυτή μία martingale κάτω από το μέτρο Q και την διήθηση (\mathcal{F}). Η ιδιότητα martingale σημαίνει ότι

$$E_Q[\bar{V}_T] = E_Q[\bar{V}_0]$$

Αν $\bar{V}_0 = 0$ και $\bar{V}_T \geq 0$ σ.β. ως προς το μέτρο Q τότε από την ιδιότητα martingale έχουμε ότι $E_Q[\bar{V}_T] = 0$ το οποίο (μαζί με την ιδιότητα $\bar{V}_T \geq 0$ σ.β. (Q)) μας δίνει ότι $\bar{V}_T = 0$ σ.β. (Q). Αφού τα μέτρα P και Q είναι ισοδύναμα και η έννοια του σχεδόν βέβαια είναι μία ιδιότητα που σχετίζεται με σύνολα μέτρου μηδέν μπορούμε να δούμε πως αν κάτι ισχύει σ.β. ως προς το μέτρο P τότε ισχύει σ.β. ως προς το μέτρο Q και αντίστροφα. Το παραπάνω επιχειρήμα δείχνει καθαρά ότι αν μπορεί να βρεθεί ένα ισοδύναμο μέτρο martingale (equivalent martingale measure) Q τότε δεν υπάρχουν ευκαιρίες arbitrage στην αγορά. □

Σχόλια 1. Το μέτρο P είναι το μέτρο πιθανότητας που επάγεται από την στοχαστική διαδικασία \bar{X}_i .

2. Το θεώρημα αυτό ισχύει και στην περίπτωση του συνεχούς χρόνου. Στην περίπτωση αυτή υπάρχουν τεχνικές της στοχαστικής ανάλυσης οι οποίες μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τον έλεγχο της ύπαρξης ισοδύναμων μέτρων martingale (βλέπε το θεώρημα του Girsanov). Τεχνικές για τον έλεγχο της ύπαρξης τέτοιων μέτρων σε διακριτό χρόνο έχουν προταθεί βασισμένες στο θεώρημα του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου (separating hyperplane theorem).

⁵Ο ελληνικός όρος θα μπορούσε να ήταν **πρόκριση** αλλά εφόσον δεν έχει καθιερωθεί θα προτιμήσουμε τον αντίστοιχο αγγλικό όρο

⁶Δύο μέτρα λέγονται ισοδύναμα αν έχουν τα ίδια μηδενικά σύνολα (null sets) δηλαδή $P \sim Q$ αν $P(A) = 0 \implies Q(A) = 0$ για κάθε σύνολο A τέτοιο ώστε $P(A) = 0$.

Η ύπαρξη ενός ισοδύναμου μέτρου martingale επιτρέπει επίσης και την δίκαια αποτίμηση ορισμένων παραγώγων συμβολαίων ή γενικότερα συγκυριακών συμβολαίων (contingent claims). Ένα συγκυριακό συμβόλαιο (contingent claim) είναι ένα χρεόγραφο του οποίου η αξία είναι μία τυχαία μεταβλητή. Στις περισσότερες περιπτώσεις είναι ένα χρεόγραφο που η τιμή του εξαρτάται από την τιμή κάποιου άλλου χρεογράφου που αποκαλείται βασικό (underlying asset). Παραδείγματα συγκυριακών συμβολαίων είναι τα δικαιώματα (options) ή τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures) κλπ.

Μαθηματικά μπορεί να ορίσουμε ένα συγκυριακό συμβόλαιο σαν μία μη-αρνητική τυχαία μεταβλητή F η οποία είναι \mathcal{F} μετρήσιμη, και αναπαριστά ένα συμβόλαιο που το ποσό $F(\omega)$ την χρονική στιγμή T αν συμβεί το γεγονός ω . Το συμβόλαιο αυτό μπορεί να αγοραστεί ή να πωληθεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t < T$. Την χρονική στιγμή T το συγκυριακό αυτό συμβόλαιο έχει αξία ίση με το ποσό που αποφέρει στον κάτοχο του δηλαδή F . Ένα βασικό ερώτημα που απασχολεί την χρηματοοικονομική είναι η αποτίμηση ενός συγκυριακού συμβολαίου ή αλλιώς ποσο πρέπει να πληρώσει κανείς για το συμβόλαιο αυτό την χρονική στιγμή t όπου $t \leq T$;

Ένας τρόπος να ορίσουμε την τιμή ενός τέτοιου συμβολαίου είναι ο ακόλουθος: Ας προσπαθήσουμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο a του οποίου η τιμή την χρονική στιγμή T είναι ίση σ.β. με την αξία της απαίτησης $F(\omega)$. Η αρχική αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή t είναι το ποσό που πρέπει επενδυθεί από τον πωλητή του συμβολαίου για να συνθέσει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αναπαράγει την αξία του συμβολαίου (της απαίτησης) την χρονική στιγμή T , και κατά τον τρόπο αυτό θα επιτρέψει στον πωλητή του συμβολαίου να ανταποκριθεί στην υποχρέωση του ως προς τον κάτοχο του συμβολαίου. Αυτό είναι η αξιολόγηση του συμβολαίου από την πλευρά του πωλητή. Μία παρόμοια αξιολόγηση του συμβολαίου μπορεί να γίνει και από την πλευρά του αγοραστή. Στο θέμα αυτό θα επανέλθουμε σε επόμενα κεφάλαια. Το χαρτοφυλάκιο το οποίο αναπαράγει την αξία του συμβολαίου ονομάζεται αναπαράγων χαρτοφυλάκιο ή hedging portfolio ή replicating portfolio. Η κατασκευή ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου δεν είναι πάντοτε εφικτή. Το αν είναι δυνατή ή όχι εξαρτάται από τις ιδιότητες της αγοράς (πληρότητα της αγοράς, completeness).

Αν λοιπόν υπάρχει ένα χαρτοφυλάκιο τέτοιο ώστε $V_T(a) = F$ σ.β., τότε η τιμή της απαίτησης την χρονική στιγμή t δεν είναι άλλο από την αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή t , έστω $\pi(t) = V_t^7$. Θα εργαστούμε με την προεξοφλημένη διαδικασία $\bar{X} = X/X^0 = \xi X$ για την οποία έχουμε

$$\bar{V}_T = \xi_T F$$

Υποθέτουμε τώρα την απουσία arbitrage στην αγορά. Σύμφωνα με το θεώρημα 2.7.1 υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale Q κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία \bar{X} είναι μία martingale. Τότε όμως η διαδικασία αξίας \bar{V} θα είναι και αυτή martingale αφού είναι ο μετασχηματισμός martingale της διαδικασίας τιμών. Από την ιδιότητα martingale της \bar{V} έχουμε

$$E_Q[\bar{V}_T | \mathcal{F}_t] = \bar{V}_t$$

και συνεπώς η αξία (τιμή) του συμβολαίου την χρονική στιγμή t θα είναι

$$\pi(t) = E_Q[\xi_T F | \mathcal{F}_t].$$

Η πιο κοινή επιλογή για το ξ_t είναι η $(1+r)^{-t}$ δηλαδή χρησιμοποιούμε την τιμή του ομολόγου σαν numeraire. Η τιμή του συμβολαίου τη χρονική στιγμή $t = 0$ είναι $\pi(0) = E_Q(\xi_T F)$ όπου $\mathcal{F}_0 = \mathcal{O} = \{\emptyset, \Omega\}$ (δεν έχουμε καμία γνώση σχετικά με την διαδικασία τιμών εφόσον μόλις αρχίσαμε να την παρατηρούμε).

Η μέθοδος των martingale μας δίνει έναν καλό τρόπο να αποτιμήσουμε ένα συγκυριακό συμβόλαιο F , αρκεί βέβαια να μπορέσουμε να βρούμε το μέτρο Q το οποίο μετατρέπει την προεξοφλημένη διαδικασία τιμών \bar{X} σε martingale. Στο παρακάτω παράδειγμα δίνουμε έναν τρόπο υπολογισμού του μέτρου αυτού σε ένα συγκεκριμένο διακριτό μοντέλο.

Παράδειγμα 2.7.1. Κατασκευή του EMM στο διωνυμικό μόντελο της αγοράς.

Ένα μοντέλο που χρησιμοποιείται πολύ συχνά για την περιγραφή μίας αγοράς είναι το διωνυμικό μοντέλο της αγοράς. Σε μία απλή μορφή του μοντέλου αυτού υπάρχει μία μετοχή και ένα ομόλογο. Η τιμή του ομολόγου ακολουθεί την διαδικασία

$$X_{0,t} = (1+r)^t X_{0,0}$$

⁷ Αυτό φυσικά ισχύει στην περίπτωση όπου έχουμε αποκλείσει την ύπαρξη ευκαιριών για arbitrage στην αγορά αυτή.

Η μετοχή έχει αύξηση $R_{t+1} = X_{1,t+1}/X_{1,t}$ την χρονική περίοδο t ίση με $(1+a)$ ή $(1+b)$ με πιθανότητα p και $1-p$ αντιστοίχως. Οι αυξήσεις είναι ανεξάρτητες, όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές. Στα ακόλουθα θα παραλείψουμε τον δείκτη 1 από την τιμή της μετοχής.

Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη μεθοδολογία μπορούμε να δούμε ότι η αξία ενός συγκυριακού συμβολαίου F την χρονική στιγμή t είναι

$$\pi(t) = E_Q[\xi_T F | \mathcal{F}_t]$$

όπου $\xi_T = (1+r)^{-T}$ (χρησιμοποιούμε την αξία του ομολόγου σαν *numeraire*) και Q είναι το μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο η διαδικασία $\bar{X}_t = (1+r)^{-t} X_t$ είναι *martingale*. Ποιό είναι το μέτρο Q ;

Εφόσον κάτω από το μέτρο αυτό η διαδικασία \bar{X}_t είναι *martingale* τότε

$$E_Q[\bar{X}_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \bar{X}_{t-1}$$

Αλλά $\bar{X}_t = (1+r)^{-t} R_t X_{t-1}$ οπότε αντικαθιστώντας στο παραπάνω

$$\begin{aligned} E_Q[(1+r)^{-t} X_{t-1} R_t | \mathcal{F}_{t-1}] &= (1+r)^{-t} X_{t-1} E_Q[R_t | \mathcal{F}_{t-1}] \\ &= \bar{X}_{t-1} = (1+r)^{-(t-1)} X_{t-1} \end{aligned}$$

εφόσον X_{t-1} είναι \mathcal{F}_{t-1} μετρήσιμη και το επιτόκιο r θεωρείται σταθερό. Διαιρώντας με το $(1+r)^{-t} X_{t-1}$ παίρνουμε ότι

$$E_Q[R_t | \mathcal{F}_{t-1}] = 1+r$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα αυτή για να βρούμε το μέτρο Q . Αφού οι R_t είναι ανεξάρτητες, όμοια κατανομημένες μεταβλητές

$$E_Q[R_t | \mathcal{F}_{t-1}] = E_Q[R_t]$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $Q(R_i = 1+a) = Q(R_1 = 1+a) = 1-q$ και ότι $Q(R_i = 1+b) = Q(R_1 = 1+b) = q$. Τότε οι δύο παραπάνω εξισώσεις μας δίνουν ότι

$$E_Q[R_t] = (1-q)(1+a) + q(1+b) = 1+r \implies q = \frac{r-a}{b-a}$$

Το νέο μέτρο λοιπόν είναι τέτοιο ώστε

$$Q(R_1 = \omega_1, R_2 = \omega_2, \dots, R_t = \omega_t) = \prod_{i=1}^t q_i$$

όπου

$$q_i = \begin{cases} q, & \text{αν } \omega_i = 1+b \\ 1-q, & \text{αν } \omega_i = 1+a \end{cases}$$

Σημείωση: Το μέτρο αυτό ορίζεται μόνο αν $a < r < b$. Αν $a = b$ το μοντέλο αυτό δεν έχει σημασία και στην ουσία είναι ντετερμινιστικό.

Έχοντας λοιπόν μία επιλογή για το ισοδύναμο μέτρο *martingale* Q μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία του παραγώγου συμβολαίου. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τους Cox, Ross και Rubinstein και είναι το διακριτό ανάλογο του μοντέλου Black-Scholes [7]. Μπορεί μάλιστα ναδειχθεί ότι το διακριτό αυτό μοντέλο συγκλίνει σε αυτό των Black-Scholes.

2.7.3 Μοντέλα αναζήτησης (search models)

Ένα ακόμα παράδειγμα όπου η θεωρία των *martingale* μπορεί να χρησιμοποιηθεί στα οικονομικά είναι η οικονομική της αναζήτησης. Θα παρουσιάσουμε παράδειγμα τέτοιου μοντέλου εδώ, και συγκεκριμένα ένα μοντέλο αναζήτησης εργασίας, το οποίο έχει χρησιμοποιηθεί αρκετά στην βιβλιογραφία.

Ας θεωρήσουμε ότι ένα άτομο αναζητεί εργασία και ότι κάθε μέρα έχει ακριβώς μία προσφορά για εργασία. Σε κάθε προσφορά αντιστοιχεί κάποιος αριθμός ω οποίος είναι η προεξοφλημένη σημερινή αξία (*discounted present*

value) των ισοβίων αποδοχών του από την εργασία αυτή. Ταυτόχρονα, βέβαια η αναζήτηση εργασίας έχει κάποιο κόστος καθώς το άτομο πρέπει να συντηρείται καθώς ψάχνει για εργασία. Διαφορετικοί πιθανοί εργοδότες κάνουν διαφορετικές προσφορές στο άτομο αυτό. Τις διαφορετικές αυτές προσφορές τις μοντελοποιούμε με μία στατιστική κατανομή προσφορών F .

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μία προσφορά εργασίας την χρονική στιγμή i αποφέρει στο άτομο X_i ευρώ ενώ υπάρχει ένα σταθερό κόστος c ευρώ για την συντήρηση του κάθε χρονική περίοδο. Αν θεωρήσουμε ότι το άτομο που ψάχνει για εργασία, κρατάει την μεγαλύτερη προσφορά που του έχει γίνει μέχρι την χρονική περίοδο n τότε η απόδοση που θα έχει σταματώντας την περίοδο n θα είναι ίση με

$$Y_n = \max(X_1, \dots, X_n) - nc.$$

Η Y_n είναι μία τυχαία μεταβλητή. Είναι ενδιαφέρον να ρωτήσουμε την ερώτηση, ποιός θα είναι (αν βέβαια υπάρχει) ο βέλτιστος χρόνος για να σταματήσει η αναζήτηση εργασίας έτσι ώστε η απόδοση αυτή να γίνει μέγιστη. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένας χρόνος στάσης n^* τέτοιος ώστε

$$E[Y_{n^*}] = \sup_{\tau} E[Y_{\tau}]$$

όπου το \sup λαμβάνεται στο σύνολο όλων των χρόνων στάσης.

Το ερώτημα αυτό μπορεί να απαντηθεί χρησιμοποιώντας την θεωρία των martingale. Η λεπτομερής ανάλυση προβλημάτων τέτοιου τύπου αφήνεται για την συνέχεια. Αρκούμεστε προς το παρόν να αναφέρουμε ότι η απάντηση είναι ⁸ ότι είναι βέλτιστο να σταματήσουμε την αναζήτηση στο n που είναι τέτοιο ώστε $\max(X_1, \dots, X_n) \geq \gamma$ όπου γ είναι η λύση της εξίσωσης

$$E[(X - \gamma)^+] = c.$$

Με άλλα λόγια είναι βέλτιστο να συμπεριφερθούμε 'μυωπικά' και να αποδεχθούμε την πρώτη προσφορά που μας γίνεται αρκεί αυτή να είναι ίση από ένα κατώφλι γ . Αυτή η θεωρία χρησιμοποιήθηκε για να εξηγήσει την καμπύλη του Philips, η οποία είναι μία εμπειρική καμπύλη που συνδέει την υποαπασχόληση με τους μισθούς[31]. Παρόμοια προβλήματα εμφανίζονται στην αποτίμηση παραγώγων Αμερικάνικου τύπου.

2.8 Ορισμένες γενικεύσεις

Θα εισάγουμε εδώ ορισμένες έννοιες οι οποίες γενικεύουν τις έννοιες των martingale που είδαμε σε αυτό το κεφάλαιο ώστε να έχουν εφαρμογές και σε πιο γενικές περιπτώσεις.

Θα ξεκινήσουμε με την έννοια της τοπικής martingale (local martingale).

Ορισμός 2.8.1. Η στοχαστική διαδικασία M_t είναι μία **τοπική martingale (local martingale)** αν υπάρχει ακολουθία χρόνων στάσης $T_n, T_n \rightarrow \infty$, τέτοια ώστε η στοχαστική διαδικασία $X_t^{T_n} = X_{t \wedge T_n}$ να είναι μία martingale για κάθε n .

Αν η σταματημένη διαδικασία $X_t^{T_n} = X_{t \wedge T_n}$ να είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale για κάθε n , τότε η X_t ονομάζεται τετραγωνικά ολοκληρώσιμη τοπική martingale. Η ακολουθία T_n ονομάζεται τοπική ακολουθία (localizing sequence).

Από μία συνεχή martingale M_t μπορούμε να κατασκευάσουμε μία τοπική martingale χρησιμοποιώντας την ακολουθία χρόνων στάσης $T_n = \inf\{t : |M_t| > n\}$. Πολλά από τα αποτελέσματα που δώσαμε το κεφάλαιο αυτό μπορεί να διατυπωθούν για τοπικές martingales. Σαν παράδειγμα φέρνουμε το θεώρημα επιλεκτικής στάσης.

Θα δώσουμε τώρα τον ορισμό μιας διαδικασίας που είναι τοπικά πεπερασμένης μεταβολής (locally of bounded variation).

Ορισμός 2.8.2. Η στοχαστική διαδικασία A_t είναι μια διαδικασία τοπικά πεπερασμένης μεταβολής αν υπάρχουν χρόνοι στάσης R_n τέτοιοι ώστε η στοχαστική διαδικασία $A_{R_n \wedge t}$ να είναι φραγμένης μεταβολής.

Είναι δυνατό να δειχθεί ότι το θεώρημα 2.6.3 μπορεί να γενικευθεί στην περίπτωση τοπικών martingale οι οποίες είναι τοπικά πεπερασμένης μεταβολής.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε και την έννοια της semimartingale.

Ορισμός 2.8.3. Η στοχαστική διαδικασία X_t είναι μία **semimartingale** αν μπορεί να γραφεί σαν το άθροισμα μίας τοπικής martingale και μίας διαδικασίας τοπικά φραγμένης μεταβολής, δηλαδή αν $X_t = M_t + A_t$.

Για μία semimartingale X_t ισχύει $\langle X \rangle_t = \langle M \rangle_t$.

Η θεωρία των semimartingale βρίσκει εφαρμογές στην θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης και των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

⁸Βλ. πχ το κλασικό άρθρο των Chow και Robbins [6]

2.9 Παράρτημα: Αποδείξεις θεωρημάτων

Στο παράρτημα αυτό θα δώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος L^1 σύγκλισης για martingales. Για την απόδειξη του θεωρήματος είναι απαραίτητες (i) η απόδειξη ενός βασικού λήμματος, της ανισότητας των περασμάτων (upcrossing inequality) του Doob και (ii) η απόδειξη των ανισοτήτων για τις martingales που παραθέσαμε στην 2.5. Οι αποδείξεις που παρουσιάζονται εδώ είναι πλέον κλασσικές και η παρουσίασή τους βασίζεται στην παρουσίαση των [1] και [15].

2.9.1 Η ανισότητα των περασμάτων του Doob

Ένα πέρασμα της X_t από το διάστημα $[a, b]$, θεωρείται μία διάβαση της X_t που θα ξεκινήσει κάτω από το $x = a$ και θα βρεθεί επάνω από το $x = b$ χωρίς να ξαναβρεθεί κάτω από το $x = a$ μέχρι να περάσει επάνω από το $x = b$. Μαθηματικά, αυτό μπορεί να το εκφράσουμε ορίζοντας χρόνους $s_1 < t_1 < s_2 < t_2 < \dots < s_n < t_n \leq t$ τέτοιους ώστε $X_{s_k} \leq a$ και $X_{t_k} \geq b$ για κάθε k^9 . Το ελάχιστο άνω φράγμα (supremum) των n για τα οποία υπάρχουν τέτοιοι χρόνοι s_k και t_k είναι και ο αριθμός των περασμάτων του διαστήματος $[a, b]$ για την X_t , ο οποίος συμβολίζεται ως $N_a^b(t)$.

Λήμμα 2.9.1. Ανισότητα των περασμάτων του Doob

Έστω X_t μία (sub)martingale όπου το t παίρνει τιμές σε ένα αριθμήσιμο (countable) σύνολο και a, b συμβολίσουμε με $N_a^b(t)$ τον αριθμό των περασμάτων του διαστήματος $[a, b]$ από την X_t μέχρι την χρονική στιγμή t . Τότε

$$E[N_a^b(t)] \leq \frac{E[(X_t - a)^+]}{b - a}, \quad a < b$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι η X_t είναι μία διαδικασία σε διακριτό χρόνο και ότι $t \in \mathbb{Z}^+$. Η απεικόνιση $X \rightarrow (X - a)^+$ είναι κυρτή και συνεπώς η $Y_t = (X_t - a)^+$ είναι και αυτή μία submartingale. Τα περάσματα του διαστήματος $[a, b]$ από την X_t αντιστοιχούν στα περάσματα του διαστήματος $[0, b - a]$ από την Y_t . Χωρίς βλάβη της γενικότητας λοιπόν μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X_t \geq 0$ και $a = 0$.

Ας ορίσουμε τώρα τους χρόνους στάσης

$$\sigma_k = \inf\{n \geq \tau_{k-1}; X_n = 0\}, \quad \tau_k = \inf\{n \geq \sigma_k; X_n \geq b\}, \quad k \in \mathbb{N}$$

Είναι προφανές ότι για τους παραπάνω χρόνους στάσης ισχύει $0 = \tau_0 \leq \sigma_1 < \tau_1 < \sigma_2 < \dots$

Ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία

$$V_n = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{\{\sigma_k < n \leq \tau_k\}}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Λόγω της ειδικής μορφής της διαδικασίας V_n που εκφράζεται σαν άθροισμα δείκτριων συναρτήσεων, η διαδικασία V_n είναι προβλέψιμη. Ο μετασχηματισμός martingale $(1 - V) \bullet X$ είναι λοιπόν επίσης μία submartingale (εφόσον η $(1 - V)$ είναι μία μη αρνητική διαδικασία). Συνεπώς

$$E[((1 - V) \bullet X)_t] \geq E[((1 - V) \bullet X)_0] = 0$$

Από τον ορισμό του αριθμού των περασμάτων έχουμε ότι $(V \bullet X)_t \geq bN_0^b(t)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στην ανισότητα

$$bE[N_0^b(t)] \leq E[(V \bullet X)_t] \leq E[(1 \bullet X)_t] = E[X_t] - E[X_0] \leq E[X_t]$$

Αν θυμηθούμε την αντικατάσταση που κάναμε, στην οποία $X_t \rightsquigarrow (X - a)^+$ και $0 \rightsquigarrow a$, καταλήγουμε στο ζητούμενο. \square

2.9.2 Η απόδειξη των ανισοτήτων martingale

Για την μελέτη της σύγκλισης χρειαζόμαστε επιπλέον και την απόδειξη των ανισοτήτων martingale που αναφέρθηκαν στην 2.5. Θα ξεκινήσουμε με την απόδειξη του θεωρήματος 2.5.1 το οποίο παραθέτουμε ξανά για την ευκολία του αναγνώστη.

⁹Ο ακριβής ορισμός των χρόνων αυτών θα δοθεί στην απόδειξη του λήμματος 2.9.1

Θεώρημα 2.5.1 Έστω X μία μη αρνητική submartingale. Τότε για $c > 0$

$$cP(\sup_{k \leq n} X_k \geq c) \leq E[X_n; \{\sup_{k \leq n} X_k \geq c\}] \leq E[X_n]$$

Απόδειξη: Θα εργαστούμε σε διακριτό χρόνο. Ας ορίσουμε τον χρόνο στάσης $\tau = n \wedge \inf\{k; X_k \geq c\}$ και το σύνολο $B = \{\max_{k \leq n} X_k \geq c\}$ ¹⁰. Ο χρόνος στάσης τ είναι φραγμένος εφόσον $\tau \leq n$, και το σύνολο B μετρήσιμο ως προς την σ-άλγεβρα \mathcal{F}_τ δηλαδή $B \in \mathcal{F}_\tau$. Για το σύνολο B ισχύει ότι $cP(B) \leq E[X_\tau; B]$. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό και το θεώρημα επιλεκτικής στάσης για τον χρόνο στάσης τ καταλήγουμε στην σχέση

$$cP(B) \leq E[X_\tau; B] \leq E[X_n; B] \leq E[X_n^+]$$

το οποίο και δείχνει την ανισότητα που θέλαμε να αποδείξουμε. Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα επιλεκτικής στάσης στην μορφή που μας χρειάζεται, βασιστήκαμε στο γεγονός ότι ο χρόνος στάσης τ είναι φραγμένος. \square

Σχόλιο: Η ανισότητα αυτή ισχύει και για συνεχή χρόνο, και η απόδειξη της βασίζεται στην παραπάνω απόδειξη και την χρήση του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης.

Θα ασχοληθούμε τώρα με την απόδειξη του θεωρήματος 2.5.2, την εκφώνηση του οποίου παραθέτουμε ξανά για την ευκολία του αναγνώστη.

Θεώρημα 2.5.2 Έστω $p > 1$. Αν X_t είναι μία martingale ή μία θετική submartingale τότε

$$E[(\sup_{s \leq t} |X_s|)^p] \leq C E[|X_t|^p]$$

Απόδειξη: Θα εργαστούμε σε διακριτό χρόνο. Η απόδειξη σε συνεχή χρόνο μπορεί να πραγματοποιηθεί χρησιμοποιώντας την απόδειξη σε διακριτό χρόνο και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης. Ας ορίσουμε για ευκολία στον συμβολισμό

$$X_t^* = \sup_{s \leq t} |X_s|, \quad X_t = \sup_t |X_t|, \quad \|X\|_p^p = E[|X|^p]$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen έχουμε ότι $|X_t|$ είναι μία submartingale στην οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα του θεωρήματος 2.5.1 για να λάβουμε ότι

$$(2.2) \quad cP\{X_t^* > c\} \leq E[|X_t|; \{X_t^* > c\}], \quad c > 0$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα ένα αποτέλεσμα που αποδείξαμε στο παράδειγμα ;;

$$\|X_t^*\|_p^p = p \int_0^\infty P(X_t^* > c) c^{p-1} dc$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση 2.2 και κάνοντας χρήση της ανισότητας του Hölder στο ολοκλήρωμα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \|X_t^*\|_p^p &\leq \int_0^\infty E[|X_t|; X_t^* > c] c^{p-2} dc \\ &= p \int_0^\infty \int_{\{X_t^* > c\}} |X_t| c^{p-2} dc dP \\ &= p \int |X_t| \left\{ \int_0^{X_t^*} c^{p-2} dc \right\} dP \\ &= q \int |X_t| (X_t^*)^{p-1} dP \leq q \|X_t\|_p \|X_t^*\|_p^{p-1} \end{aligned}$$

¹⁰ ή διαφορετικά $B = \{\omega : \max_{k \leq n} X_k(\omega) \geq c\}$

όπου το q ικανοποιεί την σχέση $p^{-1} + q^{-1} = 1$. Διαιρώντας και τα δύο μέλη της παραπάνω ανισότητας με το $\|X_t^*\|_p^{p-1}$ καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

Σχόλιο: Για να ισχύουν τα παραπάνω χρειάζεται να υποθέσουμε ότι $\|X_t\|_p < \infty$ από το οποίο προκύπτει ότι $\|X_t\|_p < \infty$ για $s \leq t$ και συνεπώς $\|X_t^*\|_p < \infty$.

2.9.3 Απόδειξη του θεωρήματος L^1 -σύγκλισης

θα ασχοληθούμε τώρα με την απόδειξη των θεωρημάτων σύγκλισης για martingales. θα ξεκινήσουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1. Παραθέτουμε ξανά την εκφώνηση του θεωρήματος για την διευκόλυνση του αναγνώστη.

Θεώρημα 2.4.1 Έστω X_t μία L^1 (sub)martingale δηλαδή ισχύει $E[|X_t|] < \infty$. Τότε το όριο $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t$ υπάρχει σ.β.

Απόδειξη: Θα εργαστούμε αρχικά σε διακριτό χρόνο. Έστω $N_a^b = \lim_{t \rightarrow \infty} N_a^b(t)$. Για κάθε ζεύγος a και b ρητών, χρησιμοποιώντας την ανισότητα των περασμάτων και το θεώρημα μονότονης σύγκλισης μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$E[N_a^b] \leq c(b-a)^{-1}$$

όπου c είναι μία σταθερά. Από το παραπάνω βλέπουμε ότι $N_a^b < \infty$, σ.β. Αν τα a και b είναι οποιοδήποτε πραγματικοί, μπορούμε να προσεγγίσουμε το διάστημα $[a, b]$ σαν ένωση διαστημάτων $[a, b]$ όπου a και b ρητοί. Παίρνοντας την ένωση αυτή βλέπουμε ότι δεν είναι δυνατό η ακολουθία X_t να έχει $\limsup X_t > \liminf X_t$. Συνεπώς η ακολουθία X_t συγκλίνει σ.β σε κάποιο όριο X . Θα πρέπει να αποδείξουμε ότι το όριο αυτό είναι και φραγμένο. Από το λήμμα του Fatou έχουμε ότι

$$E[\lim_{t \rightarrow \infty} |X_t|] \leq \sup_t |X_t| < \infty$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η X_t είναι L^1 (sub)martingale. Από αυτό καταλήγουμε στο ότι X_t συγκλίνει σε ένα φραγμένο όριο. \square

Σχόλιο: Το θεώρημα ισχύει και για supermartingales. Αρκεί να θέσουμε $-X_t$ όπου X_t .

2.9.4 Απόδειξη του θεωρήματος της σύγκλισης ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale

Θα αποδείξουμε τώρα το θεώρημα 2.4.2 σχετικά με την σύγκλιση ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale. Παραθέτουμε το θεώρημα για την ευκολία του αναγνώστη.

Θεώρημα 2.4.2 Σύγκλιση ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων martingale

(i) Έστω X_t ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη supermartingale. Τότε υπάρχει τυχαία μεταβλητή X τέτοια ώστε $\lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X$ και η σύγκλιση είναι στον L^1 .

(ii) Αν η X_t είναι martingale τότε μπορεί να γραφεί σαν $X_t = E[X | \mathcal{F}_t]$ όπου $X = \lim_{t \rightarrow \infty} X_t = X$ το όριο της X_t στον L^1 , και $\mathcal{F}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ (η σ -άλγεβρα που παράγεται από την X_t).

Απόδειξη: Η σύγκλιση στον L^1 ακολουθεί από την σχεδόν βέβαιη σύγκλιση της X_t και την ιδιότητα της ομοιόμορφης ολοκληρωσιμότητας. Αν $t < n$, ισχύει λόγω του ότι η X_t είναι martingale ότι $X_t = E[X_n | \mathcal{F}_t]$. Έστω $A \in \mathcal{F}_t$. Τότε

$$E[X_t; A] = E[X_n; A] \rightarrow E[X_\infty; A]$$

αφού η X_n όριο στον L^1 , το οποίο ονομάζουμε X_∞ . Εφόσον η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $A \in \mathcal{F}_t$, μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$X_t = E[X_\infty | \mathcal{F}_t]$$

Αυτό και ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Θα δόσουμε τώρα και την απόδειξη του θεωρήματος σύγκλισης της υπό συνθήκη μέσης τιμής ως προς την διήθηση (Θεώρημα 2.4.3). Για την ευκολία των αναγνωστών παραθέτουμε ξανά και την εκφώνηση του θεωρήματος.

Θεώρημα 2.4.3 Έστω X μία L^1 τυχαία μεταβλητή και \mathcal{F}_t μία διήθηση. Τότε

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[X | \mathcal{F}_t] = E[X | \mathcal{F}_\infty]$$

όπου η σύγκλιση είναι σχεδόν βέβαιη ($\sigma.$ $\beta.$) και L^1 -σύγκλιση. Ως \mathcal{F}_∞ ορίζεται η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t)$ δηλαδή η σ -άλγεβρα που παράγεται από τα σύνολα $A \in \bigcup_{t \geq 0} \mathcal{F}_t$.

Απόδειξη: Ας εργαστούμε για απλότητα σε διακριτό χρόνο. Η στοχαστική διαδικασία $M_k = E[X | \mathcal{F}_k]$ είναι μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale συνεπώς υπάρχει τυχαία μεταβλητή $M \in L^1(P)$ τέτοια ώστε $M_k \rightarrow M$, καθώς $k \rightarrow \infty$ $\sigma.$ $\beta.$ και στον L^1 . Αρκεί τώρα να δείξουμε ότι $M = E[X | \mathcal{F}_\infty]$. Από τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής αρκεί να δείξουμε ότι

$$(2.3) \quad \int_A X dP = \int_A M dP, \quad \forall A \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{F}_k$$

Παρατηρούμε ότι

$$\| M_k - E[M | \mathcal{F}_k] \|_{L^1(P)} = \| E[M_k - M | \mathcal{F}_k] \|_{L^1(P)} \leq \| M_k - M \|_{L^1(P)}$$

Το δεξιά μέλος τείνει στο 0 καθώς $k \rightarrow \infty$ άρα ισχύει ότι

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \| M_k - E[M | \mathcal{F}_k] \|_{L^1(P)} = 0$$

Από αυτό μπορούμε να καταλήξουμε στην εξίσωση (2.3) και το ζητούμενο έπεται. \square

2.10 Βασικά σημεία του κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγαμε βασικές έννοιες της θεωρίας των martingale στις οποίες βασίζεται η θεωρία των χρηματοοικονομικών μαθηματικών. Οι βασικές έννοιες του κεφαλαίου αυτού (ορισμένες από τις οποίες συναντήσαμε από το προηγούμενο κεφάλαιο) είναι οι ακόλουθες:

- Δειγματικός χώρος, σ -άλγεβρες και μέτρα πιθανότητας και η σχέση τους με τις έννοιες της δομής πληροφορίας. Ορισμένες από τις έννοιες αυτές είναι τεχνικές και ίσως στρυφνές σε πρώτη επαφή, αλλά είναι δυνατό να έχετε κάποια διαισθητική ιδέα για το τι αντιπροσωπεύουν αυτές.
- Υπό συνθήκη μέση τιμή ως η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την τιμή κάποιας τυχαίας μεταβλητής δεδομένης της πληροφορίας που περιέχεται σε κάποια σ -άλγεβρα. Για την αντιμετώπιση των martingale είναι απαραίτητο να ανατρέξετε στις ιδιότητες της υπό συνθήκης μέσης τιμής που παρουσιάστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο. Τονίζουμε ξανά την ανάγκη διαισθητικής κατανόησης των ιδιοτήτων αυτών.
- Διήθηση: Μία δομή αύξουσας πληροφορίας.
- Διαδικασίες martingale και οι ιδιότητες τους. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται στις ιδιότητες των martingale ως προς τους χρόνους στάσης (π.χ. θεώρημα επιλεκτικής στάσης).
- Οι martingales εμφανίζονται με φυσικό τρόπο στην οικονομική. Ένα παράδειγμα είναι ποσότητες που σχετίζονται με τιμές χρεογράφων.

Κεφάλαιο 3

Η κίνηση Brown

Μία από τις πιο σημαντικές στοχαστικές διαδικασίες είναι η κίνηση Brown. Η κίνηση Brown (που μπορεί κανείς να την συναντήσει και με το όνομα διαδικασία Wiener) παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον τόσο από θεωρητικής απόψεως όσο και από πλευράς εφαρμογών. Η στοχαστική αυτή διαδικασία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την κίνηση Brown και θα παρουσιάσουμε τις κυριότερες ιδιότητες της.

3.1 Ορισμός της κίνησης Brown

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό της κίνησης Brown

Ορισμός 3.1.1. Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία B_t η οποία παίρνει τιμές στον \mathbb{R} και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- (i) Αν $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες (ανεξάρτητες μεταβολές)
- (ii) Αν $s, t \geq 0$, τότε

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right),$$

όπου A κάποιο σύνολο Borel, δηλαδή οι μεταβολές της κίνησης Brown είναι κατανομημένες με την κανονική κατανομή (κατανομή Gauss).

- (iii) Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η $t \rightarrow B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Οι τρεις αυτές ιδιότητες ορίζουν μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία. Μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά μαθηματικά η ύπαρξη μίας στοχαστικής διαδικασίας με τις παραπάνω ιδιότητες.

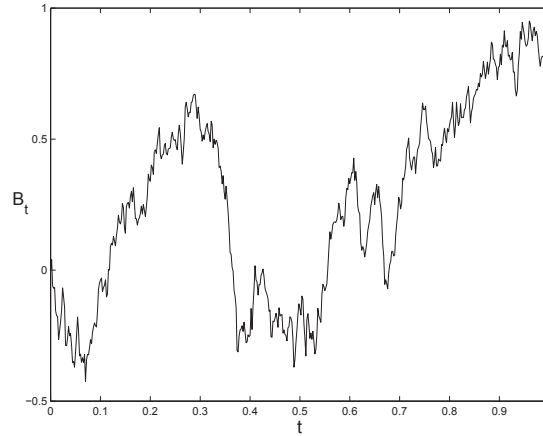
Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να συνάγουμε τις ιδιότητες του μέτρου μ που αυτή επάγει (μέτρο Wiener)

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \dots \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$$

όπου $x_0 = x$, $t_1 = 0$, και

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{1/2}} \exp\left(-\frac{|y - x|^2}{2t}\right)$$

Η παραπάνω ποσότητα είναι κατά κάποιο τρόπο η πιθανότητα να βρίσκεται η στοχαστική διαδικασία τις χρονικές στιγμές t_i στα υποσύνολα $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Μπορούμε να σκεφτούμε τα υποσύνολα αυτά σαν διαστήματα του \mathbb{R} οπότε



Σχήμα 3.1: Μία τροχιά της κίνησης Brown .

και η παραπάνω ποσότητα είναι ουσιαστικά η πιθανότητα να βρισκεται η κίνηση Brown τις χρονικές στιγμές t_i σε συγκεκριμένα διαστήματα του \mathbb{R} . Η ποσότητα

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = P(B_{t_1} \in A_1, B_{t_2} \in A_2, \dots, B_{t_n} \in A_n)$$

ονομάζεται **πεπερασμένης διάστασης κατανομή** και η γνώση της είναι πολύ σημαντική στο να κατασκευάσουμε το μέτρο μ (Θεώρημα επέκτασης του Kolmogorov).

Η κατανομή του B_t εξαρτάται από το αρχικό σημείο στο οποίο ξεκινάμε την διαδικασία, δηλαδή το σημείο B_0 . Αν $B_0 = x$ τότε η συνάρτηση κατανομής θα συμβολίζεται $P_x(B_t \in A)$ για κάποιο σύνολο Borel A . Η μέση τιμή ή υπο συνθήκη μέση τιμή ως προς το μέτρο αυτό θα συμβολίζεται E_x ή $E_x[\cdot]$ αντιστοίχως.

Σχόλιο: Πολλοί συγγραφείς στον ορισμό τους για την κίνηση Brown παίρνουν ότι η κίνηση Brown ξεκινάει από το 0 (βλ. π.χ. [4]). Εμείς ακολουθούμε την σύμβαση να αφήνουμε την κίνηση Brown να ξεκινάει σε οποιοδήποτε σημείο x (βλ. π.χ. [29]). Το σημείο που θα ξεκινάει η κίνηση Brown θα γίνεται σαφές στο μέτρο πιθανότητας που θα χρησιμοποιείται και αν δεν αναφέρεται τίποτα θα εννοείται ότι ξεκινάμε από το 0. Η κίνηση Brown που ξεκινάει στο 0 συνήθως αναφέρεται και σαν τυπική (standard) κίνηση Brown.

Παράδειγμα 3.1.1. Αν B_t είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = 0$ τότε

$$E[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dx$$

(Η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο Wiener που επάγει η κίνηση Brown που ξεκινάει στο 0) Χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι $E[B_t^2] = t$.

Παράδειγμα 3.1.2. Αν B_t είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = x$ τότε

$$E_x[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dx$$

(Η μέση τιμή λαμβάνεται ως προς το μέτρο Wiener που επάγει η κίνηση Brown που έχει αρχίσει στο σημείο x). Χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι $E_x[B_t] = x$ και ότι $E_x[(B_t - x)^2] = t$. Φυσικά ισχύει και ότι

$$E_x[f(B_t)] = E_0[f(x + B_t)] \equiv E[f(x + B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + y) \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dx$$

όπου η δεύτερη και τρίτη μέση τιμή είναι επάνω σε μία κίνηση Brown που ξεκινάει στο 0.

Παράδειγμα 3.1.3. Η 1-διάστατη κίνηση Brown και αλλαγή χρονικής κλίμακας. Αν $B_0 = 0$ τότε για κάθε $t > 0$

$$\{B_{st}, s \geq 0\} = \{t^{1/2}B_s, s \geq 0\}$$

όπου η ισότητα σημαίνει ότι οι δύο αυτές οικογένειες έχουν την ίδια (πεπερασμένης διάστασης) κατανομή. Πράγματι,

$$\begin{aligned} P(B_{st} \leq a) &= \frac{1}{(2\pi st)^{1/2}} \int_{-\infty}^a \exp\left(-\frac{x^2}{2st}\right) dx \\ &= \frac{1}{(2\pi st)^{1/2}} \int_{-\infty}^{at^{-1/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2s} t^{1/2} dx_1\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi s)^{1/2}} \int_{-\infty}^{at^{-1/2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2s}\right) dx_1 \\ &= P(B_s \leq at^{-1/2}) = P(t^{1/2} B_s \leq a) \end{aligned}$$

οπότε το αποτέλεσμα που θέλουμε αποδείχθηκε. Στην απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητών $x_1 = t^{-1/2}x$ στο ολοκλήρωμα.

Παράδειγμα 3.1.4. Ένα μοντέλο για τις τιμές χρεογράφων (securities). Ένα μοντέλο για τις τιμές χρεογράφων (π.χ. τιμές μετοχών) το οποίο θα συναντήσουμε πολύ συχνά στο βιβλίο αυτό, είναι ότι η τιμή S_t μίας μετοχής την χρονική στιγμή t δίνεται από τον τύπο

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

όπου r και σ είναι θετικές πραγματικές σταθερές, S_0 μία ντετερμινιστική αρχική συνθήκη και B_t μία μονοδιάστατη κίνηση Brown. Ποιά θα είναι η μαθηματική προσδοκία (μέση τιμή) για την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t , $E[S_t]$. Είναι η S_t μία martingale ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t που παράγεται από την κίνηση Brown.

Στο μέλλον όποτε χρησιμοποιούμε το σύμβολο της μέσης τιμής χωρίς συγκεκριμένη αναφορά στο μέτρο το οποίο χρησιμοποιούμε θα υποθέτουμε ότι είναι το μέτρο κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία B_t είναι μία κίνηση Brown. Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} E[S_t] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma x\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t} + \sigma x\right) dx = S_0 \exp(rt) \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας δείχνει ότι η στοχαστική διαδικασία S_t δεν είναι μία martingale εφόσον για μία martingale θα περιμέναμε $E[S_t] = E[S_0]$ το οποίο εδώ δεν ισχύει αφού $\exp(rt) \neq 1$. Αυτό το αποτέλεσμα βέβαια ισχύει με βάση το μέτρο κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία B_t είναι μία κίνηση Brown. Όπως θα δούμε στην συνέχεια υπάρχουν μέτρα Q κάτω από τα οποία η στοχαστική διαδικασία S_t μπορεί να είναι martingale.

Παράδειγμα 3.1.5. Οι ιδιότητες των μεταβολών της κίνησης Brown Σύμφωνα με την ιδιότητα (ii) του ορισμού της κίνησης Brown μπορούμε να δούμε ότι

$$P(B_t - B_s \leq a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

συνεπώς η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $X = B_t - B_s$ είναι η συνάρτηση $p(t-s, x, 0) = p(t-s, 0, x)$. Από αυτό μπορούμε να δούμε ότι

$$E[f(B_t - B_s)] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) dx$$

Πιο συγκεκριμένα έχουμε

$$\begin{aligned} E[(B_t - B_s)] &= 0 \\ E[(B_t - B_s)^2] &= t - s \end{aligned}$$

Επίσης αν $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$, η σ -άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown μέχρι την χρονική στιγμή s , τότε λόγω της ιδιότητας (i) έχουμε ότι η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι **ανεξάρτητη** από την σ -άλγεβρα \mathcal{F}_s . Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπό συνθήκης μέσης τιμής έχουμε

$$E[f(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] = E[f(B_t - B_s)]$$

και πιο συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} E[(B_t - B_s) | \mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)] = 0 \\ E[(B_t - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] &= E[(B_t - B_s)^2] = t - s \end{aligned}$$

Κλείνοντας το παράδειγμα αυτό θα θέλαμε να επιστήσουμε την προσοχή του αναγνώστη ότι η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της \mathcal{F}_s και **όχι** η ίδια η B_t ! Έτσι έχουμε ότι

$$E[B_t | \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + E[B_s | \mathcal{F}_s] = B_s$$

Τι αποτέλεσμα θα έπρεπε να πάρουμε αν η B_t ήταν ανεξάρτητη της \mathcal{F}_s ;

Παράδειγμα 3.1.6. Η χαρακτηριστική συνάρτηση της κίνησης Brown Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της καθώς και την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της.

Θα υπολογίσουμε πρώτα την χαρακτηριστική συνάρτηση των μεταβολών της κίνησης Brown:

$$\begin{aligned} \phi_{B_t - B_s}(\lambda) &= E[\exp(i\lambda(B_t - B_s))] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2(t-s)}\right) \exp(i\lambda x) dx \end{aligned}$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος αυτού αρκεί να γράψουμε την ποσότητα η οποία είναι μέσα στο εκθετικό σαν ένα τέλειο τετράγωνο

$$i\lambda x - \frac{x^2}{2(t-s)} = -\frac{(x - i\lambda(t-s))^2}{2(t-s)} - \frac{\lambda^2(t-s)}{2}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση και εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε τελικά ότι

$$(3.1) \quad \phi_{B_t - B_s}(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2(t-s)}{2}\right)$$

Από την χαρακτηριστική αυτή συνάρτηση μπορούμε να υπολογίσουμε όλες τις πολυωνυμικές ροπές των μεταβολών της κίνησης Brown. Αυτό μπορεί να γίνει παίρνοντας τις ανώτερες παραγώγους της $\phi_{B_t - B_s}(\lambda)$ ως προς το λ και θέτοντας $\lambda = 0$. Για παράδειγμα μπορούμε να δούμε ότι

$$E[(B_t - B_s)^4] = 3(t-s)^2$$

Για την εύρεση της χαρακτηριστικής συνάρτησης της κίνησης Brown αρκεί στην εξίσωση (3.1) να θέσουμε $s = 0$ για να λάβουμε

$$\phi_{B_t}(\lambda) = \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right)$$

Παράδειγμα 3.1.7. Βρείτε την από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών B_t και B_s και χρησιμοποιώντας την υπολογίστε την μέση τιμή $E[B_t B_s]$.

Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $s < t$. Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων της κίνησης Brown (συγκεκριμένα των ιδιοτήτων (i) και (ii) του ορισμού) μπορούμε να δούμε ότι

$$f_{B_t B_s}(x, y) = p(s, 0, x)p(t-s, x, y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{s(t-s)}} \exp\left(-\frac{x^2}{2s}\right) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2(t-s)}\right)$$

Η μέση τιμή της ποσότητας $B_t B_s$ μπορεί να γραφεί σαν ολοκλήρωμα επάνω στην από κοινού κατανομή

$$\begin{aligned} E[B_t B_s] &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xyp(s, 0, x)p(t-s, x, y) dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} xp(s, 0, x) \left(\int_{-\infty}^{\infty} yp(t-s, x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(s, 0, x) dx = s \end{aligned}$$

Οι λεπτομέρειες της ολοκλήρωσης αφήνονται στον αναγνώστη. Γενικά λοιπόν καταλήγουμε ότι

$$E[B_s B_t] = s \wedge t = \min(s, t)$$

3.2 Δύο σημαντικές ιδιότητες

Μία πολύ σημαντική ιδιότητα της κίνησης Brown είναι ότι έχει την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Οι ιδιότητες αυτές είναι πολύ χρήσιμες στους υπολογισμούς με την κίνηση Brown. Πιο συγκεκριμένα, η χρήση της ιδιότητας Markov για παράδειγμα μπορεί να διευκολύνει σημαντικά το υπολογισμό υπό συνθήκη μέσων τιμών ορισμένων συναρτήσεων της κίνησης Brown ως προς συγκεκριμένες σ-άλγεβρες που σχετίζονται με την ιστορία της κίνησης Brown. Τέτοιοι υπολογισμοί εμφανίζονται συχνά στον υπολογισμό των τιμών ορισμένων παραγώγων συμβολαίων όπως θα δούμε και στην συνέχεια. Μία άλλη εφαρμογή είναι στην αρχή της ανάκλασης, η οποία βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στον υπολογισμό των τιμών εξωτικών παραγώγων π.χ. παράγωγα συμβόλαια με φράγματα (barrier options). Αξίζει να τονιστεί ότι η κίνηση Brown δεν είναι η μόνη στοχαστική διαδικασία που έχει την ιδιότητα Markov. Θα δούμε στα επόμενα μία γενική κλάση στοχαστικών διαδικασιών που παράγεται από την κίνηση Brown και που έχει την ιδιότητα αυτή. Επίσης πολλές ενδιαφέρουσες στοχαστικές διαδικασίες π.χ. διαδικασίες ανανέωσης κλπ έχουν την ιδιότητα αυτή (βλ. π.χ. [8], [38]).

3.2.1 Η ιδιότητα Markov

Διαισθητικά το ότι η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov σημαίνει ότι αν πάρουμε κάποιο $s \geq 0$ τότε η $B_{t+s} - B_s$ είναι μία κίνηση Brown η οποία είναι ανεξάρτητη από το τι συνέβη πριν την χρονική στιγμή s . Έτσι, η κίνηση Brown **ξεχνάει** το παρελθόν της πλήρως και ότι συμβαίνει από το την χρονική στιγμή s και πέρα εξαρτάται μόνο από την τελική τιμή της κίνησης Brown δηλαδή από το B_s . Επίσης, η $B_{t+s} - B_s$ είναι και αυτή μία κίνηση Brown η οποία έχει μέση τιμή 0 και διασπορά $(t+s) - s = t$, δηλαδή αν παρακολουθήσουμε την διαδικασία $B_{t+s} - B_s$ είναι σαν να παρακολουθούμε μία διαδικασία Brown η οποία ξεκινάει στο 0 και 'τρέχει' για χρόνο t . Η ιδιότητα αυτή προέρχεται από τον ορισμό της κίνησης Brown (δείτε επίσης και το παράδειγμα 3.1.5).

Θα προσπαθήσουμε τώρα να μετατρέψουμε παραπάνω διαισθητική πρόταση σε μία πιο ακριβή πρόταση. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια της υπό συνθήκη μέσης τιμής με τον ακόλουθο τρόπο:

Έστω $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown ως την χρονική στιγμή s . Αυτή η σ-άλγεβρα είναι η μικρότερη σ-άλγεβρα η οποία κάνει την τυχαία μεταβλητή B_r , $r \leq s$ μετρήσιμη. Κατά κάποιο τρόπο η \mathcal{F}_s περιέχει ότι όλη την πληροφορία σχετικά με το τι συνέβη στην κίνηση Brown μέχρι την χρονική στιγμή s .

Αν f είναι φραγμένη συνάρτηση τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ ισχύει ότι

$$E_x[f(B_{t+s} - B_s) | \mathcal{F}_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβολών της κίνησης Brown. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$E_x[f(B_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s + B_s) | \mathcal{F}_s]$$

και αφού το $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητο της άλγεβρας \mathcal{F}_s και το B_s πλήρως γνωστό μέχρι την χρονική στιγμή s μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουμε δεδομένη την τιμή του $B_s = z$ και γράφουμε

$$E_x[f(B_{t+s} - B_s + B_s) | \mathcal{F}_s] = E_x[f(B_{t+s} - B_s + z)]$$

Το $B_{t+s} - B_s$ όμως είναι και αυτό μία κίνηση Brown η οποία αρχίζει στο 0 και 'τρέχει' για χρόνο $t + s - s = t$. Άρα, η διαδικασία $B_{t+s} - B_s + z$ είναι ισοδύναμη σε νόμο (έχει την ίδια κατανομή) με μία κίνηση Brown η οποία ξεκινάει στο σημείο z και 'τρέχει' για χρόνο t . Συνεπώς

$$\begin{aligned} E_x[f(B_{t+s} - B_s + z)] &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y + z) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y - z)^2}{2t}\right) dy = E_z[f(B_t)] = E_{B_s}[f(B_t)] \end{aligned}$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$(3.2) \quad E_x[f(B_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(B_t)] = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \frac{1}{\sqrt{2t}} \exp\left(-\frac{(y - B_s)^2}{2t}\right) dy$$

Η ιδιότητα αυτή είναι μία έκφραση της ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown.

Οι σχέσεις που εκφράζουν την ιδιότητα Markov ως προς τις μέσες τιμές μπορεί να γραφούν ισοδύναμα και ως σχέσεις για τις πιθανότητες, αν αντί σαν f επιλέξουμε την δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου. Για παράδειγμα η ιδιότητα Markov δίνει

$$P_x[B_{t+s} \in A | \mathcal{F}_s] = P_{B_s}(B_t \in A)$$

για κάθε σύνολο Borel A .

Σχόλιο Θα πρέπει να είναι φανερό ότι μία ισοδύναμη μορφή της ιδιότητας Markov είναι η

$$E_x[f(B_t) | \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[f(B_{t-s})], \quad s \leq t$$

Το παραπάνω μας λέει με απλά λόγια ότι αν πάρουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή κάποιας συνάρτησης της κίνησης Brown τη χρονική στιγμή t έχοντας υπόψη την 'ιστορία' της κίνησης Brown μέχρι την χρονική στιγμή s αρκεί να υπολογίσουμε την ίδια ποσότητα επάνω σε μία κίνηση καινούργια Brown που ξεκινάει στην θέση που είχε φτάσει η αρχική κίνηση Brown την χρονική στιγμή s , δηλαδή την B_s και 'τρέχει' για χρονική διάρκεια $t - s$! Όλη η ιστορία της αρχικής κίνησης Brown πριν από την χρονική στιγμή s μας είναι άχρηστη!

3.2.2 Η χρήση του τελεστή μετατόπισης

Η ιδιότητα Markov πολλές φορές εμφανίζεται σε μία κάπως πιο αφηρημένη μορφή, που όμως είναι αρκετά χρήσιμη σε διάφορες εφαρμογές. Η μορφή αυτή κάνει χρήση του τελεστή μετατόπισης θ_s (shift operator) ο οποίος μας μετατοπίζει επάνω σε μία συγκεκριμένη τροχιά της στοχαστικής διαδικασίας (στην συγκεκριμένη περίπτωση της κίνησης Brown) κατά μία χρονική μετατόπιση s . Ένας τρόπος να το γράψουμε αυτό συμβολικά είναι θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή B_t σαν την τυχαία συνάρτηση $B(\omega(t))$, όπου $\omega(t)$ είναι το αποτέλεσμα του τυχαίου πειράματος την χρονική στιγμή t από το οποίο και εξαρτάται η τιμή της τυχαίας μεταβλητής B_t . Μπορούμε με τον τρόπο αυτό να ορίσουμε την δράση του τελεστή θ_s επάνω στο ω με τον ακόλουθο τρόπο

$$(\theta_s \omega)(t) = \omega(t + s)$$

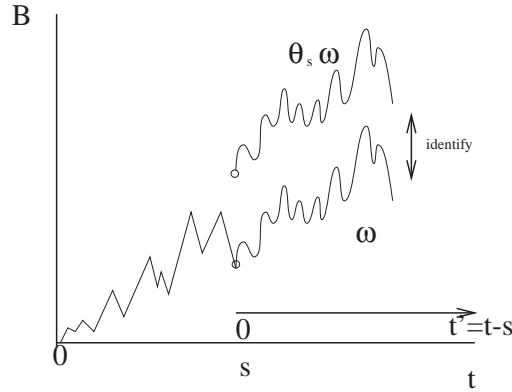
Συνεπώς

$$B_t \circ \theta_s = B((\theta_s \omega)(t)) = B_{t+s}$$

Η δράση του τελεστή μετατόπισης θ_s επάνω σε μία τροχιά της κίνησης Brown φαίνεται στο σχήμα 3.2.

Η δράση του τελεστή μετατόπισης μπορεί να γενικευθεί με βάση τα παραπάνω, σε οποιαδήποτε απεικόνιση που η τιμή της εξαρτάται από την κίνηση Brown. Αν $Y = Y(\omega(t), t)$ όπου η εξάρτηση από το $\omega(t)$ υποδηλώνει την εξάρτηση της Y από την θέση της κίνησης Brown την χρονική στιγμή t , τότε

$$Y \circ \theta_s = Y((\theta_s \omega)(t), t) = Y(\omega(t + s), t)$$



Σχήμα 3.2: Η επίδραση του τελεστή μετατόπισης θ_s σε μία τροχιά της κίνησης Brown .

Πρέπει να το τονιστεί ότι ο τελεστής μετατόπισης δρά **μόνο** επάνω στο $\omega(t)$ δηλαδή επάνω στο τυχαίο μέρος της Y και **όχι** γενικά επάνω στο t !

Ας σημειωθεί ότι αν $Y = f(B_t)$ τότε $Y \circ \theta_s = f(B_{s+t})$.

Έχοντας ως βάση την ιδιότητα Markov στην μορφή της εξίσωσης (3.2) και τον ορισμό του τελεστή μετατόπισης μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω θεώρημα, το οποίο αποτελεί μία εναλλακτική μορφή της ιδιότητας Markov.

Θεώρημα 3.2.1. (Ιδιότητα Markov) Έστω Y μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και θ_s ο τελεστής μετατόπισης (shift operator) ο οποίος έχει την ακόλουθη δράση $(\theta_s \omega)(t) = \omega(t+s)$. Τότε

$$E_x[Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y]$$

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Ο λόγος που δίνουμε εδώ την ιδιότητα Markov στην μορφή αυτή είναι γιατί η Y μπορεί να είναι μία μεταβλητή που εξαρτάται από την B_t αλλά όχι απαραίτητα της μορφής $f(B_t)$. Αυτό φαίνεται στο ακόλουθο παράδειγμα:

Παράδειγμα 3.2.1.1. Ορίζουμε την συνάρτηση $u(x, t) = E_x[\int_0^t g(B_r) dr]$, όπου g είναι μια φραγμένη συνάρτηση. Χρησιμοποιήστε την ιδιότητα Markov για να συμπεράνετε ότι αν $0 < s < t$ τότε

$$E_x[\int_0^t g(B_r) dr | \mathcal{F}_s] = \int_0^s g(B_r) dr + u(t-s, B_s)$$

Ξαναγράφουμε το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής στην μορφή

$$(3.3) \quad \begin{aligned} E_x[\int_0^s g(B_r) dr | \mathcal{F}_s] + E_x[\int_s^t g(B_r) dr | \mathcal{F}_s] \\ = \int_0^s g(B_r) dr + E_x[\int_s^t g(B_r) dr | \mathcal{F}_s] \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\int_0^s g(B_r) dr$ είναι \mathcal{F}_s -μετρήσιμη καθώς και τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής. Ορίζοντας $Y = \int_0^{t-s} g(B_r) dr$ μπορούμε να δούμε ότι

$$E_x[\int_s^t g(B_r) dr | \mathcal{F}_s] = E_x[Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s]$$

και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα Markov στην τελευταία έκφραση καταλήγουμε ότι

$$E_x[\int_s^t g(B_r) dr | \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y] = E_{B_s}[\int_0^{t-s} g(B_r) dr] = u(t-s, B_s)$$

Αντικαθιστώντας την έκφραση αυτή στην εξίσωση (3.3) παίρνουμε το αποτέλεσμα που θέλουμε.

Παράδειγμα 3.2.2. Υπο συνθήκη μέση τιμή των τιμών μιάς μετοχής. Θεωρούμε όπως και στο παράδειγμα 3.1.4 ότι η τιμή S_t μιάς μετοχής την χρονική στιγμή t δίνεται από τη σχέση

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

όπου r και σ είναι θετικές πραγματικές σταθερές και B_t είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown. Να ευρεθεί η υπο συνθήκη μέση τιμή $E[S_{t+\tau} | \mathcal{F}_t]$.

Μπορούμε να γράψουμε

$$S_{t+\tau} = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau + \sigma(B_{t+\tau} - B_t)\right)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπο-συνθήκη μέσης τιμής λαμβάνουμε:

$$(3.4) \quad E[S_{t+\tau} | \mathcal{F}_t] = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\tau\right) E[\exp(\sigma(B_{t+\tau} - B_t)) | \mathcal{F}_t]$$

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown ξέρουμε ότι η μεταβολή $B_{t+\tau} - B_t$ είναι ανεξάρτητη από την \mathcal{F}_t , συνεπώς

$$(3.5) \quad \begin{aligned} E[\exp(\sigma(B_{t+\tau} - B_t)) | \mathcal{F}_t] &= E[\exp(\sigma(B_{t+\tau} - B_t))] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\tau}\right) dx = \exp\left(\frac{\sigma^2\tau}{2}\right) \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την εξίσωση (3.5) στην (3.4) λαμβάνουμε

$$E[S_{t+\tau} | \mathcal{F}_t] = S(t) \exp(r\tau)$$

Παράδειγμα 3.2.3. Μία δεύτερη ματιά στο παράδειγμα 3.2.2. Επανερχόμαστε τώρα στο παράδειγμα 3.2.2 κάνοντας χρήση της ιδιότητας Markov και του τελεστή μετατόπισης. Με τον τρόπο αυτό θα γίνει πιο σαφής η χρήση της ιδιότητας Markov και του συμβολισμού της με την χρήση του τελεστή μετατόπισης. Με τον συμβολισμό αυτό η ιδιότητα που αποδείξαμε στο παράδειγμα 3.2.2 παίρνει την μορφή

$$E[S_{t+s} | \mathcal{F}_s] = S_s \exp(rt)$$

Απόδειξη: Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$S_{t+s} = \exp(a(t+s)) \exp(\sigma B_{t+s})$$

όπου $a = r - \frac{\sigma^2}{2}$. Εφόσον η a είναι μία αιτιοκρατική (ντετερμινιστική) συνάρτηση και άρα τελείως ανεξάρτητη από τις ιδιότητες της κίνησης Brown μέχρι την χρονική στιγμή s (δηλαδή ανεξάρτητη από την διήθηση \mathcal{F}_s) έχουμε ότι

$$E[S_{t+s} | \mathcal{F}_s] = \exp(a(t+s)) E[\exp(\sigma B_{t+s}) | \mathcal{F}_s]$$

Ορίζουμε $Y = \exp(\sigma B_t)$. Βλέπουμε ότι

$$E[\exp(\sigma B_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = E[Y \circ \theta_s | \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y]$$

Αλλά η τελευταία μέση τιμή, είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής Y επάνω στο μέτρο που ορίζει μία κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο $y = B_s$ (το οποίο θεωρούμε ότι είναι δεδομένο - σταθερό) και συνεπώς

$$\begin{aligned} E_{B_s}[Y] &= E_{B_s}[\exp(\sigma B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(\sigma x) \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right) dx \\ &= \exp\left(\frac{\sigma^2 t}{2}\right) \exp(\sigma y) = \exp\left(\frac{\sigma^2 t}{2}\right) \exp(\sigma B_s) \end{aligned}$$

(δηλαδή θεωρούμε τώρα το B_t σαν μία κίνηση Brown η οποία ξεκίνησε στο σημείο $y = B_s$). Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$E[S_{s+t} | \mathcal{F}_s] = \exp(as) \exp(rt) \exp(\sigma B_s) = \exp(rt) S_s$$

Παράδειγμα 3.2.4. Ας επιλέξουμε ως $f(B_t) = \mathbf{1}_{\{B_t \in I\}}$, $t \in [t_1, t_2]$ όπου I είναι κάποιο διάστημα του \mathbb{R} (με σταθερά άκρα). Τότε από την ιδιότητα Markov έχουμε ότι

$$P_x(B_t \in I, t \in [t_1, t_2] \mid \mathcal{F}_s) = P_{B_s}(B_t \in I, t \in [t_1 - s, t_2 - s])$$

3.2.3 Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Η ισχυρή ιδιότητα Markov είναι ουσιαστικά το ότι η ιδιότητα Markov ισχύει όχι μόνο για αιτιοκρατικούς χρόνους αλλά και για μία συγκεκριμένη κατηγορία τυχαίων χρόνων τους **χρόνους στάσης**. Στους χρόνους στάσης αναφερθήκαμε εκτενώς στο κεφάλαιο 2.

Η βάση της ισχυρής ιδιότητας Markov, για την κίνηση Brown είναι το παρακάτω θεώρημα το οποίο μας εξασφαλίζει ότι η ανεξαρτησία των μεταβολών της κίνησης Brown ισχύει όχι μόνο για αιτιοκρατικούς χρόνους αλλά και για χρόνους στάσης.

Πρίν αναπτύξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov πρέπει πρώτα να υπενθυμίσουμε τον ακριβή ορισμό της σ-άλγεβρας που περιέχει τα γεγονότα που σχετίζονται με την στοχαστική διαδικασία μέχρι τον χρόνο στάσης T

Ορισμός 3.2.1. Η σ-άλγεβρα \mathcal{F}_T όπου T είναι ένας χρόνος στάσης ορίζεται σαν

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t > 0\}$$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.2.2. Έστω B_t μία κίνηση Brown και T ένας πεπερασμένος χρόνος στάσης για την B_t . Τότε ισχύει ότι $\{B_{t+T} - B_T\}$ είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη της άλγεβρας \mathcal{F}_T .

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Με βάση το παραπάνω θεώρημα μπορούμε να δείξουμε ότι αποτελέσματα ανάλογα με την ιδιότητα Markov για αιτιοκρατικούς χρόνους ισχύουν και για κατάλληλα επιλεγμένους τυχαίους χρόνους. Συγκεκριμένα έχουμε ότι

Θεώρημα 3.2.3. Έστω θ_s ο τελεστής μετατόπισης, Y μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και T ένας χρόνος στάσης. Τότε

$$E_x[f(Y \circ \theta_T) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[Y]$$

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Όπως και προηγουμένως μία ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση του παραπάνω είναι η

$$E_x[f(B_{t+T}) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[B_t],$$

όπου f είναι μία φραγμένη συνάρτηση. Η παραπάνω ιδιότητα μας λέει ότι η υπό συνθήκη μέση τιμή της συνάρτησης f υπολογισμένης στην θέση που έφτασε η κίνηση Brown την χρονική στιγμή $t + T$ δεδομένης της πληροφορίας για την κίνηση Brown ως τον χρόνο στάσης (τυχαίο χρόνο) T , είναι η μέση τιμή της ίδιας ποσότητας επάνω σε μία κίνηση Brown η οποία ξεκινάει στο σημείο B_T που έφτασε η αρχική κίνηση Brown την χρονική στιγμή T , και που τρέχει για χρόνο t . Αν σαν f επιλέξουμε την δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου τότε η ιδιότητα Markov μπορεί να γραφεί σαν μία σχέση πιθανοτήτων

$$P_x[B_{t+T} \in A \mid \mathcal{F}_T] = P_{B_T}(B_t)$$

Η ισχυρή ιδιότητα Markov μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη αρκετών χρήσιμων ιδιοτήτων της κίνησης Brown. Αυτή που συναντάμε πιο συχνά σε διάφορες εφαρμογές είναι η αρχή της ανάκλασης.

Παράδειγμα 3.2.5. Η αρχή της ανάκλασης. Μία ενδιαφέρουσα εφαρμογή της ισχυρής ιδιότητας Markov εμφανίζεται στην απόδειξη της αρχής της ανάκλασης για την κίνηση Brown. Έστω ότι παίρνουμε την μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο 0. Ορίζουμε ως $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$. Τότε η στοχαστική διαδικασία

$$\bar{B}_t = \begin{cases} B_t, & t < T_a \\ 2a - B_t, & t \geq T_a \end{cases}$$

είναι και αυτή μία κίνηση Brown. Η \bar{B}_t είναι απλά η αρχική κίνηση Brown μόνο που έχει ανακλασθεί ως προς την ευθεία $x = a$ μετά την πρώτη φορά που 'χτύπησε' την ευθεία αυτή.

Για να δείξουμε ότι η \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown θα ορίσουμε τις βοηθητικές στοχαστικές διαδικασίες $Y_t = B_t$, $0 \leq t \leq T_a$ και την $Z_t = B_{t+T_a} - a = B_{t+T_a} - B_{T_a}$. Εφόσον ο τυχαίος χρόνος T_a είναι ένας χρόνος στάσης, σύμφωνα με το θεώρημα 3.2.2 η διαδικασία Z_t θα είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη από την άλγεβρα \mathcal{F}_{T_a} και συνεπώς ανεξάρτητη από την στοχαστική διαδικασία Y . Άρα, από τις ιδιότητες της κίνησης Brown και η $-Z$ θα είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη της Y . Συνεπώς οι διαδικασίες (Y, Z) και $(Y, -Z)$ θα έχουν την ίδια κατανομή.

Ας πάρουμε τώρα την απεικόνιση

$$\phi : (Y, Z) \rightarrow (Y\mathbf{1}_{\{t \leq T_a\}} + (a + Z_{t-T_a})\mathbf{1}_{\{t > T_a\}})$$

Η απεικόνιση αυτή είναι συνεχής στο $t = T_a$. Λόγω της συνέχειας της απεικόνισης ϕ και του ότι οι διαδικασίες (Y, Z) και $(Y, -Z)$ θα έχουν την ίδια κατανομή, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι και οι διαδικασίες $\phi(Y, Z)$ και $\phi(Y, -Z)$ θα έχουν την ίδια κατανομή. Όμως

$$\phi(Y, Z) = B_t\mathbf{1}_{\{t \leq T_a\}} + (a + B_{t+T_a-T_a} - a)\mathbf{1}_{\{t > T_a\}} = B_t\mathbf{1}_{\{t \leq T_a\}} + B_t\mathbf{1}_{\{t > T_a\}} = B_t$$

και

$$\begin{aligned} \phi(Y, -Z) &= B_t\mathbf{1}_{\{t \leq T_a\}} + (a - (B_{t+T_a-T_a} - a))\mathbf{1}_{\{t > T_a\}} \\ &= B_t\mathbf{1}_{\{t \leq T_a\}} + (2a - B_t)\mathbf{1}_{\{t > T_a\}} = \bar{B}_t \end{aligned}$$

Συνεπώς οι B_t και \bar{B}_t έχουν την ίδια κατανομή και η \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown.

Η αρχή της ανάκλασης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την μελέτη της διαδικασίας μεγίστου την κίνησης Brown.

Παράδειγμα 3.2.6. Έστω $S_t = \sup\{B_u : u \leq t\}$. Τότε

$$P(S_t \geq a, B_t \leq a - y) = P(B_t \geq a + y), \quad a, y \geq 0, t \geq 0$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t (που ορίσαμε στο παράδειγμα 3.2.5). Ορίζουμε τον χρόνο εξόδου της στοχαστικής αυτής διαδικασίας $\bar{T}_a = \inf\{t > 0, \bar{B}_t = a\}$. Εφόσον η \bar{B}_t είναι και αυτή μία κίνηση Brown (ακολουθεί τον ίδιο νόμο με την B_t) αναμένουμε και οι χρόνοι εξόδου T_a και \bar{T}_a να ακολουθούν την ίδια κατανομή. Συνεπώς εφόσον οι στοχαστικές μεταβλητές (T_a, B_t) και (\bar{T}_a, \bar{B}_t) ακολουθούν τον ίδιο νόμο (έχουν την ίδια κατανομή) θα ισχύει

$$(3.6) \quad P(\bar{T}_a \leq t, \bar{B}_t < a - y) = P(T_a \leq t, B_t < a - y)$$

Εφόσον όμως η \bar{B}_t και η B_t είναι ακριβώς οι ίδιες μέχρι τον χρόνο T_a έχουμε ότι $T_a = \bar{T}_a$. Επομένως τα ακόλουθα γεγονότα είναι τα ίδια

$$(3.7) \quad \{\bar{T}_a, \bar{B}_t < a - y\} = \{T_a \leq t, 2a - B_t < a - y\} = \{T_a \leq t, B_t > a + y\}$$

(αφού για $t \geq T_a$, $\bar{B}_t = 2a - B_t$). Από τις (3.6) και (3.7) παίρνουμε

$$(3.8) \quad P(T_a \leq t, B_t < a - y) = P(T_a \leq t, B_t > a + y)$$

Θα μελετήσουμε τώρα χωριστά τα δύο μέλη της εξίσωσης (3.8):

- Δεξιό μέλος: Ισχύει ότι $\{T_a \leq t\} = \{S_t \geq a\}$ συνεπώς $\{T_a \leq t\} \cap \{B_t > a + y\} = \{S_t \geq a\} \cap \{B_t > a + y\}$. Περαιτέρω έχουμε την σχέση $\{B_t > a + y\} \subset \{S_t \geq a\}$ η οποία μας δίνει ότι $\{S_t \geq a\} \cap \{B_t > a + y\} = \{B_t > a + y\}$. Συνεπώς

$$P(T_a \leq t, B_t > a + y) = P(S_t \geq a, B_t > a + y) = P(B_t > a + y)$$

- Αριστερό μέλος: Εφόσον $\{T_a \leq t\} = \{S_t \geq a\}$ θα ισχύει

$$P(T_a \leq t, B_t < a - y) = P(S_t \geq a, B_t < a - y)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$P(S_t \geq a, B_t < a - y) = P(B_t > a + y) = \int_{a+y}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

που είναι και το ζητούμενο αποτέλεσμα.

Μία ισοδύναμη μορφή του αποτελέσματος αυτού είναι και η ακόλουθη

$$P(S_t \geq x, B_t \leq y) = P(B_t \geq 2x - y)$$

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να υπολογίσουμε και την κατανομή των χρόνων πρώτης εξόδου από το χωρίο $x \leq a$.

Παράδειγμα 3.2.7. Να υπολογισθεί η κατανομή των τυχαίων χρόνων T_a .

Έχουμε αρχικά ότι

$$P(T_a \leq t) = P(S_a \geq a) = P(S_t \geq a, B_t \leq a) + P(S_t \geq a, B_t > a)$$

Για να καταλήξουμε στο παραπάνω χρησιμοποιήσαμε

(i) ότι τα γεγονότα $\{T_a \leq t\}$ και $\{S_t \geq a\}$ είναι ταυτόσημα

και

(ii) ότι το γεγονός $\{S_t \geq a\}$ μπορεί να συμβεί με δύο τρόπους: είτε η κίνηση Brown βγήκε από το χωρίο $x \leq a$ πριν την χρονική στιγμή t και την χρονική στιγμή t έχει επιστρέψει ξανά στο χωρίο αυτό, είτε βγήκε από το χωρίο πριν την χρονική στιγμή t και την χρονική στιγμή t συνεχίζει να βρίσκεται έξω από το χωρίο αυτό. Τα δύο αυτά γεγονότα αποκλείουν το ένα το άλλο.

Όμως εφόσον $\{B_t > a\} \subset \{S_t \geq a\}$ ισχύει

$$P(S_t \geq a, B_t > a) = P(B_t > a)$$

Επίσης χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα του παραδείγματος 3.2.6 επιλέγοντας $y = 0$:

$$P(S_t \geq a, B_t \leq a) = P(B_t \geq a)$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$\begin{aligned} P(T_a \leq t) &= P(S_t \geq a) = 2P(B_t \geq a) = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}} \int_a^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\ (3.9) \quad &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{\infty} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right) dy \end{aligned}$$

Με μία απλή παραγωγή ως προς t μπορούμε να υπολογίσουμε την κατανομή των χρόνων εξόδου της κίνησης Brown από το χωρίο $x \leq a$. Το αποτέλεσμα είναι

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi}} t^{-\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right)$$

Αποτελέσματα σαν και αυτά που δίνονται στα παραδείγματα 3.2.6 και 3.2.7, και που σχετίζονται με την αρχή της ανάκλασης, είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στην χρηματοοικονομική, και συγκεκριμένα στην αποτίμηση ορισμένων παραγώγων συμβολαίων, τα οποία απαντώνται με το γενικότερο όνομα εξωτικά παράγωγα (exotics). Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό αργότερα.

Θα παρουσιάσουμε τώρα την αρχή της ανάκλασης χρησιμοποιώντας τον τελεστή μετατόπισης θ για να εξοικειωθούμε με την χρήση και τις ιδιότητες του:

Παράδειγμα 3.2.8. Αποδείξτε την αρχή της ανάκλασης χρησιμοποιώντας την ισχυρή ιδιότητα Markov σε μία κατάλληλα επιλεγμένη συνάρτηση της κίνησης Brown. Συγκεκριμένα, αρχικά δείξτε ότι

$$P(T_a \leq t) = 2P(T_a \leq t, B_t \leq a)$$

όπου $T_a = \inf\{t : B_t = a\}$, από το οποίο έπεται ότι

$$P(T_a \leq t) = P(S_t \geq a) = 2P(B_t \geq a).$$

Όπως και προηγουμένως S_t είναι το μέγιστο της κίνησης Brown μέχρι την χρονική στιγμή t .

Ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$Y_s(\omega(t)) = Y_s(B(\omega(t))) = \begin{cases} 1, & s < t, \quad B_{t-s} < a \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

όπου με το $\omega(t)$ υποδηλώνουμε την εξάρτηση από το B_t . Ας χρησιμοποιήσουμε τον τελεστή μετατόπισης θ . Αν θυμηθούμε το πως ο τελεστής μετατόπισης δρά επάνω στην τροχιά της κίνησης Brown βλέπουμε ότι

$$Y_s \circ \theta_{T_a} = Y_s(B(\omega(t + T_a))) = \begin{cases} 1, & s < t, \quad B_{t+T_a-s} < a \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

(θυμηθείτε ότι ο τελεστής μετατόπισης επιδρά **μόνο** επάνω στην κίνηση Brown). Συνεπώς

$$Y_{T_a} \circ \theta_{T_a} = \begin{cases} 1, & T_a < t, \quad B_t < a \\ 0, & \text{Σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Χρησιμοποιούμε τώρα την ισχυρή ιδιότητα Markov για την συνάρτηση αυτή

$$E_0[Y_\tau \circ \theta_\tau | \mathcal{F}_\tau] = E_{B_\tau}[Y_\tau]$$

όπου τ είναι ένας χρόνος στάσης, και το δεξιό μέλος είναι η συνάρτηση $\phi(x, s) = E_x Y_s$ υπολογισμένη στο $s = \tau$ και $x = B_\tau$. Ας επιλέξουμε $s = T_a$ έτσι ώστε $B_\tau = a$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την συνάρτηση $\phi(x, s)$, για την επιλογή αυτή του Y :

$$\begin{aligned} \phi(x, s) &= E_x[Y_s] = \int \mathbf{1}_{\{s < t\}} \mathbf{1}_{\{B_{t-s} < a\}} d\mu_x \\ &= \int_{-\infty}^a \mathbf{1}_{\{s < t\}} \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(z-x)^2}{2(t-s)}\right) dz. \end{aligned}$$

Στον παραπάνω υπολογισμό δεχθήκαμε ότι το ότι το μέτρο μ_x είναι το μέτρο Wiener που επάγει η κίνηση Brown έχοντας ξεκινήσει στο σημείο $B_0 = x$ (βλ. παράγραφο 3.1). Συνεπώς, το ολοκλήρωμα της χαρακτηριστικής συνάρτησης $\mathbf{1}_{\{B_{t-s} < a\}}$ επάνω στο $d\mu_x$ δεν είναι παρά η πιθανότητα του γεγονότος $\{B_{t-s} < a\}$ (για κίνηση Brown που ξεκίνησε στο x) η οποία δίνεται από το ολοκλήρωμα που γράψαμε παραπάνω. Θέτοντας τώρα $x = a$ στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι

$$\phi(a, s) = \mathbf{1}_{\{s < t\}} \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \exp\left(-\frac{(z-a)^2}{2(t-s)}\right) dz = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{s < t\}}.$$

Έτσι με την χρήση της ισχυρής ιδιότητας Markov βρίσκουμε ότι

$$E_0[Y_{T_a} \circ \theta_{T_a} | \mathcal{F}_{T_a}] = \frac{1}{2} \mathbf{1}_{\{s < t\}}.$$

Τώρα παίρνουμε την μέση τιμή E_0 και των δύο μελών της παραπάνω εξίσωσης και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπο συνθήκη μέσης τιμής (και συγκεκριμένα τον νόμο της ολικής πιθανότητας) βρίσκουμε ότι

$$(3.10) \quad P(T_a \leq t, B_t \leq a) = \frac{1}{2} P(T_a \leq t)$$

(παραλείπουμε το P_0).

Έχοντας αποδείξει την παραπάνω ιδιότητα μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την αρχή της ανάκλασης. Χρησιμοποιώντας επιχειρήματα όπως και στα προηγούμενα παραδείγματα μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} P(T_a \leq t) &= P(T_a \leq t, B_t > a) + P(T_a \leq t, B_t \leq a) \\ &= P(T_a \leq t, B_t > a) + \frac{1}{2} P(T_a \leq t) = P(B_t \geq a) + \frac{1}{2} P(T_a \leq t) \end{aligned}$$

από την οποία μπορούμε να δούμε ότι

$$P(T_a \leq t) = P(S_t \geq a) = 2P(B_t \geq a)$$

Μία ακόμα ενδιαφέρουσα εφαρμογή της ισχυρής ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown είναι ο λεγόμενος νόμος του αντιστρόφου συνημιτόνου του Levy.

Παράδειγμα 3.2.9. Δείξτε ότι η πιθανότητα να έχει η κίνηση Brown τουλάχιστον ένα σημείο μηδενισμού στο διάστημα $[t_0, t_1]$ δεδομένου ότι $B_0 = 0$ δίνεται από την σχέση

$$p = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}}$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} P\left[\min_{0 \leq u \leq t} B_u \leq 0 \mid B_0 = a\right] &= P\left[\max_{0 \leq u \leq t} B_u \geq 0 \mid B_0 = -a\right] \\ &= P\left[\max_{0 \leq u \leq t} B_u \geq a \mid B_0 = 0\right] = P(T_a \leq t) \\ &= \frac{a}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) ds, \quad a > 0 \end{aligned}$$

Στην πρώτη ισότητα χρησιμοποιήσαμε την συμμετρία της κίνησης Brown γύρω από την τιμή 0, στην δεύτερη την χωρική ομοιογένεια της κίνησης Brown και για την τελευταία το αποτέλεσμα του παραδείγματος 3.2.7.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί και να ερμηνευθεί και ως εξής: Αν $B_{t_0} = a$ τότε η πιθανότητα $P(a)$, να έχει η B_t τουλάχιστον ένα μηδενισμό μεταξύ των t_0 και t_1 είναι

$$P(a) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{t_1-t_0} \frac{1}{s^{3/2}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) ds$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από την ομοιογένεια στον χρόνο της κίνησης Brown, ενώ η απόλυτη τιμή προκύπτει για λόγους συμμετρίας.

Για να υπολογίσουμε την πιθανότητα να μηδενίζεται η B_t τουλάχιστον μία φορά στο διάστημα (t_0, t_1) δεδομένου ότι $B_0 = 0$ θα δεσμεύσουμε σε όλες τις πιθανές τιμές της B_{t_0} : Αν $B_{t_0} = a$ η πιθανότητα να μηδενίζεται η B_t στο διάστημα (t_0, t_1) είναι ίση προς $P(a)$. Συνεπώς,

$$p = \int_{-\infty}^{\infty} P(a) P[B_{t_0} = a \mid B_0 = 0] da = \sqrt{\frac{2}{\pi t_0}} \int_0^{\infty} P(a) \exp\left(-\frac{a^2}{2t_0}\right) da$$

Μετά από λίγη άλγεβρα

$$\begin{aligned} p &= \frac{1}{\pi \sqrt{t_0}} \int_0^{t_1-t_0} s^{-3/2} \int_0^{\infty} a \exp\left[-\frac{a^2}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{t_0}\right)\right] da ds \\ &= \frac{\sqrt{t_0}}{\pi} \int_0^{t_1-t_0} \frac{ds}{(t_0+s)\sqrt{s}} = \frac{2}{\pi} \arctan \sqrt{\frac{t_1-t_0}{t_0}} = \frac{2}{\pi} \arccos \sqrt{\frac{t_0}{t_1}} \end{aligned}$$

3.3 Ιδιότητες martingale της κίνησης Brown

Η θεωρία της κίνησης Brown μπορεί να αναπτυχθεί κάνοντας χρήση αποτελεσμάτων από την θεωρία των διαδικασιών martingale. Όπως θα δείξουμε και στην παράγραφο αυτή, η κίνηση Brown είναι martingale, και πολλές από τις ιδιότητες της μπορεί να συναχθούν από την ιδιότητα αυτή. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 3.3.1. Έστω B_t μία κίνηση Brown και $\mathcal{F}_s = \sigma(B_u, u \leq s)$. Οι παρακάτω στοχαστικές διαδικασίες είναι martingales ως προς την διήθηση \mathcal{F}_s :

- (i) B_t
- (ii) $(B_t)^2 - t$
- (iii) $M_t^\lambda = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$.

Απόδειξη: (i) Μπορούμε να δούμε ότι $E[|B_t|] < \infty$ εφόσον το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \exp(-x^2/2t) dx$ συγχλίνει. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} E[B_t | \mathcal{F}_s] &= E[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s] = E[B_t - B_s | \mathcal{F}_s] + E[B_s | \mathcal{F}_s] \\ &= E[B_t - B_s] + B_s = B_s \end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο στο άθροισμα αυτό χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη από την \mathcal{F}_s , και ότι η μέση τιμή της μεταβολής αυτής είναι 0. Για το δεύτερο όρο χρησιμοποιήσαμε το ότι η B_s είναι \mathcal{F}_s -μετρήσιμη.

Οι (ii) και (iii) αφήνονται σαν άσκηση. \square

Παράδειγμα 3.3.1. Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της κίνησης Brown είναι $\eta < B >_t = t$. Αυτό μπορεί να φανεί από το (ii) του θεωρήματος 3.3.1 και από τον ορισμό της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μία martingale. Μπορεί όμως να αποδειχθεί και ευθέως από τον ορισμό της τετραγωνικής μεταβολής ως

$$\langle B \rangle_t = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} \sum_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2$$

όπου $\{t_i\}$ είναι μία διαμέριση του $[0, t]$, $\Delta = \sup_i |t_{i+1} - t_i|$, και όριο λαμβάνεται κατά πιθανότητα. Θα επανέλθουμε στην οπτική αυτή στην παράγραφο 3.5.

Παράδειγμα 3.3.2. Νόμος των χρόνων εξόδου για την κίνηση Brown Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα 3.3.1 για να βρούμε με διαφορετικό τρόπο το νόμο για την τυχαία μεταβλητή $T_a = \inf\{t : S_t \geq a\}$ όπου $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$, και B είναι η μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει στο 0.

Από το θεώρημα 3.3.1 βλέπουμε ότι για $\lambda \geq 0$, η στοχαστική διαδικασία M_t^λ είναι μία martingale. Ας θεωρήσουμε τώρα την σταματημένη martingale $M_{t \wedge T_a}^\lambda$. Αυτή είναι μία martingale η οποία είναι φραγμένη από το $e^{\lambda a}$ και συνεπώς χρησιμοποιώντας το θεώρημα επιλεκτικής στάσης βλέπουμε πως

$$E[M_{T_a}^\lambda] = E[M_0^\lambda] = 1.$$

Αυτό μας δίνει ότι

$$E \left[\exp \left(\lambda a - \frac{\lambda^2 T_a}{2} \right) \right] = 1$$

οπότε

$$E \left[\exp \left(-\frac{\lambda^2 T_a}{2} \right) \right] = \exp(-\lambda a)$$

Ορίζοντας το s από την σχέση $s = \frac{\lambda^2}{2}$ παίρνουμε

$$E(e^{-sT_a}) = e^{-\sqrt{2sa}}$$

Όμως, αν $f(t)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής T_a τότε

$$E(e^{-sT_a}) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

οπότε $E(e^{-sT_a})$ είναι ο μετασχηματισμός Laplace της πυκνότητας πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής T_a . Αναστρέφοντας τον μετασχηματισμό Laplace χρησιμοποιώντας τυπικές μεθόδους βρίσκουμε ότι

$$f(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right).$$

Σχετικά με τον μετασχηματισμό Laplace και τις ιδιότητες του παραπέμπουμε σε εγχειρίδια εφαρμοσμένων μαθηματικών (βλ. πχ. [23]).

Παράδειγμα 3.3.3. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες *martingale* της κίνησης Brown και την ανισότητα *submartingale* του Doob μπορούμε να δείξουμε ότι αν $S_t = \sup_{s \leq t} B_s$ τότε

$$P(S_t \geq at) \leq \exp\left(-\frac{a^2 t}{2}\right)$$

Απόδειξη: Για $\lambda > 0$ θα χρησιμοποιήσουμε την εκθετική *martingale* M^λ περιορισμένη στο διάστημα $[0, t]$. Από τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης (μονοτονία) έχουμε ότι

$$\exp\left(\lambda S_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) \leq \sup_{s \leq t} M_s^\lambda$$

και από αυτό παίρνουμε

$$\begin{aligned} P(S_t \geq at) &\leq P\left[\sup_{s \leq t} M_s^\lambda \geq \exp\left(\lambda at - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)\right] \\ &\leq \exp\left(-\lambda at + \frac{\lambda^2 t}{2}\right) E(M_t^\lambda). \end{aligned}$$

Εφόσον M^λ είναι *martingale* ισχύει ότι $E(M_t^\lambda) = E(M_0^\lambda) = 1$ και αφού

$$\inf_{\lambda > 0} (-\lambda at + \lambda^2 t/2) = -a^2 t/2$$

(ελαχιστοποιούμε ως προς λ) έπεται το ζητούμενο.

3.4 Χαρακτηρισμός της κίνησης Brown

Θα παρουσιάσουμε τώρα ένα τρόπο ελέγχου του αν μία δεδομένη στοχαστική διαδικασία (ως προς την διήθηση που παράγει) είναι κίνηση Brown ή όχι. Ο τρόπος ελέγχου βασίζεται σε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα που οφείλεται στον Paul Levy και που χαρακτηρίζει την κίνηση Brown χρησιμοποιώντας ουσιαστικά τις ιδιότητες *martingale* που αυτή έχει. Παραθέτουμε το θεώρημα αυτό και θα δώσουμε την απόδειξη στο παράρτημα του κεφαλαίου.

Θεώρημα 3.4.1. (Levy) Έστω $X_t, t \geq 0$ μία στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ η διήθηση που παράγεται από αυτή. Η X_t είναι μία κίνηση Brown αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες

- (i) $X_0 = 0$ σ.β.
- (ii) Οι τροχιές της X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.
- (iii) Η X_t είναι μία *martingale* ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.
- (iv) Η $X_t^2 - t$ είναι μία *martingale* ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Σημείωση: Το θεώρημα αυτό χαρακτηρίζει την κίνηση Brown ουσιαστικά από την μέση τιμή της και την διακύμανση και φυσικά την ανεξαρτησία των μεταβολών της. Συγκεκριμένα μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις συνθήκες (iii) και (iv) του παραπάνω θεωρήματος με τις συνθήκες:

(iii)' Η διαδικασία X_t έχει στάσιμες (stationary) και ανεξάρτητες μεταβολές

(iv)' Οι μεταβολές $X_t - X_s, s < t$ είναι κατανομημένες με την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά $t - s$.

Επίσης η συνθήκη (iv) μπορεί να αντικατασταθεί από μία συνθήκη σχετικά με την τετραγωνική μεταβολή της *martingale* X_t και συγκεκριμένα από την $\langle X_t \rangle = t$.

Το θεώρημα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο και βρίσκει αρκετές εφαρμογές στην χρηματοοικονομική. Αυτό που πρέπει να μας εντυπωθεί εδώ είναι το ότι αν μία διαδικασία είναι κίνηση Brown ή όχι εξαρτάται από την διήθηση την οποία την συνοδεύει καθώς και από το μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο την βλέπουμε. Οι ιδέες αυτές θα ξεκαθαρίσουν και παρακάτω όταν αναπτύξουμε το θεώρημα του Girsanov.

Παράδειγμα 3.4.1. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Levy αποδείξτε ότι η στοχαστική διαδικασία $X_t = B_{t+T} - B_T$ όπου B_t είναι μία κίνηση Brown και T ένας ντετερμινιστικός χρόνος είναι και αυτή μία κίνηση Brown.

Η διήθηση \mathcal{G}_t που παράγει η στοχαστική διαδικασία X_t σχετίζεται με την διήθηση \mathcal{F}_t που παράγει η κίνηση Brown. Πράγματι

$$\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t) = \sigma(B_{s+T} - B_T, s \leq t) = \sigma(B_s, s \leq t+T) = \mathcal{F}_{t+T}$$

Οι ιδιότητες (i) και (ii) του θεωρήματος του Levy είναι προφανείς από τον ορισμό της κίνησης Brown.

Θα ελέγξουμε την (iii)

$$\begin{aligned} E[X_t | \mathcal{G}_s] &= E[X_t - X_s + X_s | \mathcal{G}_s] = X_s + E[X_t - X_s | \mathcal{G}_s] \\ &= E[B_{t+T} - B_{s+T} | \mathcal{F}_{s+T}] + X_s = E[B_{t+T} - B_{s+T}] + X_s = X_s \end{aligned}$$

(το μέτρο κάτω από το οποίο παίρνουμε τις μέσες τιμές είναι το μέτρο που παράγει η κίνηση Brown).

Θα ελέγξουμε τώρα την (iv)

$$\begin{aligned} E[X_t^2 - t | \mathcal{G}_s] &= E[(X_t - X_s + X_s)^2 - t | \mathcal{G}_s] \\ &= E[(X_t - X_s)^2 | \mathcal{G}_s] - t + X_s^2 \\ &= E[(B_{t+T} - B_{s+T})^2 | \mathcal{F}_{s+T}] - t + X_s^2 \\ &= (t + T - (s + T)) - t + X_s^2 = X_s^2 - s \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα ότι $E[X_t - X_s | \mathcal{G}_s] = 0$ που δείξαμε κατά την απόδειξη της ιδιότητας (iii) και τις ιδιότητες της κίνησης Brown.

Συνεπώς η στοχαστική διαδικασία X_t είναι μία κίνηση Brown. Δοκιμάστε να δείξετε τις ιδιότητες (iii)' και (iv)' σαν άσκηση.

Παράδειγμα 3.4.2. Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία $Z_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ όπου $c > 0$ και B_t η κίνηση Brown. Η στοχαστική διαδικασία Z_t είναι μία κίνηση Brown.

Η απόδειξη μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Levy. Θα χρησιμοποιήσουμε ότι η σ -άλγεβρα \mathcal{G}_t που παράγεται από την διαδικασία Z_t είναι ουσιαστικά η σ -άλγεβρα $\mathcal{F}_{c^2 t}$ όπου \mathcal{F}_t είναι η σ -άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown. Τα υπόλοιπα αφήνονται σαν άσκηση.

3.5 Ιδιότητες των τροχιών της κίνησης Brown

Οι τροχιές της κίνησης Brown έχουν μερικές χαρακτηριστικές ιδιότητες, μελέτη των οποίων έχει απασχολήσει αρκετά την μαθηματική κοινότητα. Ιδιαίτερα με το θέμα αυτό ασχολήθηκαν μεγάλοι μαθηματικοί όπως π.χ. ο Levy, ο Wiener κ.α. Εδώ απλά θα αναφέρουμε τις πιο σημαντικές από αυτές. Τα αποτελέσματα αυτά είναι αρκετά τεχνικά, γι' αυτό και αναφέρουμε τα περισσότερα χωρίς απόδειξη.

Ξεκινάμε με την ιδιότητα της συνέχειας των τροχιών.

Θεώρημα 3.5.1. Έστω $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ και $0 < T < \infty$. Τότε, υπάρχει τυχαία μεταβλητή N (η οποία εξαρτάται και από τα ϵ και T) τέτοια ώστε $E[N^p] < \infty \forall p, 0 < p < \infty$ για την οποία ισχύει

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leq N(\omega) |t - s|^{\frac{1}{2} - \epsilon}, \quad \forall s, t \in [0, T]$$

Απόδειξη: Παραλείπεται. Βλ. π.χ. [21]. \square

Ο Kintchin έχει αποδείξει ένα πιο ισχυρό θεώρημα σχετικά με την συμπεριφορά των τροχιών της κίνησης Brown σε μικρούς και σε μεγάλους χρόνους, που δίνει ένα πιο καλό φράγμα από το παραπάνω. Το θεώρημα αυτό είναι γνωστό ως ο νόμος του επαναλαμβανόμενου λογαρίθμου (law of the iterated logarithm).

Θεώρημα 3.5.2. Για την κίνηση Brown ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις με πιθανότητα 1

$$\begin{aligned} \limsup_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{\ln \ln \left(\frac{1}{t}\right)}} &= \limsup_{t \uparrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{\ln \ln(t)}} = 1 \\ \liminf_{t \downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{\ln \ln \left(\frac{1}{t}\right)}} &= \liminf_{t \uparrow \infty} \frac{B_t}{\sqrt{\ln \ln(t)}} = -1 \end{aligned}$$

Απόδειξη: Παραλείπεται. \square

Η παραπάνω ιδιότητα της κίνησης Brown, που ουσιαστικά μας λέει ότι το όριο $\frac{B_t}{\sqrt{\ln \ln(\frac{1}{t})}}$ στο $t = 0$ δεν υπάρχει μας δίνει μία ιδέα για την παθολογική συμπεριφορά των τροχιών της κίνησης Brown. Αυτή η ιδέα μπορεί να επιβεβαιωθεί και από τα αποτελέσματα που παρατίθενται στην συνέχεια.

Σημαντική είναι η ιδιότητα της αυτοομοιότητας της κίνησης Brown:

Θεώρημα 3.5.3. Έστω B_t μία κίνηση Brown. Τότε και οι στοχαστικές διαδικασίες

$$(i) X_t = \frac{1}{c} B_{c^2 t}$$

$$(ii) Y_t = t B_{\frac{1}{t}}$$

είναι επίσης κινήσεις Brown.

Απόδειξη: Η απόδειξη της (i) έχει ουσιαστικά σκιαγραφηθεί σαν παράδειγμα στην παράγραφο 3.4 χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Levy. Η απόδειξη της (ii) επίσης μπορεί να γίνει επίσης κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Levy. Το μόνο λεπτό σημείο είναι η απόδειξη της συνέχειας της Y_t στο σημείο $t = 0$. Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε ένα αποτέλεσμα από την ανάλυση. Για το παρόν μας αρκεί να λάβουμε την συνέχεια της Y_t στο $t = 0$ ως δεδομένη. \square

Μία χαρακτηριστική ιδιότητα της κίνησης Brown είναι ότι δεν είναι διαφορίσιμη πουθενά σ.β. Είναι δηλαδή ένα παράδειγμα συνάρτησης η οποία είναι συνεχής αλλά μη διαφορίσιμη. Η απόδειξη της ιδιότητας αυτής για την κίνηση Brown διατυπώθηκε για πρώτη φορά την δεκαετία του 1930 από τους Paley, Wiener και Zygmund. Παραθέτουμε μία μορφή του αποτελέσματος αυτού.

Θεώρημα 3.5.4. Η κίνηση Brown B_t είναι μη διαφορίσιμη σ.β. στο σημείο t , για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη: Παραλείπεται. \square

Η τετραγωνική μεταβολή της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, t]$ είναι ίση με t . Αντίθετα η κίνηση Brown έχει άπειρη μεταβολή. Τα αποτελέσματα αυτά συνοψίζονται στο παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 3.5.5. Η κίνηση Brown έχει τις παρακάτω ιδιότητες

(i) Η τετραγωνική της μεταβολή στο διάστημα $[0, t]$ είναι ίση με t .

(ii) Η μεταβολή της είναι άπειρη.

Απόδειξη: (i) Προκύπτει από το ότι η στοχαστική διαδικασία $B_t^2 - t$ είναι martingale. Μία εναλλακτική απόδειξη δίνεται στο Παράδειγμα 3.5.1.

(ii) Προκύπτει από το ότι η B_t είναι συνεχής martingale και από το θεώρημα 2.6.3. \square

Το γεγονός ότι η μεταβολή της κίνησης Brown είναι άπειρη είναι ιδιαίτερα σημαντικό για αυτά που θα ακολουθήσουν. Λόγω της ιδιότητας αυτής **δεν** μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα μίας συνάρτησης f επάνω στην κίνηση Brown, $\int f(s, \omega) dB_s$ σαν ένα ολοκλήρωμα Riemann-Stieljes αλλά θα πρέπει να βρούμε ένα εναλλακτικό τρόπο ορισμού του, έτσι ώστε το ολοκλήρωμα αυτό να έχει νόημα. Θα επανέλθουμε στις ιδέες αυτές όταν συζητάμε την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô.

Παράδειγμα 3.5.1. Δείξτε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 = t$$

όπου $\Delta_i^n B = B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}$ και με t_i^n συμβολίζουμε την διαμέριση $t_i^n = \frac{it}{n}$ του διαστήματος $[0, t]$. Η σύγκλιση είναι σύγκλιση κατά L^2 .

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 - t \right)^2 \right] = 0$$

Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
 E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 - t \right)^2 \right] &= E \left[\sum_{i=0}^{n-1} \left((\Delta_i^n B)^2 - \frac{t}{n} \right)^2 \right] \\
 &\quad \text{λόγω ανεξαρτησίας} \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} E \left[\left((\Delta_i^n B)^2 - \frac{t}{n} \right)^2 \right] \\
 &= \sum_{i=0}^{n-1} \left\{ E[(\Delta_i^n B)^4] - \frac{2t}{n} E[(\Delta_i^n B)^2] + \frac{t^2}{n^2} \right\}
 \end{aligned}$$

Όμως, από τις ιδιότητες της κίνησης Brown γνωρίζουμε ότι

$$(3.11) \quad E[(\Delta_i^n B)^4] = \frac{3t^2}{n^2}, \quad E[(\Delta_i^n B)^2] = \frac{t}{n}$$

Συνεπώς,

$$E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 - t \right)^2 \right] = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{3t^2}{n^2} - \frac{2t^2}{n^2} + \frac{t^2}{n^2} \right) = \frac{2t^2}{n}$$

από όπου μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{i=0}^{n-1} (\Delta_i^n B)^2 - t \right)^2 \right] = 0$$

Έτσι αποδείχθηκε το ζητούμενο. Το ίδιο αποτέλεσμα μπορεί να δειχθεί και για γενικότερες διαμερίσεις. Από τις ιδιότητες της σύγκλισης βλέπουμε ότι η L^2 -σύγκλιση εξασφαλίζει και την σύγκλιση σε πιθανότητα, οπότε το παράδειγμα αυτό μας δείχνει με διαφορετικό τρόπο ότι η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της κίνησης Brown $\langle B \rangle_t = t$.

3.6 Πολυδιάστατη κίνηση Brown

Θα ορίσουμε τώρα την πολυδιάστατη κίνηση Brown.

Ορισμός 3.6.1. Η κίνηση Brown d -διαστάσεων είναι η στοχαστική διαδικασία $B_t = (B_{1,t}, B_{2,t}, \dots, B_{d,t})$ όπου $B_{i,t}$, $i = 1, \dots, d$ είναι κινήσεις Brown ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Οι ιδιότητες της πολυδιάστατης κίνησης Brown μπορεί να συναχθούν από τις ιδιότητες των επι μέρους μονοδιάστατων κινήσεων Brown που την αποτελούν.

Ορισμός 3.6.2. Μία d -διάστατη κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία B_t η οποία παίρνει τιμές στον \mathbb{R}^d και που έχει τις ακόλουθες ιδιότητες

- (i) Αν $t_0 < t_1 < \dots < t_n$, τότε οι (διανυσματικές) τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι ανεξάρτητες, (ανεξάρτητες αυξήσεις)
- (ii) If $s, t \geq 0$, τότε

$$P(B_{s+t} - B_s \in A) = \int_A \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x|^2}{2t}\right),$$

όπου $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. Οι αυξήσεις της κίνησης Brown σε d -διαστάσεις είναι κατανομημένες με την κανονική κατανομή σε d -διαστάσεις (κατανομή Gauss).

- (iii) Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι συνεχείς με πιθανότητα 1, δηλαδή η συνάρτηση $t \rightarrow B_t$ είναι συνεχής.

Οι τρεις αυτές ιδιότητες ορίζουν μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία. Η ύπαρξη της στοχαστικής διαδικασίας με τις παραπάνω ιδιότητες μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας γενικεύσεις των τρόπων απόδειξης της ύπαρξης της μονοδιάστατης κίνησης Brown.

Από τις ιδιότητες της κίνησης Brown μπορούμε να συνάγουμε τις ιδιότητες του μέτρου που επάγει η κίνηση Brown στις d -διαστάσεις:

$$\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \int_{A_1} dx_1 \int_{A_2} dx_2 \dots \int_{A_n} dx_n \prod_{i=1}^n p(t_i - t_{i-1}, x_{i-1}, x_i)$$

όπου $x_0 = x \in \mathbb{R}^d$, $t_1 = 0$, $A_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $i = 1, \dots, n$ και

$$p(t, x, y) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|y-x|^2}{2t}\right)$$

Με τον συμβολισμό $|x|$ εννοούμε την Ευκλείδεια νόρμα στον \mathbb{R}^d . Η ποσότητα $\mu_{t_1, t_2, \dots, t_n}(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$ είναι κατά κάποιο τρόπο η πιθανότητα να βρίσκεται η στοχαστική διαδικασία B_t τις χρονικές στιγμές t_i στα υποσύνολα A_i (που ανήκουν στο σύνολο Borel που παράγεται από το \mathbb{R}^d). Η ποσότητα αυτή ονομάζεται πεπερασμένης διάστασης κατανομή και η γνώση της είναι πολύ σημαντική στο να κατασκευάσουμε το μέτρο μ ¹

Η πολυδιάστατη κίνηση Brown έχει πολλές από τις ιδιότητες της μονοδιάστατης κίνησης Brown. Ένα παράδειγμα είναι η ιδιότητα Markov και η ισχυρή ιδιότητα Markov. Ένα άλλο παράδειγμα είναι οι ιδιότητες martingale της κίνησης Brown και διαφόρων συναρτήσεων της. Πιο συγκεκριμένα, μπορούμε εύκολα να δούμε την γενίκευση του θεωρήματος του Levy για την κίνηση Brown σε περισσότερες της μίας διάστασης.

Θεώρημα 3.6.1. Έστω $X_t = (X_{1,t}, \dots, X_{d,t}) \in \mathbb{R}^d$, $t \geq 0$ μία στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ η διήθηση που παράγεται από αυτή. Η X_t είναι μία κίνηση Brown αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες

- (i) $X_0 = 0$ σ.β.
- (ii) Οι τροχιές της X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.
- (iii) Η X_t είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.
- (iv) Οι $X_{i,t}X_{j,t} - \delta_{ij}t$, $i, j = 1, \dots, d$ είναι martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$. Το δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker.

3.7 Κατασκευή της κίνησης Brown

Θα ασχοληθούμε τώρα εν συντομία με την κατασκευή της κίνησης Brown. Αν και μία απόδειξη ύπαρξης της πολύ σημαντικής αυτής στοχαστικής διαδικασίας είναι απαραίτητη, ο λόγος που θα το κάνουμε αυτό δεν πηγάζει πλήρως από θεωρητικό ενδιαφέρον. Οι μέθοδοι κατασκευής της κίνησης Brown που θα δώσουμε είναι κατασκευαστικές και συνεπώς μπορεί να μας φανούν χρήσιμες στην αριθμητική κατασκευή τροχιών της κίνησης Brown και στην παραγωγή αριθμητικών αλγορίθμων για την επίλυση προβλημάτων.

Θα δώσουμε δύο διαφορετικές κατασκευές της κίνησης Brown, μία που βασίζεται στην αναπαράσταση της χρησιμοποιώντας κατάλληλες συναρτήσεις βάσης, και μία κατασκευή της σαν το κατάλληλο όριο ενός τυχαίου περιπάτου.

3.7.1 Αναπαράσταση της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας συναρτήσεις Haar

Θα ξεκινήσουμε εισάγοντας μία βάση του χώρου των συνεχών συναρτήσεων, την βάση των συναρτήσεων Haar.

Ορισμός 3.7.1. Οι συναρτήσεις $\phi_{ij}(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ που ορίζονται με βάση τον παρακάτω τύπο

$$\phi_{ij}(t) = \begin{cases} 2^{(i-1)/2}, & \frac{2j-2}{2^i} \leq t < \frac{2j-1}{2^i} \\ -2^{(i-1)/2}, & \frac{2j-1}{2^i} \leq t < \frac{2j}{2^i} \\ 0, & \text{για κάθε άλλο } t \end{cases}$$

για $i = 1, 2, \dots$ και $j = 1, 2, \dots, 2^{i-1}$ ονομάζονται **συναρτήσεις Haar**.

¹Χρησιμοποιώντας το θεώρημα επέκτασης του Kolmogorov (Kolmogorov's extension theorem). Βλέπε π.χ. [1]

Οι συναρτήσεις Haar έχουν μερικές πολύ χρήσιμες ιδιότητες:

- Οι συναρτήσεις Haar είναι ορθογώνιες στο $[0, 1]$ ως προς το εσωτερικό γινόμενο $\langle f, g \rangle = \int_0^1 \bar{g} f dt$
- Οι συναρτήσεις Haar αποτελούν ένα ορθοκανονικό πλήρες σύστημα στον χώρο $L^2[0, 1] = \{f : \langle f, f \rangle < \infty\}$.
- Οι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων Haar είναι πυκνοί στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια, εφόσον το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων είναι πυκνό στον χώρο $L^2[0, 1]$, οι γραμμικοί συνδυασμοί των συναρτήσεων Haar θα είναι πυκνοί στον χώρο $L^2[0, 1]$.

Με βάση τα παραπάνω βλέπουμε ότι οποιαδήποτε συνεχής συνάρτηση στο $[0, 1]$ και οποιαδήποτε συνάρτηση που ανήκει στον $L^2[0, 1]$ θα μπορεί να προσεγγιστεί σαν γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων Haar. Κατά συνέπεια, και η κίνηση Brown που εμπίπτει στις παραπάνω κατηγορίες θα μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια των συναρτήσεων αυτών.

Πρόσεγγιση της κίνησης Brown

Ορίζουμε τις

$$\psi_{ij}(t) = \int_0^t \phi_{ij}(s) ds$$

και θεωρούμε μία ακολουθία από ανεξάρτητες όμοια κατανομημένες κανονικές μεταβλητές Y_{ij} με $E[Y_{ij}] = 0$ και $E[Y_{ij}^2] = 1$.

Κατασκευάζουμε τα άθροισμα

$$\begin{aligned} V_0(t) &= Y_{00}\psi_{00}(t) \\ V_i(t) &= \sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij}\psi_{ij}(t), \quad i \geq 1 \end{aligned}$$

Το άθροισμα

$$X_t = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=1}^{2^{i-1}} Y_{ij}\psi_{ij}(t), \quad i \geq 1$$

είναι μία προσέγγιση της κίνησης Brown στο διάστημα $[0, 1]$.

Για την προσέγγιση της κίνησης Brown σε οποιοδήποτε διάστημα αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα της κίνησης Brown ότι αν B_t είναι κίνηση Brown τότε και η $\hat{B}_t = t B_{1/t}$ είναι κίνηση Brown. Η ιδιότητα αυτή επεκτείνει την παραπάνω κατασκευή για t από το διάστημα $[0, 1]$ σε κάθε t .

Το ότι η παραπάνω κατασκευή είναι καλά ορισμένη και το ότι προσεγγίζει την κίνηση Brown μπορεί να εκφραστεί με το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 3.7.1. Η σειρά $\sum_{i=0}^{\infty} V_i(t)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο t (σ.β.). Αν $X_t = \sum_{i=0}^{\infty} V_i(t)$ τότε η X_t είναι μία κίνηση Brown για την οποία ισχύει $X_0 = 0$.

Απόδειξη: Βλ. [1]. □.

Σχόλιο: Η αναπαράσταση της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας ως βάση τις συναρτήσεις Haar δεν είναι η μόνη δυνατή τέτοια αναπαράσταση. Μία αρκετά δημοφιλής αναπαράσταση της κίνησης Brown είναι σαν μία σειρά Fourier με τυχαίους συντελεστές. Η αναπαράσταση αυτή ονομάζεται ανάπτυγμα Karhunen-Loève. Σύμφωνα με την αναπαράσταση αυτή το άθροισμα

$$X_t(\omega) = \sum_{n=0}^{\infty} Z_n(\omega)\Phi_n(t), \quad 0 \leq t \leq T$$

όπου

$$\Phi_n(t) = \frac{2\sqrt{2T}}{(2n+1)\pi} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi t}{2T}\right), \quad n = 0, 1, \dots$$

και οι $\{Z_i\}$, $i = 0, 1, \dots$ είναι ανεξάρτητες κανονικές τυχαίες μεταβλητές με $E[Z_i] = 0$ και $E[Z_i^2] = 1$, συγκλίνει κατά L^2 σε μία κίνηση Brown στο διάστημα $[0, T]$.

3.7.2 Η εμβύθιση Skorokhod (Skorokhod Embedding)

Θα δώσουμε τώρα μία εναλλακτική κατασκευή της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας ως βασικό εργαλείο τον τυχαίο περίπατο. Χρησιμοποιώντας την ιδέα της εμβύθισης του Skorokhod (Skorokhod embedding) μπορούμε να προσεγγίσουμε μία κίνηση Brown ξεκινώντας από ένα τυχαίο περίπατο και κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή κλίμακας.

Η κεντρική ιδέα της κατασκευής αυτής βασίζεται στην ακόλουθη παρατήρηση: Έστω ξ_i ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $E[\xi_i] = 0$ και $E[\xi_i^2] = 1$. Ορίζουμε τον τυχαίο περίπατο $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Τότε υπάρχει μία κίνηση Brown B_t και χρόνοι στάσης $\tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots$ τέτοιοι ώστε $B_{\tau_n} = S_n$, σ.β. για κάθε n .

Η κεντρική αυτή ιδέα μπορεί να γραφεί σε πιο αυστηρή μορφή με την χρήση του παρακάτω θεωρήματος:

Θεώρημα 3.7.2. (Skorokhod, Strassen) Έστω ξ_i ανεξάρτητες, όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $E[\xi_i] = 0$, και $E[\xi_i^2] = 1$. Ας γράψουμε $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$. Τότε, υπάρχει μία κίνηση Brown τέτοια ώστε

$$\frac{1}{t^{1/2}} \sup_{r \leq t} |S_{[r]} - B_r| \rightarrow 0, \quad t \rightarrow \infty$$

όπου με $[r]$ συμβολίζουμε το ακέραιο μέρος του r , και το όριο θεωρείται ως σύγκλιση σε πιθανότητα.

Απόδειξη: Η απόδειξη παραλείπεται. Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον [15] \square

Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει πώς μπορούμε να προσεγγίσουμε ποσότητες υπολογισμένες στην τροχιά μίας κίνησης Brown από ποσότητες υπολογισμένες στα διαδοχικά σημεία που επισκέπτεται ένας τυχαίος περίπατος. Το θεώρημα αυτό οφείλεται στον Donsker και πολλές φορές αναφέρεται στην βιβλιογραφία σαν το **συναρτησιακό κεντρικό οριακό θεώρημα (functional central limit theorem)**.

Θεώρημα 3.7.3. Έστω ξ_i ανεξάρτητες, όμοια κατανομημένες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει $E[\xi_i] = 0$ και $E[\xi_i^2] = 1$. Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$X_t^n = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k \leq nt} \xi_k, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Έστω επίσης ότι B είναι μία κίνηση Brown στο $[0, 1]$ και ας ορίσουμε σαν $D[0, 1]$ τον χώρο των συναρτήσεων στο $[0, 1]$ που είναι δεξιά συνεχείς και έχουν αριστερά όρια. Έστω f μία απεικόνιση $f : D[0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μετρήσιμη και σ.β. συνεχής στην τροχιά της B . Τότε

$$f(X^n) \rightarrow f(B)$$

και η σύγκλιση είναι σύγκλιση σε κατανομή.

Απόδειξη: Για την απόδειξη παραπέμπουμε στον [15] \square

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε να προτείνουμε την παρακάτω διαδικασία προσέγγισης της κίνησης Brown.

Προσέγγιση της κίνησης Brown χρησιμοποιώντας τον τυχαίο περίπατο.

Για να προσεγγίσουμε τις τροχιές της κίνησης Brown μπορούμε να ακολουθήσουμε την παρακάτω διαδικασία:

- Παράγουμε ακολουθίες τυχαίων μεταβλητών ξ_i οι οποίες είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανομημένες, π.χ. τέτοιες ώστε $P(\xi = 1) = P(\xi = -1) = \frac{1}{2}$.
- Υπολογίζουμε τα άθροισματα

$$X_t^n = \frac{1}{n^{1/2}} \sum_{k \leq nt} \xi_k, \quad t \in [0, 1], \quad n = 1, 2, \dots$$

Τα X_t^n για αρκετά μεγάλο n είναι προσεγγίσεις της τροχιάς μίας κίνησης Brown B_t . Η προσέγγιση εννοείται κατά την έννοια που περιγράφει το θεώρημα 3.7.3.

- Για την επέκταση της διαδικασίας κατασκευής έξω από το διάστημα $[0, 1]$ αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ιδιότητα ότι αν B_t είναι κίνηση Brown τότε και η $\hat{B}_t = tB_{1/t}$ είναι και αυτή κίνηση Brown.

3.8 Παράρτημα: Απόδειξεις θεωρημάτων

3.8.1 Απόδειξη της ιδιότητας Markov

Θα παρουσιάσουμε εδώ μία απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1 που αποτελεί μία έκφραση της ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown. Για την ευκολία των αναγνωστών παραθέτουμε ξανά την διατύπωση του θεωρήματος.

Θεώρημα 3.2.1 Έστω Y μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και θ_s ο τελεστής μετατόπισης (shift operator) ο οποίος έχει την ακόλουθη δράση $(\theta_s \omega)(t) = \omega(t + s)$. Τότε

$$E_x[Y \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[Y]$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη ακολουθούμε τον Bass [1]. Θα ξεκινήσουμε με την περίπτωση $Y = f(B_t)$ όπου f φραγμένη και μετρήσιμη κατά Borel συνάρτηση. Στην περίπτωση αυτή η προς απόδειξη σχέση παίρνει την μορφή

$$E_x[f(X_t) \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] = E_{X_s}[f(X_t)]$$

Αρκεί να δείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα για την περίπτωση όπου $f(x) = e^{ikx}$ όπου $i^2 = -1$ και $k \in \mathbb{R}$. Η γενικότερη f μπορεί να προσεγγιστεί σαν ένας γραμμικός συνδυασμός όρων της μορφής e^{ikx} (ανάπτυγμα Fourier), οπότε χρησιμοποιώντας την γραμμική ιδιότητα της υπό συνθήκη μέσης τιμής μπορούμε να καταλήξουμε στο ζητούμενο.

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} E_x[f(B_t) \circ \theta_s \mid \mathcal{F}_s] &= E_x[f(B_{t+s}) \mid \mathcal{F}_s] = E_x[e^{ikB_{t+s}} \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E_x[e^{ik(B_{t+s}-B_s)} e^{ikB_s} \mid \mathcal{F}_s] = e^{ikB_s} E_x[e^{ik(B_{t+s}-B_s)} \mid \mathcal{F}_s] \\ &= e^{ikB_s} E_x[e^{ik(B_{t+s}-B_s)} \mid \mathcal{F}_s] = e^{-k^2 t/2} e^{ikB_s} \end{aligned}$$

όπου στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά την ιδιότητα της κίνησης Brown σύμφωνα με την οποία η μεταβολή $B_{t+s} - B_s$ είναι ανεξάρτητη της \mathcal{F}_s και την ιδιότητα ότι η κατανομή της μεταβολής αυτής είναι η $N(0, t)$. Για κάθε z έχουμε ότι

$$E_z[e^{ikB_s}] = E_0[e^{ikB_t} e^{ikz}] = e^{ikz} e^{-k^2 t/2}$$

Αντικαθιστώντας το z με το X_s έχουμε το ζητούμενο.

Για την γενικότερη περίπτωση θα θεωρήσουμε ότι η Y είναι φραγμένη και μετρήσιμη ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{F}_∞ . Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να προσεγγίσουμε την Y σαν το γινόμενο $\prod_{i=1}^n f_i(B_{t_i})$, $s \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$ όπου οι f_i είναι φραγμένες συναρτήσεις. Η γενική περίπτωση μπορεί να επιτευχθεί χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της υπό συνθήκη μέσης τιμής και παίρνοντας το όριο $n \rightarrow \infty$. Στο όριο αυτό θα προσεγγίσουμε την γενική φραγμένη και \mathcal{F}_∞ μετρήσιμη Y . Η αυστηρή αιτιολόγηση της προσέγγισης αυτής βασίζεται στην χρήση του θεωρήματος μονότονης κλάσης (monotone class theorem) από την θεωρία μέτρου το οποίο είναι εκτός των πλαισίων του παρόντος. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε στα [33], [15]. Η απόδειξη της ιδιότητας Markov για $Y \in \mathcal{F}_\infty$ της παραπάνω μορφής μπορεί να γίνει με επαγωγή. Για $n = 1$ ο ισχυρισμός ισχύει όπως δείξαμε πιο πάνω στην περίπτωση που $Y = f(B_t)$. Ας υποθέσουμε πως ισχύει για γενικό n . Θα προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι ισχύει και για $n + 1$. Ας θέσουμε $V = \prod_{j=2}^{n+1} f_j(B_{t_j} - B_{t_1})$ και $h(y) = E_y[V]$. Έχουμε

$$\begin{aligned} E_x\left[\prod_{j=1}^{n+1} f_j(B_{t_j}) \mid \mathcal{F}_s\right] &= E_x[E_x[V \circ \theta_{t_1} \mid \mathcal{F}_{t_1}] \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E_x[E_{B_{t_1}}[V] f_1(B_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] = E_x[h(B_{t_1}) f_1(B_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] \\ &= E_x[h f_1(B_{t_1}) \mid \mathcal{F}_s] = E_{B_s}[h f_1(B_{t_1-s})] \end{aligned}$$

Αλλά για κάθε y έχουμε

$$\begin{aligned} E_y[(h f_1)(B_{t_1-s})] &= E_y[E_{B_{t_1-s}}[V] f_1(B_{t_1-s})] \\ &= E_x[E_y[V \circ \theta_{t_1-s} \mid \mathcal{F}_{t_1-s}] f_1(B_{t_1-s})] \\ &= E_y[(V \circ \theta_{t_1-s}) f_1(B_{t_1-s})] \end{aligned}$$

Θέτοντας $V := \prod_{j=2}^{n+1} f_j(B_{t_j} - B_{t_1})$ και $y = B_s$ παίρνουμε την ισότητα που θέλουμε για $n+1$ και έτσι ολοκληρώνεται το βήμα της επαγωγής. \square

Σχόλιο: Στο παραπάνω θεώρημα το $Y \in \mathcal{F}_\infty$ όπου $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Τα αποτελέσματα του θεωρήματος ισχύουν και για Y τα οποία είναι μετρήσιμα ως προς κάποιες μεγαλύτερες σ-άλγεβρες τις \mathcal{F}_∞^+ όπου $\mathcal{F}_t^+ = \bigcap_{\epsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\epsilon}$ όπου $\tilde{\mathcal{F}}$ είναι η σ-άλγεβρα \mathcal{F} στην οποία έχουμε συμπεριλάβει και τα σύνολα τα οποία έχουν μέτρο 0 κάτω από το μέτρο Wiener. Για την γενίκευση παραπέμπουμε στο [1].

3.8.2 Απόδειξη της ισχυρής ιδιότητας Markov για την κίνηση Brown

Θα ασχοληθούμε τώρα με την απόδειξη της ισχυρής ιδιότητας Markov. Θα αποδείξουμε πρώτα το θεώρημα 3.2.2 το οποίο και παραθέτουμε ξανά για την ευκολία των αναγνωστών.

Θεώρημα 3.2.2 Έστω B_t μία κίνηση Brown και T ένας πεπερασμένος χρόνος στάσης για την B_t . Τότε ισχύει ότι $\{B_{t+T} - B_t\}$ είναι μία κίνηση Brown ανεξάρτητη της άλγεβρας \mathcal{F}_T .

Απόδειξη: Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστεί να προσεγγίσουμε τον χρόνο στάσης T με μία ακολουθία χρόνων στάσης T_n η οποία ορίζεται σαν $T_n = \frac{k}{2^n}$ αν $T(\omega) \in [\frac{(k-1)}{2^n}, \frac{k}{2^n})$. Η ακολουθία αυτή τείνει μονότονα στον χρόνο στάσης T , $T_n \downarrow T$. Υπενθυμίζουμε επίσης και τον ορισμό της σ-άλγεβρας \mathcal{F}_T

$$\mathcal{F}_T = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t, \forall t > 0\}$$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού της ανεξαρτησίας αρκεί να δείξουμε ότι

$$E_x \left[e^{i\nu(B_{T+t} - B_T)} e^{i\lambda B_{T-\tau}} \right] = E_x \left[e^{i\nu(B_{T+t} - B_T)} \right] E_x \left[e^{i\lambda B_{T-\tau}} \right]$$

(αν κρίνετε σκόπιμο συμβουλευθείτε την παράγραφο σχετικά με τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις και την ανεξαρτησία). Εφόσον ο χρόνος στάσης T θεωρείται φραγμένος μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} E_x \left[e^{i\nu(B_{T_n+t} - B_{T_n})} e^{i\lambda B_{T_n-\tau}} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} E_x \left[e^{i\nu(B_{T_n+t} - B_{T_n})} e^{i\lambda B_{T_n-\tau}} ; \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E_x \left[e^{i\nu(B_{T_n+t} - B_{T_n})} \right] E_x \left[e^{i\lambda B_{T_n-\tau}} \right] \mathbf{1}_{\{T_n = \frac{k}{2^n}\}} = E_x \left[e^{i\nu(B_{T_n+t} - B_{T_n})} \right] E_x \left[e^{i\lambda B_{T_n-\tau}} \right] \end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία των $B_{\frac{k}{2^n}+t} - B_{\frac{k}{2^n}}$ και των $B_{\frac{k}{2^n}-\tau}$ για κάθε k . Μπορούμε τώρα να πάρουμε το όριο $n \rightarrow \infty$ στην παραπάνω ισότητα και χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης να περάσουμε το όριο μέσα από την μέση τιμή καταλήγοντας έτσι στο ζητούμενο αποτέλεσμα. Αποδείξαμε λοιπόν την ανεξαρτησία.

Θα αποδείξουμε τώρα ότι η $B_{T+t} - B_T$ είναι μία κίνηση Brown που μάλιστα έχει την ίδια κατανομή με την B_t . Για να γίνει αυτό αρκεί να υπολογίσουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση της τυχαίας μεταβλητής $B_{T+t} - B_T$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ίδια διαδικασία προσέγγισης του χρόνου στάσης T . Έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} E_x \left[e^{i\lambda(B_{T_n+t} - B_{T_n})} \right] &= \sum_{k=1}^{\infty} E_x \left[e^{i\lambda(B_{T_n+t} - B_{T_n})} \mathbf{1}_{\{T_n = \frac{k}{2^n}\}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E_x \left[e^{i\lambda(B_{\frac{k}{2^n}+t} - B_{\frac{k}{2^n}})} \mathbf{1}_{\{T_n = \frac{k}{2^n}\}} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \mathbf{1}_{\{T_n = \frac{k}{2^n}\}} = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} \mathbf{1}_{\{T < \infty\}} \end{aligned}$$

Τώρα, παίρνουμε το όριο $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης για να αντιμετωπίσουμε τον τελεστή της μέσης τιμής με το όριο καταλήγουμε στο ότι

$$E_x \left[e^{i\lambda(B_{T+t} - B_T)} \right] = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

το οποίο δείχνει ότι η $B_{T+t} - B_T$ είναι μία κίνηση Brown.

Σχόλιο: Ο περιορισμός T φραγμένος δεν είναι απαραίτητος και μπορεί να παραλειφθεί. Για τις λεπτομέρειες παραπέμπουμε στο [1].

Θα αποδειξουμε τώρα το θεώρημα 3.2.3.

Θεώρημα 3.2.3 Έστω θ_s ο τελεστής μετατόπισης που ορίστηκε προηγουμένως, U μία φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση και T ένας χρόνος στάσης. Τότε

$$E_x[f(Y \circ \theta_T) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[Y]$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη του θεωρήματος 3.2.3 θα χρησιμοποιήσουμε πάλι την προσέγγιση του χρόνου στάσης T από την ακολουθία T_n (βλ. απόδειξη θεωρήματος 3.2.2). Αρκεί να δείξουμε ότι

$$E_x[f(B_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[f(B_t)]$$

για f συνεχή και φραγμένη.

Αν A κάποιο σύνολο που ανήκει στην σ -άλγεβρα \mathcal{F}_{T_n} μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} E_x[f(B_{T_n+t}); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}] &= E_x[f(B_{t+\frac{k}{2^n}}); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}] \\ E_x[E_{B_{\frac{k}{2^n}}} f(B_t); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}] &= E_x[E_{B_{T_n}} f(B_t); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\}] \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα Markov για την κίνηση Brown στον χρόνο $\frac{k}{2^n}$.

Με βάση τον παραπάνω υπολογισμό έχουμε

$$\begin{aligned} E_x[f(B_{T_n+t}); A \cap \{T < \infty\}] &= \sum_{k=1}^{\infty} E_x \left[f(B_{T_n+t}); A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} E_x \left[E_{B_{T_n}} [f(B_t)]; A \cap \{T_n = \frac{k}{2^n}\} \right] = E_x [E_{B_{T_n}} [f(B_t)]; A \cap \{T < \infty\}] \end{aligned}$$

Παίρνουμε τώρα το όριο $n \rightarrow \infty$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης καταλήγουμε στο

$$E_x[f(B_{T+t}); A \cap \{T < \infty\}] = E_x[E_{B_T}[f(B_t)]; A \cap \{T < \infty\}]$$

Από τον ορισμό της υπό συνθήκη μέσης τιμής καταλήγουμε στο ότι

$$E_x[f(B_{t+T}) \mid \mathcal{F}_T] = E_{B_T}[f(B_t)]$$

Η γενικότερη Y μπορεί να προσεγγιστεί σαν γινόμενο της μορφής $\prod_{i=1}^n f_i(B_{t_i})$ στο όριο όπου $n \rightarrow \infty$ με παρεμφερή τρόπο όπως και στην ιδιότητα Markov. \square

3.8.3 Απόδειξη του θεωρήματος του Levy

Θα ασχοληθούμε εδώ με την απόδειξη του θεωρήματος του Levy. Το θεώρημα αυτό έχει την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 3.4.1 Έστω X_t , $t \geq 0$ μία στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$ η διήθηση που παράγεται από αυτή. Η X_t είναι μία κίνηση Brown αν και μόνο αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες

- (i) $X_0 = 0$ σ.β.
- (ii) Οι τροχιές της X_t είναι συνεχείς συναρτήσεις του χρόνου.
- (iii) Η X_t είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.
- (iv) Η $X_t^2 - t$ είναι μία martingale ως προς την διήθηση $\mathcal{G}_t = \sigma(X_s, s \leq t)$.

Απόδειξη: Το ευθύ είναι απλό και ουσιαστικά η απόδειξη έχει δοθεί στην απόδειξη του θεωρήματος 3.3.1. Το αντίστροφο απαιτεί λίγο παραπάνω κόπο. Θα χρησιμοποιήσουμε και πάλι την έννοια της χαρακτηριστικής συνάρτησης. Αν η X_t έχει τις ιδιότητες 1-4 μπορούμε να δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία

$$M_t = \exp\left(i\lambda X_{t \wedge T} + \frac{1}{2}\lambda^2(t \wedge T)\right)$$

είναι martingale για κάθε λ , όπου T κάποιος (φραγμένος) χρόνος στάσης και $i^2 = -1$. Για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{F}_s$, $s < t < T$ έχουμε

$$E[\mathbf{1}_A M_t | \mathcal{F}_s] = \mathbf{1}_A M_s$$

από όπου με κατάλληλη αναδιοργάνωση των όρων καταλήγουμε στο

$$E[\mathbf{1}_A e^{i\lambda(X_t - X_s)}] = P(A) e^{-\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}$$

Από την σχέση αυτή μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η μεταβολή $B_t - B_s$ είναι ανεξάρτητη της \mathcal{F}_s και είναι κατανομημένη με βάση την κατανομή $N(0, t - s)$. Συνεπώς, η X_t είναι κίνηση Brown. \square

3.9 Βασικά σημεία του κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγαμε μία πολύ σημαντική στοχαστική διαδικασία, την κίνηση Brown (ή διαδικασία Wiener) και μελετήσαμε κάποιες από τις ιδιότητες της. Η κίνηση Brown είναι πολύ βασική για την στοχαστική ανάλυση και τις διαδικασίες διάχυσης ειδικότερα, αφού αποτελεί την βάση για την μελέτη πιο περίπλοκων διαδικασιών.

Πρέπει να θυμόμαστε:

- Τον ορισμό της κίνησης Brown και το ότι ακολουθεί την κανονική κατανομή.
- Η κίνηση Brown έχει την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Η ισχυρή ιδιότητα Markov είναι η ίδια με την ιδιότητα Markov αλλά για μία κατηγορία τυχαίων χρόνων, τους χρόνους στάσης.
- Η κίνηση Brown σχετίζεται με μερικές martingales. Οι ιδιότητες martingale της κίνησης Brown είναι ικανές για τον χαρακτηρισμό της κίνησης Brown με βάση το θεώρημα του Levy.

Κεφάλαιο 4

Η θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης

Στο κεφάλαιο αυτό θα εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες από την στοχαστική ανάλυση. Οι έννοιες αυτές σχετίζονται με τον ορισμό του ολοκληρώματος χρησιμοποιώντας ως διαδικασία ολοκλήρωσης (ολοκληρωτή) μία στοχαστική διαδικασία όπως π.χ. η κίνηση Brown. Θα μελετήσουμε εκτενώς την θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης επάνω στην κίνηση Brown και τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος. Στο τέλος του κεφαλαίου θα δοθούν νύξεις για επεκτάσεις των εννοιών αυτών για ολοκλήρωση επάνω σε πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες.

Η θεωρία της στοχαστικής ολοκλήρωσης βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι εφαρμογές της στην χρηματοοικονομική, και συγκεκριμένα σε προβλήματα όπως π.χ. τιμολόγηση χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων (τιμολόγηση παραγώγων συμβολαίων), επιλογή χαρτοφυλακίου κ.α.

4.1 Το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô

Όπως είδαμε στο κεφάλαιο σχετικά με την κίνηση Brown η κίνηση Brown είναι μία συνάρτηση παθολογική της οποίας η παράγωγος δεν ορίζεται πουθενά. Όμως μπορούμε να ολοκληρώσουμε επάνω σε αυτή. Ολοκληρώματα επάνω στην κίνηση Brown είναι πολύ χρήσιμα όταν χρειαστεί να μελετήσουμε την θεωρία διαχύσεων ή τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό θα δείξουμε πως μπορούμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown παρουσιάζοντας τον τρόπο που υπέδειξε στα τέλη της δεκαετίας του 1940 ο Ιάπωνας μαθηματικός Kiyoshi Itô. Κατά την διάρκεια του κεφαλαίου θα αναφερθούμε εν συντομία και σε άλλους εναλλακτικούς τρόπους ορισμού στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

4.1.1 Ορισμός του ολοκληρώματος Itô : Εισαγωγή

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία τυχαία συνάρτηση f η οποία εξαρτάται με κάποιο τρόπο από την έκβαση κάποιας κίνησης Brown και θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της επάνω στις μεταβολές της κίνησης Brown. Θέλουμε δηλαδή να ορίσουμε το ολοκλήρωμα

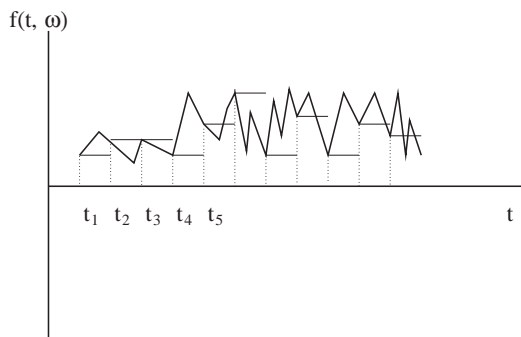
$$\int_a^b f(t, \omega) dB_t(\omega)$$

όπου $B_t(\omega)$ είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το 0 ενώ f είναι μία συνάρτηση $f : (0, \infty) \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Θεωρούμε φυσικά ότι (Ω, \mathcal{F}, P) είναι ένας χώρος πιθανοτήτων. Η εξάρτηση της συνάρτησης από την τυχαία μεταβλητή και συγκεκριμένα από την κίνηση Brown ενυπάρχει μέσω του ω .

Ας ξεκινήσουμε με το να εξηγήσουμε διαισθητικά τι εννοούμε με το παραπάνω ολοκλήρωμα και κατόπιν θα ασχοληθούμε με τον αυστηρό ορισμό της έννοιας αυτής.

Ορισμός 4.1.1. Ας θεωρήσουμε την διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ του διαστήματος $[a, b]$ και ότι προσεγγίζουμε την συνάρτηση $f(t, \omega)$ ως

$$f(t, \omega) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega) \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t),$$



Σχήμα 4.1: Προσέγγιση (λεπτή γραμμή) της $f(t, \omega)$ (παχιά γραμμή) για μία μόνο πραγματοποίηση της στοχαστικής διαδικασίας (δηλαδή για κάποιο δεδομένο ω ».

(βλέπε σχήμα 4.1) Το ολοκλήρωμα Itô μπορεί να οριστεί σαν το όριο στον L^2

$$\int_a^b f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i, \omega) [B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega)$$

Θα τονίσουμε δύο σημεία του ορισμού στα οποία θα επανέλθουμε στην συνέχεια με περισσότερες τεχνικές λεπτομέρειες.

- Η τιμή της συνάρτησης f την χρονική στιγμή t θα πρέπει να εξαρτάται από τις τιμές του B_s για $s \leq t$ αλλά όχι για $s \geq t$.
- Το όριο λαμβάνεται κατά την L^2 έννοια και όχι σημειακά δηλαδή για κάθε ω .

Τα δύο παραπάνω σημεία είναι ιδιαίτερα σημαντικά και διαφοροποιούν το ολοκλήρωμα του Itô από άλλους πιθανούς ορισμούς στοχαστικών ή και ντετερμινιστικών ολοκληρωμάτων.

Με παρόμοιο τρόπο μπορεί να οριστεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t, \omega) dX_t$ επάνω σε πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες X_t . Μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση όπου η X_t είναι martingale. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στην παράγραφο 4.8.3.

Παράδειγμα 4.1.1. Ας ξεκινήσουμε με ένα παράδειγμα σχετικά με το που μπορεί να χρειαστεί ένα τέτοιο ολοκλήρωμα. Ας θεωρήσουμε ότι ένας επενδυτής μπορεί να επενδύσει κάποιο ποσό σε έναν τίτλο η αξία του οποίου, S_t , είναι μία στοχαστική διαδικασία. Ας υποθέσουμε δε ότι ένα μοντέλο για την τιμή του τίτλου αυτού είναι η κίνηση Brown δηλαδή $S_t = B_t$. Ο επενδυτής αποφασίζει κάθε χρονική στιγμή πόσα κομμάτια από τον τίτλο θα έχει στην κατοχή του, ας ονομάσουμε h_t το ποσό αυτό. Η απόφαση του πόσα κομμάτια θα κρατήσει από τον τίτλο στην διάθεση του ο επενδυτής εξαρτάται από την εξέλιξη της τιμής του τίτλου δηλαδή είναι και αυτό μία τυχαία μεταβλητή που εξαρτάται από την B_t . Θα χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό $h_t = h(t, \omega)$. Σε κάποιο χρονικό διάστημα $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ κατά το οποίο θεωρούμε ότι το h_t παραμένει σταθερό, λόγω της μεταβολής της τιμής του τίτλου ο επενδυτής θα έχει μεταβολή του πλούτου του κατά $h_{t_i}(S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) = h_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$. Ο συνολικός του πλούτος, V_t , στην καταληκτική χρονική στιγμή t , η ισodύναμη μετά από την πάροδο N χρονικών περιόδων, θα είναι το άθροισμα των μεταβολών αυτών δηλαδή

$$V_t = V_0 + \sum_{i=1}^N h_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

όπου $t_N = t$. Αν θεωρήσουμε ότι $\sup_i (t_{i+1} - t_i) \rightarrow 0$ ή ισodύναμη ότι $N \rightarrow \infty$, δηλαδή ότι οι μεταβολές γίνονται σε πολύ μικρά χρονικά διαστήματα έτσι ώστε ο χρόνος να μπορεί να θεωρηθεί ότι μεταβάλλεται συνεχώς, τότε βλέπουμε ότι ο πλούτος του επενδυτή μπορεί να παρασταθεί από ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα. Αυτό είναι μία πολύ απλή πρώτη εφαρμογή. Όπως θα δούμε και στην συνέχεια οι ιδέες αυτές μπορεί να επεκταθούν και για περιπτώσεις που οι διαδικασίες των τιμών μπορεί να είναι και πιο περίπλοκες από την κίνηση Brown.

Μπορούμε να κάνουμε την διαισθητική αυτή προσέγγιση του ολοκληρώματος κατά Ιτô πύο αυστηρή με τον ακόλουθο τρόπο:

- Μπορούμε να ορίσουμε μία συγκεκριμένη κλάση στοχαστικών διαδικασιών, τις διαδικασίες βήματος (step processes) οι οποίες είναι της μορφής

$$f_{step}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

όπου η_j είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι \mathcal{F}_{t_j} -μετρήσιμες και t_j είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[a, b]$ τέτοια ώστε $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n \leq b$. Μπορούμε να θεωρήσουμε μία ακολουθία διαμερίσεων του διαστήματος που γίνονται όλο και πιο λεπτές καθώς το $n \rightarrow \infty$ και συνεπώς να πάρουμε μία ακολουθία απο διαδικασίες βήματος $f_{step, n}$.

- Το στοχαστικό ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί για μία διαδικασία βήματος σαν ένα άθροισμα

$$I(f_{step}(t)) := \int_a^b f_{step}(t) dB_t = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Για το στοχαστικό ολοκλήρωμα μίας διαδικασίας βήματος ισχύει ότι

$$(4.1) \quad E[|I(f_{step})|^2] := E\left[\left|\int_a^b f_{step}(t) dB_t\right|^2\right] = E\left[\int_a^b |f_{step}(t)|^2 dt\right]$$

- Δεδομένης μίας στοχαστικής διαδικασίας $f(t)$ λέμε ότι έχουμε μία προσέγγιση της διαδικασίας αυτής από μία ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step, n}(t)$ αν ισχύει

$$\|f - f_{step, n}\|_{M^2} := \left(\int_a^b |f - f_{step, n}|^2 dt\right)^{1/2} \rightarrow 0, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

- Μπορεί να αποδειχθεί ότι η ακολουθία $I(f_{step, n})$ είναι μία ακολουθία η οποία είναι ακολουθία Cauchy στον χώρο L^2 και η οποία συνεπώς συγκλίνει¹. Αυτό οφείλεται στο ότι ισχύει η ιδιότητα (4.1) για τα ολοκληρώματα διαδικασιών βήματος. Μπορεί επίσης να αποδειχθεί ότι το όριο της ακολουθίας αυτής είναι ανεξάρτητο από την προσέγγιση της διαδικασίας f από διαδικασίες βήματος δηλαδή ανεξάρτητη της επιλογής της ακολουθίας $f_{step, n}$ (αρκεί φυσικά η ακολουθία αυτή να πληρεί την συνθήκη $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{step, n}\|_{M^2} = 0$). Το όριο της ακολουθίας $I(f_{step, n})$ ορίζεται σαν το στοχαστικό ολοκλήρωμα $I(f)$ της συνάρτησης f .
- Συνοψίζοντας μπορούμε να ορίσουμε (α) τον χώρο M^2 που αποτελείται από τις στοχαστικές διαδικασίες $f(t)$ τέτοιες ώστε να μπορούν να προσεγγιστούν από ακολουθίες διαδικασιών βήματος και για τις οποίες ισχύει $E\left[\int_a^b |f(t)|^2 dt\right] < \infty$ και (β) τον χώρο L^2 των τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών δηλαδή των τυχαίων μεταβλητών η για τις οποίες ισχύει $E[\eta^2] < \infty$ και να θεωρήσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα σαν μία απεικόνιση απο τον χώρο M^2 στον χώρο L^2 . Η απεικόνιση αυτή είναι μία γραμμική απεικόνιση η οποία είναι και μία ισομετρία μεταξύ των δύο χώρων δηλαδή ισχύει

$$\|I(f)\|_{L^2} = \|f\|_{M^2}$$

Με βάση την παραπάνω κατασκευή, το στοχαστικό ολοκλήρωμα μπορεί να οριστεί για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία που ανήκει στον χώρο M^2 . Παρατηρούμε ότι η προσέγγιση της συνάρτησης $f(t, \omega)$ που υιοθετήσαμε στον ορισμό του ολοκληρώματος του Ιτô είναι μία προσέγγιση της στοχαστικής διαδικασίας αυτής από μία διαδικασία βήματος, όπου $\eta_j = f(t_j, \omega)$. Μπορούμε να δούμε πως αν $f \in M^2$ τότε και $\eta_j \in L^2$.

¹Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου 1 και παράρτημα του παρόντος κεφαλαίου.

4.1.2 Ορισμός του ολοκληρώματος Itô : Τεχνικά σημεία

Στην παράγραφο αυτή θα αναλύσουμε πιο διεξοδικά τα παραπάνω βήματα.

Ας ξεκινήσουμε με μερικούς ορισμούς.

Ορισμός 4.1.2. Μία στοχαστική διαδικασία f η οποία μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$(4.2) \quad f(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

για κάποια διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ του διαστήματος $[a, b]$ όπου η_j τυχαίες μεταβλητές οι οποίες είναι \mathcal{F}_{t_j} μετρήσιμες και $E[\eta_j^2] < \infty$ ονομάζεται **διαδικασία βήματος**. Θα συμβολίζουμε με $M_{step}([a, b])$ το σύνολο των διαδικασιών βήματος στο διάστημα $[a, b]$.

Θα ορίσουμε τώρα το στοχαστικό ολοκλήρωμα για μία διαδικασία βήματος.

Ορισμός 4.1.3. Αν η στοχαστική διαδικασία f είναι διαδικασία βήματος της μορφής της εξίσωσης (4.2) τότε το στοχαστικό ολοκλήρωμα της ως προς την κίνηση Brown ορίζεται ως

$$\int_a^b f(t) dB_t = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Παράδειγμα 4.1.2. Αν f_{step} είναι μία διαδικασία βήματος αποδείξτε ότι ισχύει η ισομετρία του Itô δηλαδή ότι

$$E[|I(f_{step})|^2] := E\left[\left|\int_a^b f_{step}(t) dB_t\right|^2\right] = E\left[\int_a^b |f_{step}(t)|^2 dt\right]$$

Η ιδιότητα αυτή όπως είδαμε και παραπάνω είναι ιδιαίτερα σημαντική για την κατασκευή του στοχαστικού ολοκληρώματος για οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία f .

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε την διαδικασία βήματος

$$f_{step}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

η οποία όπως είδαμε και πιο πάνω έχει το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$I(f_{step}) := \int_a^b f_{step}(t) dt \equiv \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την μέση τιμή του τετραγώνου της παράστασης αυτής. Έχουμε ότι

$$|I(f_{step})|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2 + 2 \sum_{k < j} \eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \eta_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})$$

όπου απλά χωρίσαμε τους διαγώνιους και τους μη διαγώνιους όρους στο άθροισμα αυτό. Η μεταβολή της κίνησης Brown $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ είναι ανεξάρτητη από ότι συνέβει πριν από την χρονική στιγμή t_j . Συνεπώς, εφόσον η τυχαία μεταβλητή η_j είναι \mathcal{F}_{t_j} μετρήσιμη, οι τυχαίες μεταβλητές $(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})$ και η_j είναι ανεξάρτητες. Το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε συνάρτηση των μεταβλητών αυτών. Συνεπώς

$$E[\eta_j^2 (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = E[\eta_j^2] E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = E[\eta_j^2] (t_{j+1} - t_j)$$

εφόσον $E[(B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2] = (t_{j+1} - t_j)$ από τις ιδιότητες της κίνησης Brown. Επιπλέον εφόσον $k < j$ οι τυχαίες μεταβλητές $\eta_k, B_{t_{k+1}} - B_{t_k}, \eta_j, B_{t_{j+1}} - B_{t_j}$ είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους και συνεπώς

$$E[\eta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j}) \eta_k (B_{t_{k+1}} - B_{t_k})] = E[\eta_j (B_{t_{k+1}} - B_{t_k}) \eta_k] E[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] = 0$$

εφόσον $E[B_{t_{j+1}} - B_{t_j}] = 0$ από τις ιδιότητες της κίνησης Brown. Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$E[I(f_{step})] = \sum_{j=0}^{n-1} E[\eta_j^2](t_{j+1} - t_j)$$

Ο τελευταίος όρος όμως μπορεί πολύ εύκολα να αναγνωριστεί σαν η μέση τιμή του ολοκληρώματος

$$E \left[\int_a^b |f_{step}(t)|^2 dt \right] = E \left[\int_a^b \left| \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} \right|^2 dt \right]$$

Πράγματι, έχουμε ότι

$$|f_{step}|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} + \sum_{k < j} \eta_k \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})} = \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j^2 \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}$$

αφού $\mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} \mathbf{1}_{[t_k, t_{k+1})} = 0$ για $k < j$ ², από όπου προκύπτει ότι

$$E \left[\int_a^b |f_{step}(t)|^2 dt \right] = E \left[\int_a^b \left| \sum_{j=0}^{n-1} \eta_j \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})} \right|^2 dt \right] = \sum_{j=0}^{n-1} E[\eta_j^2](t_{j+1} - t_j)$$

Συνεπώς αποδείχθηκε ότι για διαδικασίες βήματος ισχύει η ισομετρία του Itô . □

Θα ορίσουμε τώρα μία γενικότερη κλάση στοχαστικών διαδικασιών (όχι απαραίτητα διαδικασιών βήματος) για τις οποίες θα μπορέσουμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα.

Ορισμός 4.1.4. Μία στοχαστική διαδικασία f λέμε ότι ανήκει στον χώρο $M^2([a, b])$ αν είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ και ικανοποιεί την συνθήκη

$$\|f\|_{M^2([a, b])} := E \left[\int_a^b |f|^2 dt \right] < \infty$$

Σχόλιο: Πολλές φορές όταν δεν υπάρχει αμφιβολία ως προς το διάστημα το οποίο μας ενδιαφέρει μπορεί να παραλείψουμε την αναφορά του διαστήματος στον ορισμό του χώρου δηλαδή να γράφουμε απλά M^2 αντί για $M^2([a, b])$.

Οι στοχαστικές διαδικασίες που ανήκουν στον χώρο $M^2([a, b])$ μπορούν να προσεγγιστούν από διαδικασίες βήματος σύμφωνα με την έννοια που υποδεικνύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.1.1. Για κάθε $f \in M^2([a, b])$ υπάρχει μία ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step, n}$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(t) - f_{step, n}(t)\|_{M^2([a, b])} = \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |f(t) - f_{step, n}(t)|^2 dt \right] = 0$$

Απόδειξη: Στην απόδειξη ακολουθούμε το [24]. Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα. Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία που ανήκει στο $M^2([a, b])$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία **φραγμένων** στοχαστικών διαδικασιών που ανήκουν στο $M^2([a, b])$. Το δεύτερο βήμα είναι να δείξουμε ότι κάθε φραγμένη στοχαστική διαδικασία που ανήκει στο $M^2([a, b])$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία **φραγμένων και συνεχών** στοχαστικών διαδικασιών που ανήκουν στο $M^2([a, b])$. Συνεπώς, μία οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία στο $M^2([a, b])$ μπορεί να προσεγγιστεί (κατά την L^2 έννοια) από μία ακολουθία φραγμένων και συνεχών στοχαστικών διαδικασιών του $M^2([a, b])$. Το τρίτο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι μία οποιαδήποτε φραγμένη και συνεχής διαδικασία του $M^2([a, b])$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία διαδικασιών βήματος. Η σύνθεση των τριών αυτών βημάτων οδηγεί στο ζητούμενο. Παραθέτουμε τώρα αναλυτικά τα τρία αυτά βήματα.

²Το t δεν μπορεί να βρίσκεται ταυτόχρονα και στο διάστημα $[t_j, t_{j+1})$ και στο διάστημα $[t_k, t_{k+1})$ για $k < j$

- Έστω $f \in M^2([a, b])$. Ορίζουμε την ακολουθία στοχαστικών διαδικασιών $\phi_n(t) = [-n \vee f(t)] \wedge n$. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι η ακολουθία $\phi_n(t)$ είναι φραγμένη και ότι $\phi_n(t) \in M^2([a, b])$ για κάθε n . Επίσης, $\lim_{n \rightarrow \infty} \phi_n(t) = f(t)$. Συνεπώς από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης μπορούμε να δούμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |f(t) - \phi_n(t)|^2 dt \right] = 0$$

- Ας θεωρήσουμε $\phi(t) \in M^2([a, b])$ φραγμένη. Μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία $\psi_n(t)$ κατά τον ακόλουθο τρόπο: Για κάθε n ας θεωρήσουμε $\rho_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ μία συνεχή συνάρτηση τέτοια ώστε $\rho_n(t) = 0$ για $t \leq -\frac{1}{n}$ και $t \geq 0$ και $\int_{-\infty}^{\infty} \rho_n(t) dt = 1$. Ορίζουμε

$$\psi_n(t) = \int_a^b \rho_n(s-t) \phi(s) ds$$

Η ακολουθία $\psi_n(t)$ είναι μία ακολουθία στοχαστικών διαδικασιών επειδή η $\phi(s)$ είναι και αυτή μία στοχαστική διαδικασία. Το ολοκλήρωμα συνέλιξης που ορίζει την ψ_n είναι ένα τυπικό ολοκλήρωμα Riemann. Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος και λαμβάνοντας υπόψη ότι η $\psi(t)$ είναι φραγμένη καταλήγουμε στο ότι η ακολουθία $\psi_n(t)$ αποτελείται από **συνεχείς** συναρτήσεις και είναι **φραγμένη**. Επίσης ανήκει στο $M^2([a, b])$. Από το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |f(t) - \psi_n(t)|^2 dt \right] = 0$$

- Τέλος αν $\psi(t) \in M^2([a, b])$ και είναι φραγμένη και συνεχής μπορούμε να κατασκευάσουμε την ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ ως εξής:

$$f_{step,n}(t) = \psi(a) \mathbf{1}_{[a, a + \frac{b-a}{n}]}(t) + \sum_{i=1}^{n-1} \psi \left(a + i \frac{b-a}{n} \right) \mathbf{1}_{(a + i \frac{b-a}{n}, a + (i+1) \frac{b-a}{n}]}(t)$$

Η ακολουθία αυτή είναι φραγμένη. Χρησιμοποιώντας και πάλι το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης μπορούμε να καταλήξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |\psi(t) - f_{step,n}(t)|^2 dt \right] = 0$$

- Με την σύνθεση των τριών παραπάνω βημάτων και την χρήση της τριγωνικής ανισότητας καταλήγουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |f(t) - f_{step,n}(t)|^2 dt \right] = 0$$

Αυτό και ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

Σχόλιο: Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα όχι μόνο μας δείχνει την δυνατότητα να προσεγγίσουμε τις στοχαστικές διαδικασίες που ανήκουν στο $M^2([a, b])$ με μία ακολουθία διαδικασιών βήματος αλλά είναι και κατασκευαστικό, δηλαδή μας δείχνει και τον τρόπο να γίνει αυτή η προσέγγιση. Φυσικά ο τρόπος που προτείνει το παραπάνω θεώρημα δεν είναι και ο μοναδικός.

Παράδειγμα 4.1.3. Παράδειγμα διαμέρισεως και προσέγγισης. Μία εύλογη ερώτηση είναι ποιά θα μπορούσε να είναι η επιλογή της διαμέρισης t_j . Το παραπάνω θεώρημα δίνει κάποιες ιδέες οι οποίες φυσικά δεν είναι και μοναδικές. Δίνουμε εδώ ένα παράδειγμα τέτοιας επιλογής.

Αν το αρχικό διάστημα είναι το $[0, T]$ μία πιθανή επιλογή διαμέρισης μπορεί να είναι η $0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_j^n < \dots < t_n^n = T$, $j = 0, \dots, n$ με $t_j^n = \frac{jT}{n}$. Μία πιθανή προσέγγιση της στοχαστικής διαδικασίας $f(t, \omega)$, στο διάστημα $[0, T]$, χρησιμοποιώντας την διαμέριση αυτή μπορεί να είναι η ακολουθία από διαδικασίες βήματος

$$f_{step,n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} f(t_j, \omega) \mathbf{1}_{[t_j, t_{j+1})}(t)$$

Αν η στοχαστική διαδικασία $f(t, \omega)$ είναι συνεχής σ.β. στην μεταβλητή t μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f - f_{step,n}\|_{M^2} := \lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_0^T |f - f_{step,n}|^2 dt \right] = 0$$

δηλαδή ότι η ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ προσεγγίζει την στοχαστική διαδικασία f . Η διαμέριση αυτή και η προσέγγιση αυτή είναι η συνήθης προσέγγιση που ακολουθούμε στον υπολογισμό στοχαστικών ολοκληρωμάτων κατά Itô. Αν για παράδειγμα $f(t, \omega) = B_t^2$ τότε μία πιθανή προσέγγιση της στοχαστικής διαδικασίας f από διαδικασίες βήματος είναι η

$$f_{step,n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{\frac{jT}{n}}^2 \mathbf{1}_{[\frac{jT}{n}, \frac{(j+1)T}{n})}(t),$$

ή ισοδύναμα

$$f_{step,n}(t) = B_{\frac{jT}{n}}^2, \quad \text{αν } t \in \left[\frac{jT}{n}, \frac{(j+1)T}{n} \right) \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Έχοντας τώρα προσεγγίσει μία οποιαδήποτε στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([a, b])$ με μία ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ και εφόσον το στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι καλά ορισμένο για μία στοχαστική διαδικασία βήματος μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Itô με τον ακόλουθο τρόπο

Ορισμός 4.1.5. Έστω $f \in M^2([a, b])$. Το ολοκλήρωμα Itô της f ορίζεται σαν το ακόλουθο όριο

$$I(f) := \int_a^b f(t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} I(f_{step,n}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{step,n}(t) dB_t$$

οπου $f_{step,n}$ είναι μία ακολουθία διαδικασιών βήματος που προσεγγίζουν κατά L^2 την f και τα ολοκληρώματα $\int_a^b f_{step,n}(t) dB_t := I(f_{step,n})$ ορίζονται σύμφωνα με τον ορισμό 4.1.3.

Για να έχει νόημα ο παραπάνω ορισμός θα πρέπει να δείξουμε ότι η ακολουθία $I(f_{step,n}) := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_{step,n}(t) dB_t$ συγκλίνει. Αυτό είναι και το βασικό αποτέλεσμα το παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 4.1.2. Έστω $f \in M^2([a, b])$ και $f_{step,n}$ μία ακολουθία διαδικασιών βήματος η οποία προσεγγίζει κατά L^2 την f . Τότε η ακολουθία $I(f_{step,n}) = \int_a^b f_{step,n}(t) dB_t$ όπου το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô έχει οριστεί σύμφωνα με τον ορισμό 4.1.3 συγκλίνει καθώς το $n \rightarrow \infty$ σε μία τυχαία μεταβλητή είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (δηλαδή ανήκει στον χώρο L^2).

Απόδειξη: Λόγω των ιδιοτήτων του χώρου L^2 (πληρότητα) αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία $r_n := I(f_{step,n})$ είναι μία ακολουθία Cauchy δηλαδή ότι ισχύει

$$\|r_n - r_m\|_{L^2} := E[|r_n - r_m|^2] \rightarrow 0 \text{ καθώς } n, m \rightarrow \infty.$$

Στο παραπάνω υπενθυμίζουμε ότι με τον συμβολισμό $\|\cdot\|_{L^2}$ συμβολίζουμε την νόρμα του χώρου τετραγωνικά ολοκληρώσιμων τυχαίων μεταβλητών L^2 η οποία και ορίζεται σύμφωνα με την σχέση $\|\eta\|_{L^2} := E[\eta^2]$ για κάθε $\eta \in L^2$. Για να δείξουμε την ιδιότητα Cauchy για την ακολουθία r_n θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι η ακολουθία $f_{step,n}$ προσεγγίζει κατά L^2 την f δηλαδή

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\int_a^b |f(t) - f_{step,n}(t)|^2 dt \right] = 0$$

και την εξαιρετικά χρήσιμη ιδιότητα του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô για διαδικασίες βήματος σύμφωνα με την οποία

$$E \left[\left| \int_a^b f_{step,n}(t) dB_t \right|^2 \right] = E \left[\int_a^b |f_{step,n}(t)|^2 dt \right]$$

Η ιδιότητα αυτή που συνδέει την μέση τιμή του τετραγώνου του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Itô μίας διαδικασίας βήματος με την μέση τιμή του ολοκληρώματος Riemann του τετραγώνου της διαδικασίας αποδείχθηκε στο παράδειγμα 4.1.2. Τέλος θα χρειαστούμε την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Itô για διαδικασίες βήματος.

Σύμφωνα με τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned}
E[|r_n - r_m|^2] &= E\left[\left|\int_a^b f_{step,n}(t)dt - \int_a^b f_{step,m}(t)dt\right|^2\right] \\
&= E\left[\left|\int_a^b (f_{step,n}(t) - f_{step,m}(t))dt\right|^2\right] \\
&= E\left[\int_a^b |f_{step,n}(t) - f_{step,m}(t)|^2 dt\right] \\
&= E\left[\int_a^b |f_{step,n}(t) - f(t) + f(t) - f_{step,m}(t)|^2 dt\right] \\
&\leq E\left[\int_a^b |f_{step,n}(t) - f(t)|^2 dt\right] + E\left[\int_a^b |f_{step,m}(t) - f(t)|^2 dt\right]
\end{aligned}$$

Μέχρι τώρα χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα του ολοκληρώματος Itô για διαδικασίες βήματος, την ισομετρία του Itô για διαδικασίες βήματος και την τριγωνική ανισότητα. Λόγω του ότι η $f_{step,n}(t)$ προσεγγίζει κατά L^2 την $f(t)$ βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης τείνει στο 0 καθώς $m \rightarrow \infty$ και $n \rightarrow \infty$. Συνεπώς αποδείχθηκε το ζητούμενο. \square

Σχόλιο: Η ιδιότητα της πληρότητας του χώρου L^2 αποτελεί ένα βασικό αποτέλεσμα της συναρτησιακής ανάλυσης. Η απόδειξη της ιδιότητας της πληρότητας του L^2 , η οποία ήταν απαραίτητη στην απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος, παρατίθεται στο παράρτημα του κεφαλαίου.

Παράδειγμα 4.1.4. Υπολογίστε με την βοήθεια του ορισμού το στοχαστικό ολοκλήρωμα

$$I(1) := \int_0^T dB_t$$

Η υπό ολοκλήρωση στοχαστική διαδικασία είναι η $f(t, \omega) = 1$. Θα πάρουμε την διαμέριση $0 < t_1^n < t_2^n < \dots < t_n^n = T$, $t_j^n = \frac{jT}{n}$ και την προσέγγιση της κατά ολοκλήρωση στοχαστικής διαδικασίας $f_{step,n} = \sum_{j=0}^{n-1} \mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}$. Παίρνουμε λοιπόν την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $I(f_{step,n}) = \sum_{j=0}^{n-1} 1(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) = B_T$ το όριο της οποίας κατά L^2 θα είναι και το στοχαστικό ολοκλήρωμα που ζητάμε. Είναι προφανές ότι το L^2 όριο της ποσότητας αυτής είναι η ίδια η τυχαία μεταβλητή $B_T - B_0 = B_T$ συνεπώς

$$I(1) = \int_0^T dB_t = B_T$$

Παράδειγμα 4.1.5. Αποδείξτε με την βοήθεια του ορισμού ότι ισχύει

$$I(B_t) = \int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2} B_T^2 - \frac{T}{2}$$

Η υπό ολοκλήρωση στοχαστική διαδικασία είναι η $f(t, \omega) = B_t$. Θα πάρουμε την διαμέριση $0 < t_1^n < t_2^n < \dots < t_n^n = T$, $t_j^n = \frac{jT}{n}$ και την προσέγγιση της κατά ολοκλήρωση στοχαστικής διαδικασίας

$$f_{step,n}(t) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j^n} \mathbf{1}_{[t_j^n, t_{j+1}^n)}(t).$$

Παίρνουμε λοιπόν την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών

$$I(f_{step,n}) = \sum_{j=0}^{n-1} B_{t_j^n} (B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}),$$

το όριο της οποίας κατά L^2 θα είναι και το στοχαστικό ολοκλήρωμα που ζητάμε. Για να υπολογίσουμε το όριο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$a(b-a) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) - \frac{1}{2}(a-b)^2$$

με την επιλογή $a = B_{t_j^n}$, $b = B_{t_{j+1}^n}$. Έχουμε λοιπόν

$$B_{t_j^n}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) = \frac{1}{2}(B_{t_{j+1}^n}^2 - B_{t_j^n}^2) - \frac{1}{2}(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2$$

Αθροίζοντας επάνω σε όλα τα j από $j = 0$ ως το $j = n - 1$ βλέπουμε ότι

$$I(f_{step,n}) = \frac{1}{2}B_T^2 - \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2$$

Αρκεί λοιπόν να υπολογίσουμε το L^2 όριο της τυχαίας μεταβλητής $\sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})$. Ισχυριζόμαστε ότι το όριο αυτό είναι ίσο με $\frac{1}{2}T$. Πράγματι,

$$E \left[\left| \sum_{j=0}^{n-1} (B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) - \frac{1}{2}T \right|^2 \right] = 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$. Αυτό το αποτέλεσμα μπορεί να προκύψει μετά από κάποιες πράξεις, χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία των μεταβολών της κίνησης Brown και τις ιδιότητες

$$E[B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}] = 0, \quad E[(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^2] = \frac{T}{n}, \quad E[(B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n})^4] = \frac{3T^2}{n^2}$$

Συνεπώς ολοκληρώσαμε τον υπολογισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Το παράδειγμα αυτό μας δείχνει ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα κατά Ιτô έχει διαφορετικές ιδιότητες από το ολοκλήρωμα κατά Riemann το οποίο έχουμε δει την Πραγματική Ανάλυση μέχρι σήμερα. Αυτό φαίνεται από το ότι

$$\int_0^T B_t dB_t = \frac{1}{2}B_T^2 - \underbrace{\frac{1}{2}T}$$

Ο όρος που είναι υπογραμμισμένος είναι ένας όρος τον οποίο δεν θα περιμέναμε αν το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα κατά Riemann³. Ο όρος αυτός οφείλεται στις ιδιότητες και τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Ιτô και στο ότι η διαδικασία επάνω στην οποία γίνεται η ολοκλήρωση είναι η κίνηση Brown. Δεν θα θέλαμε να μπορούμε πολύ βαθιά στις λεπτομέρειες της ανάλυσης αλλά θέλουμε να τονίσουμε εδώ ότι, οι παθολογικές ιδιότητες της κίνησης Brown και πιο ειδικά το ότι δεν έχει φραγμένη μεταβολή (bounded variation) δεν επιτρέπουν τον ορισμό ενός ολοκληρώματος κατά Riemann επάνω στην κίνηση Brown αλλά επιβάλλουν τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος όπως αυτό έγινε εδώ. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στην παράγραφο 4.7

Επίσης, όπως φαίνεται από το παραπάνω παράδειγμα, ο υπολογισμός ενός στοχαστικού ολοκληρώματος από τον ορισμό δεν είναι ιδιαίτερα απλή διαδικασία. Θα δούμε στην συνέχεια ένα αποτέλεσμα, το λήμμα του Ιτô, το οποίο μας επιτρέπει εύκολα τον υπολογισμό ορισμένων στοχαστικών ολοκληρωμάτων.

4.1.3 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Ιτô

Θεώρημα 4.1.3. Το ολοκλήρωμα Ιτô έχει τις ακόλουθες σημαντικές ιδιότητες

(1) Είναι γραμμικό, δηλαδή για δύο στοχαστικές διαδικασίες f_1 και f_2 ισχύει $I(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2) = \lambda_1 I(f_1) + \lambda_2 I(f_2)$, όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(2) $E \left[\int_a^b f dB_t \right] = 0$

(3) $E \left[\left| \int_a^b f(t, \omega) dB_t \right|^2 \right] = E \left[\int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt \right]$

Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται η ισομετρία του Ιτô

³ Αν $f(t)$ ήταν μία παραγωγίσιμη συνάρτηση του t , τότε το ολοκλήρωμα $\int_0^T f(t)df(t) = \int_0^T f(t)f'(t)dt = \frac{1}{2}(f(T)^2 - f(0)^2)$.

Σε όλα τα παραπάνω θεωρούμε ότι η συνάρτηση την οποία ολοκληρώνουμε ανήκει στον κατάλληλο χώρο M^2 .

Απόδειξη: Οι αποδείξεις των ιδιοτήτων αυτών ξεκινάνε με την απόδειξη της ιδιότητας για την αντίστοιχη ακολουθία διαδικασιών βήματος $f_{step,n}$ που προσεγγίζουν την f και μετά με το πέρασμα στο όριο $n \rightarrow \infty$. Οι λεπτομέρειες αφήνονται σαν άσκηση. \square

Έχοντας σαν βάση τις τρεις αυτές ιδιότητες μπορούμε να αποδείξουμε και άλλες χρήσιμες ιδιότητες για το ολοκλήρωμα του Itô.

Παράδειγμα 4.1.6. Αποδείξτε ότι για κάθε $f, g \in M^2$ ισχύει ότι

$$E[I(f)I(g)] = E \left[\int_0^T f(t)dB_t \int_0^T g(t)dB_t \right] = E \left[\int_0^T f(t)g(t)dt \right]$$

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$ab = \frac{1}{4}(|a+b|^2 - |a-b|^2)$$

όπου $a = I(f)$ και $b = I(g)$. Αντικαθιστώντας και παίρνοντας την μέση τιμή έχουμε ότι

$$E[I(f)I(g)] = \frac{1}{4}(E[|I(f) + I(g)|^2] - E[|I(f) - I(g)|^2]) = \frac{1}{4}(E[|I(f+g)|^2] - E[|I(f-g)|^2])$$

όπου ήδη χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα του στοχαστικού ολοκληρώματος. Όμως

$$E[|I(f+g)|^2] = E \left[\int_0^T |f+g|^2 dt \right]$$

από την ιδιότητα της ισομετρίας του Itô και ομοίως

$$E[|I(f-g)|^2] = E \left[\int_0^T |f-g|^2 dt \right]$$

Αντικαθιστώντας αυτά στην παραπάνω σχέση και χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα της μέσης τιμής έχουμε ότι

$$E[I(f)I(g)] = E \left[\int_0^T \frac{1}{4}(|f+g|^2 - |f-g|^2)dt \right] = E \left[\int_0^T f(t)g(t)dt \right]$$

και έτσι το ζητούμενο αποδείχθηκε. \square

4.2 Το ολοκλήρωμα Itô σαν στοχαστική διαδικασία

4.2.1 Ορισμός της στοχαστικής διαδικασίας $\int_0^t f(t)dB_t$ και οι ιδιότητες της

Στις προηγούμενες παραγράφους ορίσαμε και είδαμε τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Itô όταν τα όρια της ολοκλήρωσης a και b ήταν δεδομένα. Θα θεωρήσουμε τώρα ότι ενώ το κάτω όριο της ολοκλήρωσης παραμένει σταθερό, και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να το θέσουμε $a = 0$, επιτρέπουμε το επάνω όριο της ολοκλήρωσης να μεταβάλλεται και να είναι $b = t$.

Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t f(t)dB_t$ όπου $0 \leq t \leq T$. Για κάθε τιμή του t το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται όπως και παραπάνω αρκεί η στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([0, T])$. Συνεπώς με την παραπάνω κατασκευή, για κάθε τιμή του t παίρνουμε μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και η τιμή της είναι ίση με το ολοκλήρωμα $\int_0^t f(t)dB_t$. Άρα κατασκευάζουμε μία στοχαστική διαδικασία

$$I_t := \int_0^t f(t)dB_t$$

Η στοχαστική αυτή διαδικασία ονομάζεται το **αόριστο ολοκλήρωμα του Ιτô**. Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία, ισοδύναμα μπορεί να οριστεί σαν το στοχαστικό ολοκλήρωμα από 0 ως το T της $f(t)\mathbf{1}_{[0,t]}$ δηλαδή

$$(4.3) \quad \int_0^t f(s)dB_s = \int_0^T f(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s)dB_s$$

Με βάση τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να δείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες για την στοχαστική διαδικασία I_t .

Θεώρημα 4.2.1. Έστω $f \in M^2([0, T])$, $0 \leq t \leq T$ και

$$I_t = \int_0^t f(s)dB_s$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

- (i) Η στοχαστική διαδικασία I_t είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale.
- (ii) Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της I_t είναι

$$\langle I \rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds$$

Απόδειξη: (i) Για να αποδείξουμε ότι η I_t είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη αρκεί να χρησιμοποιήσουμε την ισομετρία του Ιτô και το ότι $f \in M^2([0, T])$. Μπορούμε επίσης εύκολα να δούμε ότι η I_t είναι προσαρμοσμένη στην \mathcal{F}_t , από τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος. Μένει να δείξουμε ότι $E[I_t | \mathcal{F}_s] = I_s$, $0 \leq s \leq t \leq T$. Για να δειχθεί αυτό αρκεί να προσέξουμε ότι

$$I_t = I_s + \int_s^t f(t')dB_{t'}$$

και να θυμηθούμε ότι λόγω της ανεξαρτησίας του $\int_s^t f(t')dB_{t'}$ από την \mathcal{F}_s

$$E \left[\int_s^t f(t')dB_{t'} \mid \mathcal{F}_s \right] = E \left[\int_s^t f(t')dB_{t'} \right] = 0$$

Για να πάρουμε το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα 4.1.3. Συνεπώς από τα παραπάνω καταλήγουμε στο ότι

$$E[I_t | \mathcal{F}_s] = E[I_s | \mathcal{F}_s] + E \left[\int_s^t f(t')dB_{t'} \mid \mathcal{F}_s \right] = I_s.$$

Επομένως η I_t είναι martingale.

(ii) Για να δείξουμε ότι η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της I_t είναι η $\langle I \rangle_t = \int_0^t |f(s)|^2 ds$ αρκεί να δείξουμε ότι η $M_t = I_t^2 - \langle I \rangle_t$ είναι μία συνεχής martingale που μηδενίζεται στο $t = 0$. Πράγματι

$$\begin{aligned} E[M_t | \mathcal{F}_s] &= E \left[I_t^2 - \int_0^t |f(t')|^2 dt' \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[\left(I_s + \int_s^t f(t')dB_{t'} \right)^2 - \int_0^s |f(t')|^2 dt' - \int_s^t |f(t')|^2 dt' \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &= I_s^2 - \int_0^s |f(t')|^2 dt' + 2I_s E \left[\int_s^t f(t')dB_{t'} \mid \mathcal{F}_s \right] \\ &\quad + E \left[\left| \int_s^t f(t')dB_{t'} \right|^2 \mid \mathcal{F}_s \right] - E \left[\int_s^t |f(t')|^2 dt' \mid \mathcal{F}_s \right] \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Ιτô βλέπουμε ότι

$$E \left[\int_s^t f(t')dB_{t'} \mid \mathcal{F}_s \right] = 0$$

και

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_s^t f(t') dB_{t'} \right|^2 \mid \mathcal{F}_s \right] &= E \left[\left| \int_s^t f(t') dB_{t'} \right|^2 \right] \\ &= E \left[\int_s^t |f(t')|^2 dt' \right] = E \left[\int_s^t |f(t')|^2 dt' \mid \mathcal{F}_s \right] \end{aligned}$$

Συνεπώς καταλήγουμε ότι

$$E \left[I_t^2 - \int_0^t |f(t')|^2 dt' \mid \mathcal{F}_s \right] = I_s^2 - \int_0^s |f(t')|^2 dt'$$

και από τον ορισμό της διαδικασίας τετραγωνικής μεταβολής για μία martingale αποδεικνύεται το ζητούμενο. \square

Η τελευταία γενίκευση που χρειαζόμαστε είναι ο ορισμός του αόριστου στοχαστικού ολοκληρώματος όταν το πάνω όριο είναι ένας χρόνος στάσης. Η γενίκευση αυτή είναι αναμενόμενη αφού το I_t είναι μία martingale και ήδη έχουμε δει αρκετές ενδιαφέρουσες ιδιότητες σχετικά με τις martingale και τους χρόνους στάσης.

Για τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος με όρια χρόνους στάσης θα χρησιμοποιήσουμε την δείκτρια συνάρτηση του στοχαστικού διαστήματος $[0, \tau]$ όπου τ είναι κάποιος χρόνος στάσης. Η δείκτρια συνάρτηση είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη. Αυτό είναι εύκολο να αποδειχθεί αν κανείς εξετάσει την αντίστροφη εικόνα της $\mathbf{1}_{[0, \tau]}$ η οποία μπορεί να δειχθεί ότι αποτελείται από υποσύνολα του Ω που ανήκουν στην \mathcal{F}_t . Συνεπώς, η $\mathbf{1}_{[0, \tau]}$ είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι προσαρμοσμένη στην \mathcal{F}_t και όπως είναι εύκολο να δούμε φραγμένη και δεξιά συνεχής. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα με όρια το 0 και τον χρόνο στάσης τ σε αναλογία με τον τρόπο ορισμού του στοχαστικού ολοκληρώματος με ντετερμινιστικά όρια 0 και t που δίνεται στην εξίσωση (4.3)

$$\int_0^\tau f(t) dB_t := \int_0^T f(t) \mathbf{1}_{[0, \tau]}(t) dB_t := I_\tau$$

Ο παραπάνω ορισμός μπορεί να επεκταθεί και όταν τόσο το αριστερό όσο και το δεξιό όριο ολοκλήρωσης είναι χρόνοι στάσης. Συγκεκριμένα αν τ_1, τ_2 είναι δύο χρόνοι στάσης ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t τέτοιοι ώστε $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$ τότε

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dB_t := \int_0^{\tau_2} f(t) dB_t - \int_0^{\tau_1} f(t) dB_t := I_{\tau_2} - I_{\tau_1}$$

Έχοντας υπόψη τους παραπάνω ορισμούς, καθώς και τις ιδιότητες martingale του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να καταλήξουμε σε μία σειρά από χρήσιμα συμπεράσματα κάνοντας χρήση του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης. Αναφέρουμε μερικά παραδείγματα.

Παράδειγμα 4.2.1. Αν τ_1, τ_2 είναι δύο χρόνοι στάσης ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t τέτοιοι ώστε $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$ υπολογίστε την υπό συνθήκη μέση τιμή $E[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dB_t \mid \mathcal{F}_{\tau_1}]$.

Γνωρίζουμε ότι η στοχαστική διαδικασία I_t είναι martingale οπότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα επιλεκτικής στάσης⁴ έχουμε ότι $E[I_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = I_{\tau_1}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} E \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dB_t \mid \mathcal{F}_{\tau_1} \right] &= E[I_{\tau_2} - I_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] = E[I_{\tau_2} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] - E[I_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}] \\ &= I_{\tau_1} - I_{\tau_1} = 0 \end{aligned}$$

Στον υπολογισμό του όρου $E[I_{\tau_1} \mid \mathcal{F}_{\tau_1}]$ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή I_{τ_1} είναι \mathcal{F}_{τ_1} -μετρήσιμη.

Παράδειγμα 4.2.2. Αν τ_1, τ_2 είναι δύο χρόνοι στάσης ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t τέτοιοι ώστε $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq T$ υπολογίστε την υπό συνθήκη μέση τιμή $E \left[\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dB_t \right|^2 \mid \mathcal{F}_{\tau_1} \right]$.

⁴Θυμηθείτε ότι ο τ_2 είναι ένας φραγμένος χρόνος στάσης

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E \left[\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dB_t \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_1} \right] &= E[|I_{\tau_2} - I_{\tau_1}|^2 | \mathcal{F}_{\tau_1}] \\ &= E[I_{\tau_2}^2 - 2I_{\tau_1}I_{\tau_2} + I_{\tau_1}^2 | \mathcal{F}_{\tau_1}] = E[I_{\tau_2}^2 | \mathcal{F}_{\tau_1}] - I_{\tau_1}^2 \end{aligned}$$

Θα πρέπει τώρα να υπολογίσουμε τον όρο $E[I_{\tau_2}^2 | \mathcal{F}_{\tau_1}]$. Παρόλο που η στοχαστική διαδικασία I_t είναι *martingale* η I_t^2 δεν είναι. Η διαδικασία $I_t^2 - \langle I \rangle_t$ όμως είναι μία *martingale*. Συνεπώς

$$E[I_{\tau_2}^2 - \langle I \rangle_{\tau_2} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = I_{\tau_1}^2 - \langle I \rangle_{\tau_1}$$

όπου $\langle I \rangle_\tau = \int_0^\tau |f(t)|^2 dt$. Χρησιμοποιώντας το παραπάνω μπορούμε να καταλήξουμε ότι

$$E \left[\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dB_t \right|^2 \middle| \mathcal{F}_{\tau_1} \right] = E[\langle I \rangle_{\tau_2} - \langle I \rangle_{\tau_1} | \mathcal{F}_{\tau_1}] = E \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} |f(t)|^2 dt \middle| \mathcal{F}_{\tau_1} \right]$$

Παράδειγμα 4.2.3. Ας θεωρήσουμε B_t μία κίνηση Brown ως προς μία διήθηση \mathcal{F}_t και ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία \tilde{B}_t η οποία ορίζεται από το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô

$$\tilde{B}_t := \int_0^t \text{sign}(B_r) dB_r$$

Με βάση τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Itô και το θεώρημα του Levy μπορούμε να δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία \tilde{B}_t είναι μία κίνηση Brown ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t .

Πράγματι, από τον ορισμό της, η \tilde{B}_t είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση \mathcal{F}_t . Επίσης, εφόσον μπορεί να εκφραστεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô, σύμφωνα με το θεώρημα 4.2.1 η στοχαστική διαδικασία B_t είναι μία *martingale*. Για την εφαρμογή του θεωρήματος του Levy αρκεί να αποδείξουμε ότι και η στοχαστική διαδικασία $Z_t := \tilde{B}_t^2 - t$ είναι μία *martingale*. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[Z_t | \mathcal{F}_s] &= E[\tilde{B}_t^2 - t | \mathcal{F}_s] = E \left[\left(\int_0^t \text{sign}(B_r) dB_r \right)^2 - t \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= E \left[\left(\int_0^s \text{sign}(B_r) dB_r - \int_s^t \text{sign}(B_r) dB_r \right)^2 - t \middle| \mathcal{F}_s \right] \\ &= \left(\int_0^s \text{sign}(B_r) dB_r \right)^2 + E \left[\left(\int_s^t \text{sign}(B_r) dB_r \right)^2 \middle| \mathcal{F}_s \right] + \\ &\quad 2 \left(\int_0^s \text{sign}(B_r) dB_r \right) E \left[\int_s^t \text{sign}(B_r) dB_r \middle| \mathcal{F}_s \right] - t \\ &= \left(\int_0^s \text{sign}(B_r) dB_r \right)^2 + (t - s) - 0 - t = Z_s \end{aligned}$$

οπότε και η Z_t είναι *martingale*. Συνεπώς σύμφωνα με το θεώρημα του Levy η \tilde{B}_t είναι κίνηση Brown.

4.2.2 Ανισότητες σχετικά με το ολοκλήρωμα Itô

Θα κλείσουμε την παρουσίαση του ολοκληρώματος Itô αναφέροντας ορισμένες σημαντικές ανισότητες που ισχύουν για το ολοκλήρωμα Itô. Η απόδειξη των ανισοτήτων αυτών είναι τεχνική και χρησιμοποιεί το λήμμα του Itô το οποίο θα δούμε στην επόμενη παράγραφο. Η απόδειξη τους παρατίθεται στο παράρτημα του κεφαλαίου αυτού για τους αναγνώστες που ενδιαφέρονται για πιο θεωρητικά θέματα.

Θεώρημα 4.2.2. Ανισότητα Burkholder-Davis-Gundy Έστω $f \in M^2([0, T])$. Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$X_t = \int_0^t f(r) dB_r$$

Τότε για κάθε $p > 0$ υπάρχουν σταθερές c_p και C_p που εξαρτώνται μόνο από το p τέτοιες ώστε

$$c_p E \left[\left| \int_0^t |f(r)|^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \right] \leq E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s f(r) dB_r \right|^p \right] \leq C_p E \left[\left| \int_0^t |f(r)|^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \right]$$

για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Αρκετά χρήσιμη είναι και η ακόλουθη εκθετική ανισότητα.

Θεώρημα 4.2.3. Έστω $g \in L^2$ και έστω T, a, b θετικοί αριθμοί. Τότε ισχύει

$$P \sup_{0 \leq t \leq T} \left[\int_0^t g(s) dB_s - \frac{a}{2} \int_0^t |g(s)|^2 ds \right] > b \leq e^{-ab}$$

Απόδειξη: Βλέπε παράρτημα του κεφαλαίου. \square

4.3 Διαδικασίες Itô και το λήμμα του Itô

Στις παραγράφους αυτές θα εισάγουμε μία νέα κατηγορία στοχαστικών διαδικασιών οι οποίες έχουν σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά, τις διαδικασίες Itô, και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες που τις χαρακτηρίζουν. Η σημαντικότερη από αυτές δίνεται από το λήμμα του Itô το οποίο χαρακτηρίζει τις ιδιότητες των διαδικασιών του Itô κάτω από αλλαγή μεταβλητών.

4.3.1 Διαδικασίες Itô

Κάνοντας χρήση του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô μπορούμε να ορίσουμε μία νέα κατηγορία γενικότερων στοχαστικών διαδικασιών από την κίνηση Brown, τις διαδικασίες του Itô.

Ορισμός 4.3.1. Μία διαδικασία Itô είναι μία στοχαστική διαδικασία X_t της μορφής

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s$$

όπου οι u και v ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\int_0^t v^2(s, \omega) ds < \infty \text{ σ.β.}, \quad \int_0^t u(s, \omega) ds < \infty \text{ σ.β.}$$

Η διαδικασία αυτή μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή

$$dX_t = u dt + v dB_t$$

Βλέπουμε από τον παραπάνω ορισμό ότι μία διαδικασία Itô μπορεί να διασπαστεί σε δύο μέρη: Τον όρο $M_t := \int_0^t v dB_t$ που είναι μία martingale και τον όρο $A_t := \int_0^t u ds$ που είναι μία διαδικασία πεπερασμένης μεταβολής. Μπορεί να δειχθεί (βλ. και παράγραφο 4.7) ότι

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_j |\Delta A_j| = \int_0^t |u(s)| ds$$

ενώ

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_j |\Delta M_j|^2 = \int_0^t |v(s)|^2 ds$$

όπου το τελευταίο όριο είναι όριο στον L^2 . Η διάσπαση αυτή σχετίζεται με την αποσύνθεση Doob-Meyer και μας δείχνει ότι εν γένει μία διαδικασία Itô είναι ένα παράδειγμα ενός semimartingale.

Παράδειγμα 4.3.1. Μία μονοδιάστατη κίνηση Brown με ταχύτητα m είναι μία διαδικασία Itô. Πραγματικά έχουμε για την διαδικασία αυτή ότι $X_t = x_0 + mt + B_t$ η οποία ισοδύναμα μπορεί να γραφεί ως

$$X_t = x_0 + \int_0^t m ds + \int_0^t dB_s$$

η σε διαφορική μορφή

$$dX_t = m dt + dB_t$$

Παράδειγμα 4.3.2. Ένα μοντέλο για τις τιμές των μετοχών με την μορφή μίας διαδικασίας Itô

Η στοχαστική διαδικασία

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\sigma^2(s)}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s$$

όπου οι $\mu(t)$ και $\sigma(t)$ ικανοποιούν τις συνθήκες του παραπάνω ορισμού είναι μία διαδικασία Itô. Σε διαφορική μορφή η διαδικασία αυτή γράφεται ως

$$dX_t = \left(\mu(t) - \frac{\sigma^2(t)}{2} \right) dt + \sigma(t) dB_t$$

Αν θέσουμε $X_t = \ln S_t$ τότε (όπως θα δούμε και παρακάτω κάνοντας χρήση του λήμματος του Itô) η S_t είναι και αυτή μία διαδικασία Itô, η οποία χρησιμοποιείται πολύ συχνά στη χρηματοοικονομική για την μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών. Αν τα μ και σ είναι σταθερές, η S_t ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown.

Παράδειγμα 4.3.3. Ένα μοντέλο για τα επιτόκια με την μορφή μίας διαδικασίας Itô

Η στοχαστική διαδικασία X_t

$$X_t = X_0 + a\mu \int_0^t e^{as} ds + \sigma \int_0^t e^{as} dB_s$$

είναι μία διαδικασία Itô η οποία μπορεί να γραφεί και σε διαφορική μορφή ως

$$dX_t = a\mu e^{at} dt + \sigma e^{at} dB_t$$

Αν θέσουμε $X_t = e^{at} r_t$ τότε όπως θα δούμε και παρακάτω από το λήμμα του Itô η r_t είναι και αυτή μία διαδικασία Itô η οποία ονομάζεται διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck που επιστρέφει προς την μέση τιμή (mean reverting Ornstein-Uhlenbeck process). Ο λόγος που παίρνει αυτό το όνομα είναι ο ακόλουθος: Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Itô μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή του r_t . Πράγματι

$$E[r_t] = e^{-at} X_0 + \mu(1 - e^{-at}) \rightarrow \mu, \quad \text{καθώς } t \rightarrow \infty$$

Η μέση τιμή εξαρτάται από τον χρόνο και για μεγάλους χρόνους τείνει στην τιμή μ . Επίσης κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος του Itô μπορούμε να υπολογίσουμε την διακύμανση της r_t η οποία είναι

$$\text{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at})$$

Η διαδικασία αυτή βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά σαν μοντέλο για την χρονική εξέλιξη των επιτοκίων.

Παράδειγμα 4.3.4. Μία διαδικασία Itô X_t της μορφής

$$dX_t = u dt + v dB_t$$

είναι μία martingale αν και μόνο αν $u = 0$ σ.β.

Ένας τρόπος να φανεί αυτό είναι παίρνοντας την μέση τιμή της X_t . Αν η X_t είναι martingale, από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô μπορούμε να δούμε ότι για κάθε t ισχύει $E[\int_0^t u(s)ds] = 0$. Συνεπώς πρέπει να ισχύει και $\int_0^t u(s)ds = 0$ σ.β. για κάθε t , οπότε και $u = 0$ σ.β.⁵. Μία εναλλακτική απόδειξη μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση του θεωρήματος αναπαράστασης των martingale (βλ. παράγραφο 4.6) και την μοναδικότητα των συντελεστών μίας διαδικασίας Itô⁶.

4.3.2 Ο τύπος του Itô

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τι μορφή έχει μία συνάρτηση μίας διαδικασίας Itô, δηλαδή αν θα είναι και αυτή με την σειρά της μία διαδικασία Itô και αν ναι ποιά θα είναι η ακριβή της μορφή σαν το άθροισμα ενός ολοκληρώματος Riemann και ενός ολοκληρώματος Itô.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από το περίφημο Λήμμα του Itô, το οποίο μας προσφέρει έναν κανόνα αλλαγής μεταβλητών τροποποιημένο κατάλληλα ώστε να ισχύει για στοχαστικά ολοκληρώματα.

Θεώρημα 4.3.1. (Το λήμμα του Itô) Θεωρούμε ότι η X_t είναι μία διαδικασία Itô η οποία μπορεί να εκφραστεί ως

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega)ds + \int_0^t v(s, \omega)dB_s.$$

Τότε οποιαδήποτε συνάρτηση της X_t της μορφής $g(t, x) \in C^{1,2}$ μπορεί να εκφραστεί επίσης σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής

$$g(t, X_t) = g(0, X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) ds + \int_0^t v \frac{\partial g}{\partial x} dB_s$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί και σε ισοδύναμη διαφορική μορφή:

$$dg(t, X_t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + u \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2} v^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right) dt + v \frac{\partial g}{\partial x} dB_t$$

Με $C^{1,2}$ συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων $g(t, x)$ που έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο ως προς την πρώτη μεταβλητή και συνεχή δεύτερη παράγωγο ως προς την δεύτερη μεταβλητή.

Σχόλιο: Στα παραπάνω έχει χρησιμοποιηθεί ο ακόλουθος συμβολισμός:

$$\frac{\partial g}{\partial s} := \frac{\partial g}{\partial t}(s, X_s), \quad u \frac{\partial g}{\partial x} := u(s, X_s) \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s), \quad \text{κλπ}$$

δηλαδή η μερική παράγωγος της g ως προς το πρώτο όρισμα (χρόνος) υπολογισμένη στα $t = s$ και $x = X_s$, η μερική παράγωγος της g ως προς το δεύτερο όρισμα (θέση) υπολογισμένη στα $t = s$ και $x = X_s$ και πολλαπλασιασμένη με την συνάρτηση u υπολογισμένη και αυτή στα $t = s$ και $x = X_s$ κλπ.

Μνημονικός κανόνας για το Λήμμα του Itô: Αν $Y_t = g(t, X_t)$ τότε

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \frac{\partial g}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (dX_t)^2$$

όπου υπολογίζοντας τις δυνάμεις των διαφορικών χρησιμοποιούμε τον κανόνα

$$\begin{aligned} dt \cdot dt &= dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0 \\ dB_t \cdot dB_t &= dt. \end{aligned}$$

Απόδειξη του λήμματος του Itô: Δεν θα δώσουμε εδώ την πλήρη απόδειξη του λήμματος του Itô

⁵ Για μία πιο αυστηρή διατύπωση του επιχειρήματος αυτού παραπέμπουμε στο [28] Θεώρημα 1.26, σελ. 31

⁶ Για την μοναδικότητα των συντελεστών μίας διαδικασίας Itô βλ. το κεφάλαιο 5

αλλά θα συνοψίσουμε τα βασικά βήματα της.

Ας πάρουμε την διαμέριση $t_j^n = \frac{j}{n}t$ του διαστήματος $[0, t]$ και ας γράψουμε

$$\begin{aligned} g(t, X_t) - g(0, X_0) &= \sum_{j=0}^{n-1} [g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n})] = \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n})}_{\Delta t_j} - \sum_{j=0}^{n-1} \underbrace{g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n})}_{\Delta X_j} \end{aligned}$$

Η πρώτη ομάδα υπογραμμισμένων όρων αποτελείται από όρους οι οποίοι είναι υπολογισμένοι για την ίδια τιμή της διαδικασίας Ιτô αλλά για διαφορετικούς χρόνους. Στην πρώτη ομάδα όρων συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε την ανάλυση κατά Taylor την μεταβλητή του χρόνου. Η δεύτερη ομάδα όρων αποτελείται από όρους που είναι υπολογισμένοι για την ίδια τιμή του χρόνου αλλά για διαφορετικές τιμές του X . Στην δεύτερη ομάδα όρων συνεπώς θα χρησιμοποιήσουμε ανάλυση κατά Taylor στην μεταβλητή X . Θα χρησιμοποιήσουμε τις συντομεύσεις $\Delta t_j = t_{j+1}^n - t_j^n$ και $\Delta X_j = X_{t_{j+1}^n} - X_{t_j^n}$.

- Taylor κατά t : Υπάρχει $\bar{t}_j \in [t_j^n, t_{j+1}^n]$ τέτοιο ώστε

$$g(t_{j+1}^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) = \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}_j, X_{t_{j+1}^n}) \Delta t_j$$

Χρησιμοποιώντας την συνέχεια των παραγώγων ως προς t της συνάρτησης g μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial t}(\bar{t}_j, X_{t_{j+1}^n}) \Delta t_j = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s}(s, X_s) ds \text{ σ.β.}$$

- Taylor κατά x : Υπάρχει $\bar{X}_j \in [X_{t_j^n}, X_{t_{j+1}^n}]$ τέτοιο ώστε

$$g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n}) = \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) \Delta X_j + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) \Delta X_j^2$$

Η δεύτερη αυτή ομάδα όρων απαιτεί λίγο πιο περίπλοκη μεταχείριση. Συγκεκριμένα, θα προσεγγίσουμε τις μεταβολές της διαδικασίας Ιτô ως εξής

$$\Delta X_j = u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j + v(\bar{t}_j, \omega) \Delta B_j$$

όπου $\Delta B_j = B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}$ και σαν \bar{t}_j μπορούμε να επιλέξουμε $\bar{t}_j = t_j^n$. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση αυτή στο ανάπτυγμα Taylor κατά x έχουμε ότι

$$\begin{aligned} g(t_j^n, X_{t_{j+1}^n}) - g(t_j^n, X_{t_j^n}) &= \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j + \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) v(\bar{t}_j, \omega) \Delta B_j \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) v(\bar{t}_j, \omega)^2 \Delta B_j^2 + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j^2}_{\Delta t_j^2} \\ &+ \underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) u(\bar{t}_j, \omega) v(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j \Delta B_j}_{\Delta t_j \Delta B_j} \end{aligned}$$

Το άθροισμα επάνω στην διαμέριση (από $j = 0$ έως $j = n-1$) των δύο τελευταίων (υπογραμμισμένων όρων) μπορεί να αποδειχθεί ότι τείνει στο 0 κατά L^2 καθώς $n \rightarrow \infty$. Από τους όρους που παραμένουν μπορούμε να δούμε ότι

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) u(\bar{t}_j, \omega) \Delta t_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) u(s, X_s) ds, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

και

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial g}{\partial x}(t_j^n, X_{t_j^n}) v(\bar{t}_j, \omega) \Delta B_j \rightarrow \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x}(s, X_s) v(s, X_s) dB_s, \text{ καθώς } n \rightarrow \infty$$

όπου το όριο λαμβάνεται πάντοτε στον L^2 . Ο τελευταίος όρος που παραμένει πρέπει να γραφεί στην μορφή

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) v(\bar{t}_j, \omega)^2 \Delta B_j^2 &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n}) v(t_j^n, \omega)^2 \Delta t_j \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n}) v(t_j^n, \omega)^2 (\Delta B_j^2 - \Delta t_j) \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, \bar{X}_j) \right. \\ &\left. - \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n}) \right) v^2 \Delta B_j^2 \end{aligned}$$

(4.-47)

Το άθροισμα των προτελευταίων όρων επάνω στην διαμέριση μηδενίζεται εφόσον το όριο στον L^2 των όρων $\Delta B_j^2 - \Delta t_j$ είναι 0 και το άθροισμα των τελευταίων όρων μηδενίζεται λόγω της συνέχειας των δευτέρων παραγώγων της συνάρτησης g ως προς x . Το άθροισμα των πρώτων όρων στο όριο δίνει

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t_j^n, X_{t_j^n}) v(t_j^n, \omega)^2 \Delta t_j \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(s, X_s) v(s, \omega)^2 dt$$

Αυτό και ολοκληρώνει το σχέδιο της απόδειξης. Τονίζεται ότι οι λεπτομέρειες που αφήσαμε δεν είναι τετριμένες και χρειάζονται λίγη ακόμα δουλειά την οποία αφήνουμε σαν άσκηση στους πιο μαθηματικά προσανατολισμένους από τους αναγνώστες. \square

Θέλουμε να τονίσουμε τα ακόλουθα σημεία:

- (1) Το Λήμμα του Ιτό είναι ίσως ένα από τα πλέον σημαντικά αποτελέσματα της στοχαστικής ανάλυσης, το οποίο αποτελεί τον ακρογωνιαίο λίθο σε οποιαδήποτε εφαρμογή. Η κατανόηση του και η δυνατότητα να το εφαρμόσουμε είναι απαραίτητη. Στην παράγραφο 4.5 δίνονται μία σειρά από παραδείγματα εφαρμογής του Λήμματος του Ιτό τόσο σε γενικές εφαρμογές όσο και στα οικονομικά.
- (2) Το Λήμμα του Ιτό εξακολουθεί να ισχύει και στην περίπτωση που το t είναι ένας χρόνος στάσης ο οποίος είναι φραγμένος. Η μορφή αυτή του Λήμματος του Ιτό μπορεί να μας φανεί χρήσιμη σε μία πληθώρα εφαρμογών.
- (3) Υπάρχουν γενικεύσεις του Λήμματος του Ιτό και για συναρτήσεις που ικανοποιούν ασθενέστερες συνθήκες από το να είναι $C^{1,2}$.

4.4 Διαδικασίες Ιτό σε πολλές διαστάσεις

Θα ασχοληθούμε τώρα με την γενίκευση της έννοιας της διαδικασίας Ιτό και των ιδιοτήτων τους σε παραπάνω από μία διάσταση, δηλαδή όταν η κίνηση Brown η οποία χρησιμοποιείται ως ολοκληρωτής είναι πολυδιάστατη και η υπό ολοκλήρωση ποσότητα είναι πιθανόν μία διανυσματική συνάρτηση.

4.4.1 Το ολοκλήρωμα Ιτό επάνω σε μία πολυδιάστατη κίνηση Brown

Θα ξεκινήσουμε με την γενίκευση του ολοκληρώματος του Ιτό επάνω σε μία πολυδιάστατη κίνηση Brown .

Ορισμός 4.4.1. Ας θεωρήσουμε $B_t = (B_{1,t}, \dots, B_{d,t})^T$ μία d -διάστατη κίνηση Brown και $f \in \mathbb{R}^{n \times d}$ μία οικογένεια από προσαρμοσμένες στοχαστικές διαδικασίες στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$ οι οποίες παίρνουν τιμές στον χώρο των πινάκων $n \times d$. Ισοδύναμα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $f = \{f_{ij}\}$, $i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, d$ όπου $f_{ij} \in \mathbb{R}$ μονοδιάστατες στοχαστικές διαδικασίες που είναι προσαρμοσμένες στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$. Το (αόριστο) στοχαστικό ολοκλήρωμα Ιτό $\int_0^t f dB_s$ είναι η στοχαστική διαδικασία $I_t \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ (διάνυσμα στήλη διάστασης n) το οποίο έχει την μορφή $I_t = (I_{1,t}, \dots, I_{n,t})^T$ όπου

$$I_{i,t} = \sum_{j=1}^d \int_0^t f_{ij} dB_{j,s}, \quad i = 1, \dots, n$$

και $\int_0^t f_{ij} dB_{j,s}$, είναι το μονοδιάστατο ολοκλήρωμα Ιτό που ορίσαμε προηγουμένως.

Σχόλιο: Ο παραπάνω ορισμός είναι αρκετά φυσικός αφού μπορούμε να γράψουμε

$$\int_0^t f dB_s = \int_0^t \begin{pmatrix} f_{11} & \dots & f_{1d} \\ \vdots & & \vdots \\ f_{n1} & \dots & f_{nd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_{1,s} \\ \vdots \\ dB_{d,s} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^d \int_0^t f_{1j} dB_{j,s} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^d \int_0^t f_{nj} dB_{j,s} \end{pmatrix}$$

Η γενίκευση για το πολυδιάστατο ολοκλήρωμα όταν τα όρια είναι χρόνοι στάσης, ή γενικότερα για το ορισμένο πολυδιάστατο στοχαστικό ολοκλήρωμα είναι προφανής.

Το πολυδιάστατο ολοκλήρωμα του Ιτό ικανοποιεί ιδιότητες οι οποίες είναι πολύ σχετικές με τις ιδιότητες του μονοδιάστατου ολοκλήρωματος. Μάλιστα οι ιδιότητες αυτές μπορούν να αποδειχθούν κάνοντας χρήση των αντιστοίχων ιδιοτήτων του μονοδιάστατου ολοκλήρωματος.

4.4.2 Πολυδιάστατες διαδικασίες Ιτό

Έχοντας σαν βάση την γενίκευση του ολοκλήρωματος του Ιτό επάνω σε πολυδιάστατες κινήσεις Brown μπορούμε να ορίσουμε και την έννοια των πολυδιάστατων διαδικασιών Ιτό.

Θα ξεκινήσουμε πρώτα με την γενίκευση της έννοιας της διαδικασίας του Ιτό όταν η κίνηση Brown ως προς την οποία γίνεται η ολοκλήρωση είναι πολυδιάστατη.

Ορισμός 4.4.2. Η X_t είναι μία μονοδιάστατη διαδικασία Ιτό αν

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s, \omega) ds + \sum_{i=1}^d \int_0^t v_i(s, \omega) dB_{i,s}$$

όπου οι u και v_i είναι προσαρμοσμένες στις \mathcal{F}_t για κάθε i και ικανοποιούν τις συνθήκες

$$\int_0^T |u(s, \omega)| ds < \infty, \quad \int_0^T |v_i(s, \omega)|^2 ds < \infty \quad \sigma.β. \quad 1 \leq i \leq d.$$

Σε διαφορική μορφή αυτό μπορεί να γραφεί σαν

$$dX_t = u(t, \omega)dt + \sum_{i=1}^d v_i(s, \omega)dB_{i,t}$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την έννοια της n -διάστατης διαδικασίας Ιτό

Ορισμός 4.4.3. n -διάστατη διαδικασία Ιτό : Μία n -διάστατη διαδικασία Ιτό είναι μία στοχαστική διαδικασία $X_t = (X_{1,t}, \dots, X_{n,t})$ όπου η κάθε συνιστώσα είναι μία διαδικασία Ιτό με την έννοια που ορίστηκε πιο πάνω. Πιο συγκεκριμένα μία n -διάστατη διαδικασία Ιτό είναι μία στοχαστική διαδικασία της μορφής $X_t = (X_{1,t}, \dots, X_{n,t})^T$ όπου

$$X_{i,t} = X_{i,0} + \int_0^t u_i(s, \omega) ds + \sum_{j=1}^d \int_0^t v_{ij}(s, \omega) dB_{j,s}$$

Δίνουμε μερικά παραδείγματα πολυδιάστατων διαδικασιών Ιτό.

Παράδειγμα 4.4.1. Η πιο απλή πολυδιάστατη διαδικασία Ιτό είναι μία n -διάστατη κίνηση Brown $B_t = (B_{1,t}, \dots, B_{n,t})^T$.

Παράδειγμα 4.4.2. Μοντέλα πολλών παραγόντων για τις τιμές των χρεογράφων Ένα παράδειγμα πολυδιάστατης διαδικασίας Ιτό είναι η διαδικασία των τιμών περισσότερων του ενός χρεογράφων, τα οποία επηρεάζονται από κοινούς στοχαστικούς παράγοντες της οικονομίας (π.χ. διάφορα μακροοικονομικά μεγέθη). Θα δώσουμε

εδώ ένα μοντέλο δύο χρεογράφων και δύο παραγόντων της οικονομίας. Έστω $S_{1,t}, S_{2,t}$ οι τιμές των χρεογράφων 1, 2 την χρονική στιγμή t . Οι λογάριθμοι των τιμών ακολουθούν την πολυδιάστατη διαδικασία Itô

$$\begin{aligned} d(\ln S_{1,t}) &= \left(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2} \right) dt + \sigma_1 dB_{1,t} \\ d(\ln S_{2,t}) &= \left(\mu_2 - \frac{\sigma_2^2}{2} \right) dt + \rho \sigma_2 dB_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 dB_{2,t} \end{aligned}$$

Στο παραπάνω μοντέλο θεωρούμε ότι οι στοχαστικοί παράγοντες της οικονομίας μπορεί να προσομοιωθούν με δύο ανεξάρτητες κινήσεις Brown. Οι παράγοντες αυτοί επηρεάζουν τις τιμές και των δύο χρεογράφων, με κάποιο συντελεστή συσχέτισης ρ . Οι παράγοντες μ_1, μ_2 είναι οι συντελεστές ολίσθησης (drift coefficients) των χρεογράφων ενώ οι συντελεστές σ_1, σ_2 είναι οι συντελεστές πτητικότητας (volatility) των χρεογράφων. Οι ερμηνείες των συντελεστών αυτών μπορεί να γίνουν πιο καθαρές αν δούμε την ισοδύναμη μορφή του παραπάνω μοντέλου

$$\begin{aligned} dS_{1,t} &= S_{1,t}(\mu_1 dt + \sigma_1 dB_{1,t}) \\ dS_{2,t} &= S_{2,t}(\mu_2 dt + \rho \sigma_2 dB_{1,t} + \sqrt{1 - \rho^2} \sigma_2 dB_{2,t}) \end{aligned}$$

Η ισοδυναμία των δύο αυτών μορφών θα γίνει σαφής στην επόμενη παράγραφο όπου θα εισάγουμε τον πολυδιάστατο τύπο του Itô.

4.4.3 Ο τύπος του Itô σε περισσότερες διαστάσεις

Ο τύπος του Itô μπορεί να γενικευθεί σε περισσότερες διαστάσεις. Αν $X_t = (X_{1,t}, \dots, X_{n,t})$ και

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= u_1 dt + v_{11} dB_{1,t} + \dots + v_{1d} dB_{d,t} \\ &\dots \\ dX_{n,t} &= u_n dt + v_{n1} dB_{1,t} + \dots + v_{nd} dB_{d,t} \end{aligned}$$

και $g(t, x)$ είναι μία $C^{1,2}$ συνάρτηση⁷ $g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, τότε η στοχαστική διαδικασία $Y(t, \omega) = g(t, X_t)$ είναι μία διαδικασία Itô με διαφορική μορφή

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x_i} dX_{i,t} + \frac{1}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} dX_{i,t} dX_{j,t}$$

όπου χρησιμοποιούμε τους κανόνες

$$(4.61) \quad dB_{i,t} dB_{j,t} = \delta_{ij} dt, \quad dB_{i,t} dt = dt dB_{i,t} = 0$$

Μετά από κάποιες πράξεις μπορούμε να καταλήξουμε στην μορφή

$$dY_t = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} u_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n v_{ij} v_{ji} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right) dt + \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d \frac{\partial g}{\partial x_j} v_{jk} dB_{k,t}$$

Η παραπάνω μορφή μπορεί να γραφεί και σε πιο συμπαγή μορφή χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό με πίνακες και διανύσματα ως εξής

$$dY_t = g_t dt + g_x dX_t + \frac{1}{2} dX^T g_{xx} dX_t$$

ή μετά τις απαραίτητες πράξεις

$$dY_t = \left(g_t + g_x u + \frac{1}{2} \text{trace}(v^T g_{xx} v) \right) dt + g_x v dB_t$$

⁷ Η συνάρτηση g πρέπει να είναι C^2 (δηλαδή να έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης) στην μεταβλητή $x = (x_1, \dots, x_n)$ και C^1 (δηλαδή να έχει συνεχή παράγωγο πρώτης τάξης) στην μεταβλητή t .

όπου $g_t := \frac{\partial g}{\partial t}$, με g_x συμβολίζουμε το διάνυσμα που αποτελείται από τις μερικές παραγώγους της g ως προς τις συνιστώσες x_j του διανύσματος x ,

$$g_x = \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_n} \right),$$

με g_{xx} συμβολίζουμε τον πίνακα των δεύτερων παραγώγων της g ως προς τις συνιστώσες του x ,

$$[g_{xx}]_{ij} = \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j}$$

και u και v είναι το διάνυσμα των ταχυτήτων και ο πίνακας των συντελεστών διάχυσης αντίστοιχα.

Η απόδειξη του τύπου του Ιτô σε παραπάνω της μίας διάστασης γίνεται με παρόμοιο τρόπο με την απόδειξη του τύπου του Ιτô για την μία διάσταση και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

Σχόλιο: Θα συμβουλευάμε, τουλάχιστον στην αρχή, τους αναγνώστες όταν θέλουν να χρησιμοποιήσουν τον τύπο του Ιτô, τόσο στην μία όσο και στις περισσότερες διαστάσεις, να ξεκινάνε από την συμπαγή μορφή του αναπτύγματος Taylor και μετά να σχηματίζουν τα γινόμενα $dX_i dX_j$ χρησιμοποιώντας τους κανόνες της άλγεβρας και τους μνημονικούς κανόνες σχετικά με τα γινόμενα $dB_i dB_j$. Έτσι, ελαχιστοποιούνται τα περιθώρια σφάλματος.

4.5 Παραδείγματα της χρήσης του τύπου του Ιτô

4.5.1 Γενικά παραδείγματα.

Ακολουθούν μερικά παραδείγματα της εφαρμογής του τύπου του Ιτô.

Μία σημαντική εφαρμογή του τύπου του Ιτô είναι στον υπολογισμό στοχαστικών ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 4.5.1. Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Ιτô στην συνάρτηση $g(t, x) = \frac{1}{2}x^2$ για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα $I = \int_0^t B_s dB_s$.

Έστω $Y_t = g(t, B_t) = \frac{1}{2}B_t^2$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Ιτô στην συνάρτηση αυτή βρίσκουμε ότι

$$\frac{1}{2}B_t^2 = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2} \int_0^t dt = \int_0^t B_s dB_s + \frac{1}{2}t$$

έτσι ώστε

$$I = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t.$$

Ο δεύτερος όρος καθιστά φανερό ότι το ολοκλήρωμα του Ιτô διαφέρει από τα συνήθη ολοκληρώματα!

Ο τύπος του Ιτô ισχύει γενικά και στην περίπτωση που η διαδικασία Ιτô από την οποία ξεκινάμε δίνεται σε πεπλεγμένη μορφή δηλαδή αν είναι της μορφής $dX_t = b(Z_t, t, \omega)dt + \sigma(Z_t, t, \omega)dB_t$ όπου Z_t είναι και αυτή μία διαδικασία Ιτô. Στην περίπτωση αυτή βέβαια η $Y_t = f(X_t)$ θα είναι μία διαδικασία Ιτô της οποίας οι συντελεστές θα εξαρτώνται και από την Z_t μέσω της εξάρτησης των συντελεστών b, σ από αυτή. Μία ενδιαφέρουσα ειδική περίπτωση είναι η περίπτωση $Z_t = X_t$. Τότε λέμε ότι η X_t είναι η λύση μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 4.5.2. Έστω X_t μία διαδικασία Ιτô που μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή ως $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$. Τότε η $Y_t = \ln(X_t)$ είναι μία διαδικασία Ιτô με διαφορική μορφή

$$dY_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dB_t$$

δηλαδή είναι ανεξάρτητη του Y_t !

Παράδειγμα 4.5.3. Ας θεωρήσουμε το δεύτερο μοντέλο για την τιμή των χρεογράφων με δύο στοχαστικούς παράγοντες για την οικονομία που διατυπώσαμε στο παράδειγμα 4.4.2. Εφαρμόζοντας τον τύπο του Ιτô για τις συναρτήσεις $f_1(S_1) = \ln(S_1)$ και $f_2(S_2) = \ln(S_2)$ μπορούμε να καταλήξουμε στο ότι οι λογάριθμοι των τιμών των

χρεογράφων είναι πολυδιάστατες διαδικασίες Itô που περιγράφονται από το πρώτο μοντέλο του παραδείγματος 4.4.2. Πράγματι έχουμε ότι

$$(4.-67) \quad d(\ln(S_{i,t})) = \frac{1}{S_{i,t}} dS_{i,t} - \frac{1}{2} \frac{1}{S_{i,t}^2} (dS_{i,t})^2, \quad i = 1, 2$$

Οι τετραγωνικοί όροι μπορεί να υπολογιστούν κάνοντας χρήση των εξισώσεων του δεύτερου μοντέλου. Χρησιμοποιώντας τον μνημονικό κανόνα για την εφαρμογή του λήμματος του Itô σε παραπάνω της μίας διάστασης έχουμε ότι

$$(dS_{1,t})^2 = S_{1,t}^2 (\mu_1^2 dt^2 + \sigma_1^2 (dB_{1,t})^2 + 2\sigma_1 \mu_1 dt dB_{1,t}) = \sigma_1^2 S_{1,t}^2 dt$$

και

$$\begin{aligned} (dS_{2,t})^2 &= S_{2,t}^2 \left(\mu_2^2 dt^2 + 2\rho\sigma_2\mu_2 dt dB_{1,t} + 2\mu_2\sigma_2 \sqrt{1-\rho^2} dt dB_{2,t} \right. \\ &\quad \left. + \rho\sigma_2^2 \sqrt{1-\rho^2} dB_{1,t} dB_{2,t} + \rho^2 \sigma^2 (dB_{1,t})^2 + (1-\rho^2) \sigma_2^2 (dB_{2,t})^2 \right) \\ &= S_{2,t}^2 (\rho^2 \sigma_2^2 dt + (1-\rho^2) \sigma_2^2 dt) = \sigma^2 S_{2,t}^2 dt \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στις εξισώσεις (4.-67) καταλήγουμε στο πρώτο μοντέλο που παραθέσαμε στο παράδειγμα 4.4.2.

Παράδειγμα 4.5.4. Η κίνηση Brown στον μοναδιαίο κύκλο Έστω B_t μία κίνηση Brown και ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})^T = (\cos(B_t), \sin(B_t))^T$. Παρατηρούμε ότι $X_{1,t}^2 + X_{2,t}^2 = 1$ για κάθε t συνεπώς η στοχαστική διαδικασία αυτή είναι μία κίνηση Brown επάνω στον μοναδιαίο κύκλο S^1 . Χρησιμοποιώντας το πολυδιάστατο λήμμα του Itô είναι εύκολο να αποδείξουμε, μετά από λίγη άλγεβρα, ότι η στοχαστική διαδικασία X_t είναι και αυτή μία πολυδιάστατη διαδικασία Itô η οποία έχει την διαφορική μορφή

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= -\frac{1}{2} X_{1,t} dt - X_{2,t} dB_t \\ dX_{2,t} &= -\frac{1}{2} X_{2,t} dt + X_{1,t} dB_t \end{aligned}$$

ή σε πιο συμπαγή μορφή με την χρήση πινάκων

$$dX_t = -\frac{1}{2} X_t dt + K X_t dB_t$$

όπου

$$K = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Σημειώστε ότι η διαφορική μορφή που δίνουμε για αυτή την διαδικασία Itô περιλαμβάνει στοχαστικά ολοκληρώματα της διαδικασίας αυτής επάνω στην κίνηση Brown. Αυτό μπορεί να φαίνεται παράξενο αλλά ας το δεχθούμε μέχρι να εισάγουμε την έννοια της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης στο επόμενο κεφάλαιο.

Παράδειγμα 4.5.5. Έστω $B = (B_{1,t}, B_{2,t}, \dots, B_{N,t})$ μία N -διάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το 0. Ορίστε την διαδικασία $R_t = |B| := (B_{1,t}^2 + \dots + B_{N,t}^2)^{1/2}$, όπου $|\cdot|$ συμβολίζει την Ευκλείδεια απόσταση στο \mathbb{R}^N . Εφαρμόστε τον τύπο του Itô σε περισσότερες διαστάσεις για να βρείτε την διαφορική μορφή του R_t . Η R_t ονομάζεται διαδικασία του Bessel και βρίσκει σημαντικές εφαρμογές στην μελέτη ορισμένων τύπων παραγώγων συμβολαίων στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

Θα εφαρμόσουμε το πολυδιάστατο λήμμα του Itô στην συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_N) = (x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}$ στην οποία θα θέσουμε $x_i = B_{i,t}$, $i = 1, \dots, N$. Μετά από λίγο άλγεβρα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i} &= \frac{x_i}{(x_1^2 + \dots + x_N^2)^{1/2}} = \frac{x_i}{R} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} &= -\frac{x_i x_j}{(x_1^2 + \dots + x_N^2)^{3/2}} = -\frac{x_i x_j}{R^3}, \quad i \neq j \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} &= \frac{\sum_{j=1, j \neq i}^N x_j^2}{R^3} \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι στον τύπο του Ιτô θεωρούμε ότι $(dB_{i,t})^2 = t, i = 1, \dots, N$ και $dB_{i,t}dB_{j,t} = 0, i \neq j$ καταλήγουμε ότι

$$(4.-77) \quad dR_t = \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t}dB_{i,t}}{\sqrt{B_{1,t}^2 + \dots + B_{N,t}^2}} + \frac{(N-1)}{2} \frac{1}{\sqrt{B_{1,t}^2 + \dots + B_{N,t}^2}} dt$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι

$$\sum_{j=1}^N \sum_{j=1, j \neq i}^N x_j^2 = (N-1) \sum_{i=1}^N x_i^2 = (N-1)R^2$$

Η εξίσωση (4.-77) μας εξασφαλίζει ότι η στοχαστική διαδικασία R_t (διαδικασία Bessel) είναι μία διαδικασία Ιτô. Κάνοντας όμως χρήση του θεωρήματος του Levy μπορούμε να φέρουμε την παραπάνω εξίσωση σε πιο απλή μορφή. Αυτό μπορεί να γίνει αν παρατηρήσουμε ότι η στοχαστική διαδικασία

$$\bar{B}_t := \int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t}dB_{i,t}}{\sqrt{B_{1,t}^2 + \dots + B_{N,t}^2}}$$

είναι μία κίνηση Brown. Πράγματι κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος του Ιτô βλέπουμε ότι

$$E[\bar{B}_t] = E \left[\int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t}dB_{i,t}}{\sqrt{B_{1,t}^2 + \dots + B_{N,t}^2}} \right] = 0$$

και ότι

$$\begin{aligned} E[\bar{B}_t^2 - t] &= E \left[\left(\int_0^t \frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t}dB_{i,t}}{\sqrt{B_{1,t}^2 + \dots + B_{N,t}^2}} \right)^2 - t \right] \\ &= \int_0^t E \left[\frac{\sum_{i=1}^N B_{i,t}^2}{B_{1,t}^2 + \dots + B_{N,t}^2} dt \right] - t = t - t = 0 \end{aligned}$$

από τα οποία μπορούμε, με την χρήση του θεωρήματος του Levy, να καταλήξουμε στο ότι η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown. Συνεπώς, η διαδικασία Bessel μπορεί να γραφεί ισοδύναμα στην μορφή

$$dR_t = d\bar{B}_t + \frac{(N-1)}{2} \frac{1}{R_t} dt$$

όπου φυσικά και πάλι είναι στην μορφή μίας διαδικασίας Ιτô.

Παράδειγμα 4.5.6. Ολοκλήρωση κατά μέρη Δείξτε ότι αν X_t, Y_t είναι διαδικασίες Ιτô τότε

$$d(X_t Y_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + dX_t dY_t$$

ή ισοδύναμα σε ολοκληρωτική μορφή

$$\int_0^t X_s dY_s = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s - \int_0^t dX_s dY_s$$

Για να δειχθεί αυτό αρκεί να εφαρμόσουμε τον τύπο του Ιτô για την συνάρτηση $f(x, y) = xy$ και να θέσουμε $x = X_t$ και $y = Y_t$. Στην συνέχεια μπορεί να απλοποιησουμε την έκφραση $dX_t dY_t$ κάνοντας χρήση των κανόνων που χρησιμοποιούμε για τον τύπο του Ιτô, δηλαδή τους κανόνες που περιγράψαμε στην εξίσωση (4.-61).

Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση όπου η X_t είναι μία διαδικασία Ιτô και η Y_t είναι της μορφής $dY_t = adt$. Τότε μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\int_0^t X_s dY_s = \int_0^t X_s a ds = X_t Y_t - X_0 Y_0 - \int_0^t Y_s dX_s$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γενικευθεί για την περίπτωση όπου η Y_t είναι μία διαδικασία πεπερασμένης μεταβολής, με τις κατάλληλες αλλαγές. Το ολοκλήρωμα επάνω στην Y θα πρέπει να εννοείται σαν το ολοκλήρωμα Stieltjes (βλ. παράγραφο 4.7).

Παράδειγμα 4.5.7. Μία ειδική περίπτωση του τύπου του Dynkin Ο τύπος του Itô δεν ισχύει μόνο για ντετερμινιστικούς χρόνους αλλά και για χρόνους στάσης! Χρησιμοποιώντας την πληροφορία αυτή δείξτε ότι αν $f \in C_0^2(\mathbb{R})$ και τ είναι ένας χρόνος στάσης για τον οποίο ισχύει $E^x[\tau] < \infty$ τότε

$$E^x[f(B_\tau)] = f(x) + E^x \left[\int_0^\tau \frac{1}{2} \frac{d^2 f(X_s)}{dx^2} ds \right]$$

όπου B_t είναι μία κίνηση Brown. Ο τύπος αυτός μπορεί να γενικευθεί για οποιαδήποτε διαδικασία Itô και σε οποιοδήποτε αριθμό διαστάσεων.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô στην $f(B_t)$ και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το ολοκλήρωμα $\int_0^t f'(B_s)dB_s$ είναι μία martingale. Το σημείο που χρειάζεται λίγο προσοχή είναι στο να δείξουμε ότι

$$E \left[\int_0^\tau \frac{df}{dx}(B_s)dB_s \right] = 0$$

Ο λόγος που το σημείο αυτό είναι λεπτό είναι παρόμοιος με τους λόγους που αναφέραμε στην συζήτηση του θεωρήματος επιλεκτικής στάσης. Έτσι, θα γράψουμε

$$E \left[\int_0^{\tau \wedge t} \frac{df}{dx}(B_s)dB_s \right] = 0$$

και θα πάρουμε το όριο $t \rightarrow \infty$ προσπαθώντας να αιτιολογήσουμε την εναλλαγή του ορίου με την μέση τιμή. Το βήμα αυτό αφήνεται ως άσκηση. □

4.5.2 Παραδείγματα της χρήσης του τύπου του Itô στην οικονομική: Περιθώριο διακυμάνσεως ισοτιμιών

Οι σταθερές ισοτιμίες παρουσιάζουν διακυμάνσεις εντός πεπερασμένων ζωνών οι οποίες ονομάζονται περιθώρια διακυμάνσεως ισοτιμιών. Επί παραδείγματι τις μέρες που υπήρχε το gold standard η τιμή του χρυσού παρουσίαζε διακυμάνσεις μεταξύ των αποκαλούμενων χρυσών σημείων (gold points). Στην περίπτωση του συστήματος του Bretton Woods τα όρια ήταν $\pm 1\%$ γύρω από την ισοτιμία του δολαρίου και στην περίπτωση του μηχανισμού ισοτιμιών συναλλάγματος (ERM) του Ευρωπαϊκού νομισματικού συστήματος (πριν την κατάρρευση του 1993) τα όρια ήταν $\pm 2.25\%$ γύρω από μία κεντρική ισοτιμία. Ένα μοντέλο για τα περιθώρια των διακυμάνσεων ισοτιμιών οφείλεται στον Paul Krugman (1991). Υποθέτουμε ότι η ισοτιμία συναλλάγματος, όπως και η τιμή κάθε άλλου χρεογράφου, εξαρτάται από ορισμένα τρέχοντα θεμελιώδη και από την αναμενόμενη τιμή (μέση τιμή) των μελλοντικών τιμών της συναλλαγματικής ισοτιμίας δηλαδή

$$(4.-86) \quad s = f + a \frac{E[ds]}{dt}$$

όπου s είναι ο λογάριθμος της συναλλαγματικής ισοτιμίας, f ο λογάριθμος των θεμελιωδών, $E \left[\frac{ds}{dt} \right]$ η αναμενόμενη υποτίμηση της συναλλαγματικής ισοτιμίας και a μία σταθερά.

Το θεμελιώδες αποτελείται από δύο συνιστώσες

$$f = m + v$$

όπου m_t είναι ο λογάριθμος της προσφοράς του χρήματος που ελέγχεται από την κεντρική τράπεζα και v_t είναι ο λογάριθμος της ταχύτητας κυκλοφορίας του χρήματος που είναι μία στοχαστική μεταβλητή έξω από τον έλεγχο της κεντρικής τράπεζας. Ελέγχοντας την προσφορά του χρήματος η κεντρική τράπεζα ελέγχει το f_t και με τον τρόπο αυτό και την συναλλαγματική ισοτιμία. Ο σκοπός της με αυτό είναι να κρατήσει το s εντός μίας καθορισμένης ζώνης (καθορισμένου περιθωρίου). Η ζώνη αυτή καθορίζεται από την σχέση

$$s_{min} \leq s \leq s_{max}$$

όπου s_{min} είναι το κάτω φράγμα των διακυμάνσεων των συναλλαγματικών ισοτιμιών και s_{max} είναι το άνω φράγμα.

Το μοντέλο του Krugman βασίζεται επάνω σε τρεις υποθέσεις:

1. Τα περιθώρια των διακυμάνσεων συναλλαγματικών ισοτιμιών είναι απόλυτα πιστευτά. Αυτό σημαίνει ότι οι παίκτες πιστεύουν ότι τα άκρα της ζώνης θα παραμείνουν σταθερά για πάντοτε.
2. Τα περιθώρια των ισοτιμιών 'προστατεύονται' μόνο με οριακές παρεμβάσεις. Αυτό σημαίνει ότι η συναλλαγματική ισοτιμία αφήνεται να μεταβάλλεται ελεύθερα μέσα στην ζώνη των διακυμάνσεων. Όταν όμως η συναλλαγματική ισοτιμία φτάνει στο άνω όριο (και συνεπώς το τοπικό νόμισμα υποτιμάται) η κεντρική τράπεζα αγοράζει το τοπικό νόμισμα προσφέροντας ξένο συνάλλαγμα. Συνεπώς η προσφορά του χρήματος ελαττώνεται και έτσι αποφεύγεται η περαιτέρω υποτίμηση του τοπικού νομίσματος. Το αντίθετο συμβαίνει όταν φτάσουμε στο κάτω όριο.
3. Ο όρος της ταχύτητας v_t είναι μία κίνηση Brown με ταχύτητα μ και διακύμανση σ^2 ,

$$dv = \mu dt + \sigma dB_t$$

Ο Krugman υποθέτει ότι $\mu = 0$. Η υποθέση ότι η v_t είναι μία κίνηση Brown συνεπάγεται ότι οι ελεύθερες συναλλαγματικές ισοτιμίες θα είναι επίσης κίνηση Brown ⁸.

Οι υποθέσεις 1,2 και 3 μας επιτρέπουν να εκφράσουμε την συναλλαγματική ισοτιμία σαν μία συνάρτηση των θεμελιωδών δηλαδή να γράψουμε

$$s = \phi(f)$$

όπου η f περιορίζεται στο διάστημα $f_{min} \leq f \leq f_{max}$ που αντιστοιχεί στην ζώνη συναλλαγματικών ισοτιμιών.

Ορίσαμε λοιπόν την ισορροπία σαν μία σχέση μεταξύ των θεμελιωδών μεγεθών m και v και της συναλλαγματικής ισοτιμίας. Αυτό μαθηματικά γράφεται

$$(4.-89) \quad s = g(m, v, s_{min}, s_{max})$$

Η παραπάνω σχέση θα πρέπει να είναι συνεπής με την σχέση (4.-86). Θα μπορούμε να ορίσουμε το $s = g$ βρίσκοντας μία οικογένεια τέτοιων καμπυλών.

Ας υποθέσουμε ότι κρατάμε το m σταθερό και ας πάρουμε την περίπτωση που το s βρίσκεται εντός της ζώνης. Τότε η μόνη πηγή αναμενόμενων αλλαγών του s είναι λόγω των τυχαίων μεταβολών το v .

Χρησιμοποιώντας τους συνήθεις κανόνες του λογισμού του Ιτô μπορούμε να βρούμε το ds (εφαρμόζουμε τον τύπο του Ιτô στην (4.-89) και παίρνουμε

$$\frac{E[ds]}{dt} = \frac{\sigma^2}{2} g_{vv}(m, v, s_{min}, s_{max})$$

όπου με g_{vv} συμβολίζουμε την δεύτερη μερική παράγωγο της g ως προς την μεταβλητή v . Αντικαθιστώντας αυτό στην (4.-86) παίρνουμε

$$g(m, v, s_{min}, s_{max}) = m + v + \frac{\sigma^2}{2} g_{vv}(m, v, s_{min}, s_{max})$$

Μπορούμε τώρα να χειριστούμε την παραπάνω σχέση σαν μία συνήθη διαφορική εξίσωση η λύση της οποίας μπορεί να μας δώσει το g . Η γενική λύση της εξίσωσης αυτής είναι

$$g(m, v, s_{min}, s_{max}) = m + v + A \exp(\rho v) + B \exp(-\rho v)$$

όπου $\rho = (\frac{2}{\gamma \sigma^2})^{1/2}$ και A, B είναι σταθερές που θα καθοριστούν ως εξής: Λόγω συμμετρίας αναμένουμε η καμπύλη να περνά από το σημείο $s = 0$ όταν $v = 0$ και $m = 0$. Η συνθήκη αυτή μπορεί να πραγματοποιηθεί μόνο όταν $A = -B$. Με την επιλογή αυτή παίρνουμε ότι η s είναι μία σιγμοειδής καμπύλη ως προς το v και οι τιμές του s τείνουν σε μία σταθερή τιμή για αρκετά μεγάλα v . Η τιμή του A μπορεί να καθοριστεί από την συνθήκη η καμπύλη του s να είναι εφαπτομενική στην οριακή της τιμή. Αν \bar{s} είναι η τιμή του s στην οποία το v φτάνει την κορυφή της περιοχής που της επιτρέπεται, μαθηματικά η συνθήκη αυτή μπορεί να εκφραστεί ως

$$\begin{aligned} \bar{s} &= \bar{v} + 2A \sinh(\rho \bar{v}) \\ 0 &= 1 + 2\rho A \cosh(\rho \bar{v}) \end{aligned}$$

⁸Σημειώνουμε ότι μέσα στην ζώνη δεν υπάρχει καμία παρέμβαση από τις αρχές στην αγορά συναλλαγματικών ισοτιμιών έτσι ώστε $m = 0$. Από την υπόθεση ότι η v ακολουθεί ένα τυχαίο περίπατο, δεν θα πρέπει να υπάρχει προβλέψιμη αλλαγή την συναλλαγματική ισοτιμία έτσι ώστε $E \left[\frac{ds}{dt} \right] = 0$. Συνεπώς η εξίσωση (4.-86) γίνεται $s = v$ η οποία είναι και η εξίσωση για τις συναλλαγές εντός της ζώνης.

από τις οποίες μπορούμε να λύσουμε ως προς A και \bar{v} .

Ο Krugman χρησιμοποιεί το μοντέλο αυτό για την μελέτη διαφόρων προβλημάτων που σχετίζονται με τα target zones όπως π.χ. την επίδραση του στην ευστάθεια των αγορών κ.α. Για λεπτομέρειες σχετικά με το μοντέλο παραπέμπουμε στα [11] και [20].

4.6 Το θεώρημα αναπαράστασης των martingale

Το στοχαστικό ολοκλήρωμα μπορεί να γενικευθεί για να μελετήσουμε ολοκλήρωση επάνω σε οποιαδήποτε martingale και όχι μόνο κίνηση Brown. Όμως ακόμα και η απλή περίπτωση της ολοκλήρωσης επάνω στην κίνηση Brown είναι αρκετή για την μελέτη πολύ ενδιαφέροντων εφαρμογών.

Μία σημαντική ιδιότητα του στοχαστικού ολοκληρώματος ως προς την κίνηση Brown είναι το θεώρημα αναπαράστασης των martingale (martingale representation theorem).

Θεώρημα 4.6.1. (Θεώρημα αναπαράστασης των martingale) Έστω M_t μία συνεχής τοπική martingale (πιθανόν πολυδιάστατη) η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, όπου B_t μία κίνηση Brown (πιθανόν πολυδιάστατη). Τότε υπάρχει διαδικασία θ_t η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad t \geq 0$$

Η διάσταση της διαδικασίας θ_t εξαρτάται από την διάσταση της κίνησης Brown B_t και θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να έχει νόημα το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα αν η M_t παίρνει τιμές στον \mathbb{R}^d και η B_t παίρνει τιμές στον \mathbb{R}^m , τότε η θ παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}^{d \times m}$ και πρέπει να ανήκει στον χώρο $M^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$.

Απόδειξη: Βλ. το παράρτημα του κεφαλαίου. \square

Συνεπώς οποιαδήποτε συνεχής τοπική martingale μπορεί να γραφεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown. Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιείται πολύ στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

4.7 Σύντομη αναφορά στο ολοκλήρωμα του Stieltjes

Στο σημείο αυτό θα θέλαμε να κάνουμε μία σύντομη αναφορά στην έννοια του ολοκληρώματος Stieltjes από την πραγματική ανάλυση και να τονίσουμε τον λόγο που η έννοια αυτή δεν επαρκεί για τον ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος. Αυτός ήταν ο λόγος που ο Itô αναγκάστηκε να ορίσει το στοχαστικό ολοκλήρωμα διαφορετικά.

Θα ξεκινήσουμε την σύντομη αναφορά μας στο ολοκλήρωμα του Stieltjes θεωρώντας αρχικά μη τυχαίες συναρτήσεις και θα γενικεύσουμε για την περίπτωση τυχαίων μεταβλητών και στοχαστικών διαδικασιών.

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό του ολοκληρώματος Stieltjes για μία συνάρτηση βήματος.

Ορισμός 4.7.1. Έστω μία συνάρτηση βήματος

$$h = h_0 \mathbf{1}_0 + \sum_{i=1}^n h_i \mathbf{1}_{(t_i, t_{i+1}]}$$

όπου $\{t_i\}$ είναι μία διαμέριση του διαστήματος $[0, t]$, και m οποιαδήποτε συνάρτηση στο \mathbb{R}^+ . Το ολοκλήρωμα Stieltjes της h επάνω στην m ορίζεται σαν το άθροισμα

$$\int_0^t h dm := \sum_{i=1}^n h_i [m(t_{i+1}) - m(t_i)]$$

Όπως είδαμε και σε άλλα σημεία που σχετίζονταν με το ολοκλήρωμα έως τώρα (π.χ. όταν συζητούσαμε για την έννοια της μέσης τιμής) μία δεξιά συνεχής συνάρτηση h μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία h_n συναρτήσεων βήματος με την έννοια ότι $h_n \rightarrow h$ όπου το όριο λαμβάνεται με την συνήθη έννοια. Από την ακολουθία αυτή μπορούμε να κατασκευάσουμε μία ακολουθία από ολοκληρώματα Stieltjes $\int_0^t h_n dm$ το καθένα από τα οποία ορίζεται σύμφωνα με τον ορισμό 4.7.1. Μπορεί να αποδειχθεί ότι το όριο $n \rightarrow \infty$ υπάρχει και μάλιστα αν h_n και h'_n είναι δύο διαφορετικές ακολουθίες συναρτήσεων βήματος που προσεγγίζουν την ίδια συνάρτηση h τότε τα όρια $\int_0^t h_n dm$ και $\int_0^t h'_n dm$ συμπίπτουν. Συνεπώς

Ορισμός 4.7.2. Έστω h μία δεξιά συνεχής συνάρτηση και h_n μία ακολουθία συναρτήσεων βήματος που προσεγγίζει την h . Το ολοκλήρωμα Stieltjes της h επάνω σε μία συνάρτηση m ορίζεται σαν

$$\int_0^t h dm := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^t h_n dm$$

Η συνάρτηση m ονομάζεται ολοκληρωτής (integrator).

Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει πόσο σημαντικό ρόλο παίζει η έννοια της συνολικής μεταβολής του ολοκληρωτή στο ολοκλήρωμα του Stieltjes.

Θεώρημα 4.7.1. Έστω ότι η m έχει τοπικά φραγμένη μεταβολή και ότι η h είναι δεξιά συνεχής και κανονική. Τότε το ολοκλήρωμα Stieltjes $\int_0^t h dm$ υπάρχει και ικανοποιεί την σχέση

$$\left| \int_0^t h dm \right| \leq \int_0^t \|h\| dm \leq \sup_{0 \leq s \leq t} h(s) \int_0^t |dm|$$

όπου

$$\int_0^t |dm| := \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |m(t_{i+1}) - m(t_i)| \right\}$$

και $\{t_i\}$ οποιαδήποτε διαμέριση του $[0, t]$. Το \sup λαμβάνεται επάνω σε όλες τις διαμερίσεις.

Το θεώρημα αυτό μας δείχνει ότι αν ο ολοκληρωτής δεν έχει πεπερασμένη μεταβολή τότε υπάρχουν προβλήματα με τον ορισμό του ολοκληρώματος του Stieltjes χρησιμοποιώντας την συνάρτηση αυτή σαν ολοκληρωτή.

Το ολοκλήρωμα Riemann είναι μία ειδική μορφή του ολοκληρώματος του Stieltjes αν επιλέξουμε για ολοκληρωτή την $m = t$. Η συνάρτηση αυτή μπορεί να φανεί πολύ εύκολα ότι έχει πεπερασμένη μεταβολή οπότε σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα το ολοκλήρωμα του Riemann είναι καλά ορισμένο. Μάλιστα, στην γενικότερη περίπτωση που η m είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση του t το ολοκλήρωμα Stieltjes μία οποιαδήποτε συνάρτησης h πάνω στην m μπορεί να γραφεί σαν ένα ολοκλήρωμα Riemann σύμφωνα με το ακόλουθο

$$\int_0^t h(t) dm(t) = \int_0^t \left(h(t) \frac{dm}{dt} \right) dt$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι τόσο η h όσο και η m είναι στοχαστικές διαδικασίες δηλαδή ότι $h = h(t, \omega)$ και $m = m(t, \omega)$. Θα μπορούσαμε κατά αναλογία να ορίσουμε ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής $\int_0^t h(t, \omega) dm(t, \omega)$. Αυτό θα γίνονταν ορίζοντας τα όρια σημειακά, δηλαδή για κάθε ω αν ορίζαμε το ολοκλήρωμα $I_s(\omega) = \int_0^s h(t, \omega) dm(t, \omega)$ και μετά μεταβάλλοντας τα ω κατασκευάζαμε την στοχαστική διαδικασία.

Μία ειδική περίπτωση είναι η περίπτωση όπου $m(t, \omega) = B_t$ δηλαδή ο ολοκληρωτής είναι μία κίνηση Brown. Η διαφορά με την προσέγγιση του Ιτô είναι ότι τώρα θα έχουμε μία ακολουθία τυχαίων μεταβλητών (στοχαστικών διαδικασιών) $h_n(t, \omega)$ που θα είναι διαδικασίες βήματος και που στο όριο $\rightarrow \infty$ θα τείνουν σε μία τυχαία μεταβλητή αλλά το όριο αυτό λαμβάνεται για κάθε ω (σημειακά) και όχι κατά την L^2 έννοια δηλαδή κάτω από την μέση τιμή του τετραγώνου της ποσότητας που μας ενδιαφέρει και που ουσιαστικά περιλαμβάνει ένα ολοκλήρωμα επάνω σε όλα τα ω χρησιμοποιώντας ως βάρους το μέτρο πιθανότητας.

Το γιατί το να πάρουμε το όριο σημειακά στην περίπτωση όπου $m = B_t$ δεν είναι επαρκές φαίνεται από το θεώρημα 4.7.1. Έχουμε δει στο κεφάλαιο σχετικά με την κίνηση Brown ότι είναι μία συνάρτηση η οποία έχει φραγμένη τετραγωνική μεταβολή αλλά μη φραγμένη μεταβολή. Συνεπώς το ολοκλήρωμα Stieltjes δεν μπορεί να οριστεί αν ο ολοκληρωτής είναι η κίνηση Brown και χρειάζεται μία γενίκευση της έννοιας του ολοκληρώματος για να ξεπεράσουμε το εμπόδιο αυτό. Το σημαντικό βήμα στην επίλυση του προβλήματος αυτού είναι να αντιληφθούμε ότι αρκεί να λάβουμε το όριο $n \rightarrow \infty$ στην L^2 έννοια και όχι σημειακά (για κάθε ω). Η αλλαγή αυτή στην έννοια του ορίου είναι και η ειδοποιός διαφορά του ολοκληρώματος του Ιτô.

4.8 Γενικεύσεις του ολοκληρώματος του Ιτô

Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με μερικές γενικεύσεις του στοχαστικού ολοκληρώματος.

4.8.1 Ολοκλήρωση επάνω σε διαδικασίες Itô

Όπως αναφέραμε και προηγουμένως μπορεί να οριστούν στοχαστικά ολοκληρώματα και ως προς πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες. Το θέμα αυτό παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον αλλά δυστυχώς δεν μπορούμε να το διαπραγματευτούμε εδώ. Θα αρκεστούμε στο να ορίσουμε την ολοκλήρωση επάνω σε διαδικασίες του Itô.

Ας θεωρήσουμε λοιπόν ότι X_t είναι μία διαδικασία Itô (πιθανόν N -διάστατη) της μορφής

$$dX_t = udt + vdB_t$$

Τότε μπορούμε να ορίσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα του γ ως προς τη X_t ως εξής

$$\int_0^t \gamma dX_t = \int_0^t \gamma u ds + \int_0^t \gamma v dB_s$$

ή σε διαφορική μορφή

$$\gamma dX_t = \gamma u dt + \gamma v dB_t$$

Φυσικά πρέπει να είμαστε προσεκτικοί να ορίσουμε το γ στην κλάση των συναρτήσεων που είναι τέτοιες ώστε οι γu και γv να ικανοποιούν τις συνθήκες που χρειάζονται ώστε αυτή η νέα διαδικασία να είναι ένα ολοκλήρωμα Itô δηλαδή πρέπει να έχουμε

$$\int_0^t |\gamma u| ds < \infty \quad \sigma.β. \quad \int_0^t |\gamma v|^2 ds < \infty \quad \sigma.β.$$

4.8.2 Το ολοκλήρωμα του Stratonovich

Στον ορισμό του ολοκληρώματος του Itô χρησιμοποιήσαμε την σύμβαση ότι

$$\int_0^t h(t, B_t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} h(t_i, B_{t_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

όπου $\{t_i\}$ είναι μία διαμέριση του $[0, t]$ και το όριο λαμβάνεται στον L^2 .

Μία γενίκευση θα είναι η ακόλουθη:

$$\int_0^t h(t, B_t) dB_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} h(\bar{t}_i, B_{\bar{t}_i})(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

όπου $\{t_i\}$ είναι μία διαμέριση του $[0, t]$, $\bar{t}_i \in (t_i, t_{i+1})$ και το όριο λαμβάνεται στον L^2 . Αν το ολοκλήρωμα ορίζονταν σύμφωνα με την κλασική έννοια κατά Stieltjes το όριο θα ήταν ανεξάρτητο από την επιλογή του \bar{t}_i όπως γνωρίζουμε από την κλασική ανάλυση. Λόγω όμως της ιδιαιτερότητας του ολοκληρωτή στην περίπτωση αυτή το αποτέλεσμα εξαρτάται από την επιλογή του \bar{t}_i . Μία επιλογή όπως είδαμε είναι η επιλογή $\bar{t}_i = t_i$ η οποία και οδηγεί στο ολοκλήρωμα του Itô. Μία άλλη επιλογή είναι η $\bar{t}_i = \frac{t_i + t_{i+1}}{2}$ ⁹. Αν λοιπόν ορίσουμε

$$\int_0^t h(t, B_t) \circ dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} h\left(\frac{t_i + t_{i+1}}{2}, B_{\frac{t_i + t_{i+1}}{2}}\right) (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

όπου και πάλι το όριο λαμβάνεται στον L^2 , τότε θα πάρουμε ένα νέο στοχαστικό ολοκλήρωμα το οποίο προτάθηκε από τον Ρώσο μηχανικό Stratonovich το 1964. Το ολοκλήρωμα κατά Stratonovich μίας στοχαστικής διαδικασίας επάνω στην κίνηση Brown δεν είναι ίσο αναγκαστικά με το ολοκλήρωμα Itô της ίδιας στοχαστικής διαδικασίας επάνω στην κίνηση Brown! Τα δύο ολοκληρώματα έχουν διαφορετικές ιδιότητες αλλά με κατάλληλη αλλαγή της υπό ολοκλήρωση ποσότητας ένα ολοκλήρωμα Stratonovich μπορεί να μετατραπεί σε ένα ολοκλήρωμα Itô και αντίστροφα. Τονίζεται ότι ενώ η στοχαστική διαδικασία $\int_0^t h(t, \omega) dB_t$ είναι martingale η $\int_0^t h(t, \omega) \circ dB_t$ δεν είναι.

⁹ Αυτή η επιλογή είναι το ανάλογο του κανόνα του μέσου σημείου (midpoint rule) ο οποίος και χρησιμοποιείται αρκετά συχνά στην αριθμητική ανάλυση για τον υπολογισμό ολοκληρωμάτων

Παράδειγμα 4.8.1. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα Stratonovich της $h(t, \omega) = B_t$ επάνω στην κίνηση Brown και να δείξουμε ότι είναι ίσο με

$$\int_0^t B_t \circ dB_t := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} B_{\frac{t_i+t_{i+1}}{2}} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = \frac{B_t^2}{2}$$

Το αποτέλεσμα δεν είναι martingale.

Το ολοκλήρωμα Stratonovich δεν χρησιμοποιείται συχνά σε χρηματοοικονομικές εφαρμογές. Χρησιμοποιείται όμως αρκετά στις φυσικές επιστήμες ή στην μελέτη στοχαστικών διαδικασιών επάνω σε πολλαπλότητες.

4.8.3 Ολοκλήρωση επάνω σε martingales

Μία εύλογη γενίκευση του ολοκληρώματος του Ιτό είναι όταν ο ολοκληρωτής είναι μία γενικότερη martingale ή ακόμη και μία semimartingale αντί για την κίνηση Brown. Μία περίπτωση όπου είδαμε κάτι τέτοιο μέχρι τώρα ήταν όταν συζητήσαμε το θέμα του ολοκληρώματος επάνω σε μία γενικότερη διαδικασία Ιτό.

Θα ξεκινήσουμε με τον γενικό ορισμό του στοχαστικού ολοκληρώματος.

Ορισμός 4.8.1. Έστω X_t μία στοχαστική διαδικασία η οποία είναι δεξιά συνεχής και έχει αριστερό όριο σε κάθε σημείο¹⁰ και M_t μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (L^2) martingale. Το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t X_s dM_s$ ορίζεται ως

$$\int_0^t X_s dM_s := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})$$

όπου το όριο λαμβάνεται στον L^2 . Το $\{t_i\}$, $i = 0, \dots, n$ είναι μία διαμέριση του $[0, t]$ για την οποία ισχύει $|\Delta t| := \sup_n |t_{i+1} - t_i| = 0$ καθώς $n \rightarrow \infty$.

Σχόλιο: Κάτω από ορισμένες περιπτώσεις μπορεί να αποδειχθεί ότι το όριο υπάρχει και υπό την έννοια της πιθανότητας και όχι μόνο κατά την L^2 έννοια.

Οι περισσότερες από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος του Ιτό μπορούν να γενικευθούν για το ολοκλήρωμα επάνω σε μία γενικότερη martingale. Για παράδειγμα μπορεί να αποδειχθεί το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 4.8.1. Έστω ότι η M_t είναι μία τετραγωνικά ολοκληρώσιμη martingale τέτοια ώστε

$$E \left[\int_0^t X_s^2 d \langle M \rangle_s \right] < \infty$$

όπου $\langle M \rangle_t$ η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της M . Ισχύει ότι

$$E \left[\left(\int_0^t X_s dM_s \right)^2 \right] = E \left[\int_0^t X_s^2 d \langle M \rangle_s \right]$$

Σχόλιο: Το παραπάνω θεώρημα αποτελεί γενίκευση της ισομετρίας του Ιτό. Πράγματι αν $M_t = B_t$ τότε $\langle M \rangle_t = \langle B \rangle_t = t$ και ξαναπαίρνουμε το γνωστό αποτέλεσμα.

Σε πλήρη αναλογία έχουμε και την γενίκευση του λήμματος του Ιτό

Θεώρημα 4.8.2. Έστω $f(t, x)$ μία $C^{1,2}$ συνάρτηση και M_t μία συνεχής martingale. Τότε ισχύει

$$\begin{aligned} f(t, M_t) &= f(0, M_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, M_s) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, M_s) dM_s \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, M_s) d \langle M \rangle_s \end{aligned}$$

¹⁰Τέτοιες στοχαστικές διαδικασίες ονομάζονται στην διεθνή βιβλιογραφία cadlag

Ο ορισμός του στοχαστικού ολοκληρώματος και τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και όταν η M_t είναι μία semi-martingale αντί για μία martingale. Στην περίπτωση αυτή το ανάλογο με ότι είπαμε προηγουμένως είναι το ολοκλήρωμα επάνω σε μία γενικότερη διαδικασία Itô. Επίσης, τα παραπάνω γενικεύονται και για πολυδιάστατες semi-martingales με κατάλληλες αλλαγές. Τέλος σημειώνουμε ότι αν η M_t είναι martingale τότε κάτω από ορισμένες συνθήκες και το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t X(s)dM_s$ είναι και αυτό martingale.

Η γενική θεωρία της ολοκλήρωσης επάνω σε semimartingales είναι εξαιρετικά ενδιαφέροντα και χρήσιμη. Έχει δε σημαντικές εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά. Εδώ αρκεστήκαμε να θίξουμε χωρίς απόδειξη ορισμένα μόνο κεντρικά σημεία. Για μία πιο πλήρη περιγραφή της θεωρίας αυτής μπορείτε να συμβουλευτείτε π.χ. το [30].

4.9 Παράρτημα: Απόδειξεις θεωρημάτων

4.9.1 Απόδειξη της πληρότητας του L^2

Ο χώρος L^2 είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος δηλαδή κάθε ακολουθία Cauchy στον L^2 συγκλίνει σε ένα στοιχείο του L^2 . Η ιδιότητα αυτή είναι μία γενικότερη ιδιότητα των χώρων L^p , $p > 0$. Θα δείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 4.9.1. Έστω f_n μία ακολουθία Cauchy στον L^p , $p > 0$. Τότε,

$$\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty$$

για κάποιο $f \in L^p$.

Απόδειξη: Θεωρούμε μία υπάκολουθία $\{n_k\} \subset \mathbb{N}$ για την οποία ισχύει

$$\sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p}^{p \wedge 1} < \infty.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Minkowski σύμφωνα με την οποία

$$\|f + g\|_{L^p}^{p \wedge 1} \leq \|f\|_{L^p}^{p \wedge 1} + \|g\|_{L^p}^{p \wedge 1}, \quad p > 0$$

Κάνοντας χρήση της ανισότητας μπορούμε να δούμε ότι

$$\left\| \sum_k |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| \right\|_{L^p}^{p \wedge 1} \leq \sum_k \|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|_{L^p}^{p \wedge 1} < \infty$$

Αυτό μας δείχνει ότι $\sum_k |f_{n_{k+1}} - f_{n_k}| < \infty$ σχεδόν παντού, οπότε και η ακολουθία f_{n_k} είναι Cauchy σχεδόν παντού στο \mathbb{R} και συνεπώς συγκλίνει σχεδόν παντού σε κάποια μετρήσιμη συνάρτηση. Ας ονομάσουμε f το όριο της υπακολουθίας f_{n_k} , δηλαδή $f_{n_k} \rightarrow f$. Κάνοντας χρήση του λήμματος του Fatou μπορούμε να δείξουμε ότι $\|f - f_n\|_{L^p} \rightarrow 0$. Πράγματι,

$$\|f - f_n\|_{L^p} = \liminf_{n \rightarrow \infty} \|f_{n_k} - f_n\|_{L^p} \leq \sup_{m \geq n} \|f_m - f_n\|_{L^p} \rightarrow 0$$

καθώς $n \rightarrow \infty$ λόγω του ότι η ακολουθία f_n είναι Cauchy στον L^p . Συνεπώς, $f_n \rightarrow f$ στον L^p . □

Η πληρότητα του χώρου $M^2([a, b])$ μπορεί να αποδειχθεί με παρόμοιο τρόπο.

4.9.2 Απόδειξη της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την ανισότητα Burkholder-Davis-Gundy. Για διευκόλυνση των αναγνωστών ξαναδίνουμε την εκφώνηση του θεωρήματος 4.2.2

Θεώρημα 4.2.2 Ανισότητα Burkholder-Davis-Gundy Έστω $f \in M^2([0, T])$. Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$X_t = \int_0^t f(r)dB_r$$

Τότε για κάθε $p > 0$ υπάρχουν σταθερές c_p και C_p που εξαρτώνται μόνο από το p τέτοιες ώστε

$$c_p E \left[\left| \int_0^t |f(r)|^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \right] \leq E \left[\sup_{0 \leq s \leq t} \left| \int_0^s f(r)dB_r \right|^p \right] \leq C_p E \left[\left| \int_0^t |f(r)|^2 dr \right|^{\frac{p}{2}} \right]$$

για κάθε $t \geq 0$.

Απόδειξη: Η απόδειξη είναι τεχνική και έτσι σκιαγραφούμε τα βασικότερα της σημεία και αφήνουμε στον αναγνώστη τις λεπτομέρειες εφόσον ενδιαφέρεται. Για την πλήρη απόδειξη παραπέμπουμε στο [24].

Θα μελετήσουμε δύο περιπτώσεις ξεχωριστά, την περίπτωση $p = 2$ και την περίπτωση $p \neq 2$.

Στην περίπτωση $p = 2$ δεδομένου ότι η I_t είναι μία martingale μπορούμε να καταλήξουμε στο αποτέλεσμα κάνοντας χρήση της ανισότητας του Doob για την martingale I_t .

Ας θεωρήσουμε τώρα ότι $p \geq 2$. Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία $|I_t|^p$ και ας εφαρμόσουμε τον τύπο του Itô σε αυτή. Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}
 E[|I_t|^p] &\leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_0^t |I_s|^{p-2} |g(s)|^2 ds\right] \\
 &\leq \frac{p(p-1)}{2} E\left[\int_0^t |I_s|^{p-2} |g(s)|^2 ds\right] \\
 &\leq \frac{p(p-1)}{2} E[|I^*(t)|^{p-2} \int_0^t |g(s)|^2 ds] \\
 &= \frac{p(p-1)}{2} E[|I^*(t)|^{p-2} A(t)] \\
 &\quad (\text{χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder}) \\
 (4.-123) \quad &\leq \frac{p(p-1)}{2} \{E[|I^*(t)|^p]\}^{\frac{p-2}{p}} \{E[|A(t)|^{\frac{p}{2}}]\}^{\frac{2}{p}}
 \end{aligned}$$

Αλλά, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος βλέπουμε ότι η I_t είναι μία martingale συνεπώς μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα martingale του Doob για να καταλήξουμε ότι

$$E[|I^*(t)|^p] \leq CE[|I_t|^p]$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (4.-123) καταλήγουμε στο

$$E[|I^*(t)|^p] \leq C' E[|A(t)|^{\frac{p}{2}}]$$

που είναι και το δεξιό μέλος της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy.

Για την απόδειξη του αριστερού μέλους της ανισότητας θα ορίσουμε την διαδικασία Itô

$$y(t) = \int_0^t |A(s)|^{\frac{p-2}{4}} g(s) dB_s$$

Χρησιμοποιώντας την ισομετρία του Itô μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned}
 E[|y(t)|^2] &= E\left[\int_0^t |A(s)|^{\frac{p-2}{2}} |g(s)|^2 ds\right] = E\left[\int_0^t |A(s)|^{\frac{p-2}{2}} dA(s)\right] \\
 (4.-126) \quad &= \frac{2}{p} E[|A(t)|^{\frac{p}{2}}]
 \end{aligned}$$

Από την άλλη, χρησιμοποιώντας τον τύπο για ολοκλήρωση κατά μέρη μπορούμε να καταλήξουμε στο

$$\begin{aligned}
 I_t |A(t)|^{\frac{p-2}{4}} &= \int_0^t |A(s)|^{\frac{p-2}{4}} dI_s + \int_0^t I_s d[|A(s)|^{\frac{p-2}{4}}] \\
 &= y(t) + \int_0^t I_s d[|A(s)|^{\frac{p-2}{4}}]
 \end{aligned}$$

από όπου καταλήγουμε εύκολα κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας και απλών ανισοτήτων για τα ολοκληρώματα ότι

$$|y(t)| \leq |x(t)| |A(t)|^{\frac{p-2}{4}} + \int_0^t |I_s| d[|A(s)|^{\frac{p-2}{4}}] \leq 2I^*(t) |A(t)|^{\frac{p-2}{4}}$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα αυτό στην (4.-126) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{2}{p} E[|A(t)|^{\frac{p}{2}}] &\leq 4E[|I_t^*|^2 |A(t)|^{\frac{p-2}{2}}] \\ (\text{χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder}) \\ &\leq 4\{E[|I^*(t)|^p]\}^{\frac{2}{p}} \{E[|A(t)|^{\frac{p}{2}}]\}^{\frac{p-2}{p}} \end{aligned}$$

από όπου καταλήγουμε στη σχέση

$$c_p E[|A(t)|^{\frac{p}{2}}] \leq E[|I_t^*|^p]$$

που είναι και το δεξιό μέλος της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy.

Στην περίπτωση $0 < p < 2$ θα ορίσουμε την martingale

$$M_t = \int_0^t [\epsilon + A(s)]^{\frac{p-2}{4}} g(s) dB_s$$

με την οποία θα εργαστούμε ανάλογα με τα βήματα της παραπάνω περίπτωσης και στο τέλος θα πάρουμε το όριο $\epsilon \rightarrow 0$. Αυτό θα μας δώσει το δεξιό μέλος της ανισότητας Burkholder-Davis-Gundy στην περίπτωση αυτή. Για το αριστερό μέλος θα γράψουμε το $|A(t)|^{\frac{p}{2}}$ με την μορφή

$$|A(t)|^{\frac{p}{2}} = \{|A(t)|^{\frac{p}{2}} [\epsilon + I_t^*]^{-\frac{p(2-p)}{2}}\} [\epsilon + I_t^*]^{\frac{p(2-p)}{2}}$$

και θα εργαστούμε με την ποσότητα αυτή όπως και στην παραπάνω περίπτωση κάνοντας χρήση της ανισότητας του Hölder. Οι λεπτομέρειες αφήνονται στον αναγνώστη. \square .

4.9.3 Απόδειξη της εκθετικής ανισότητας

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε την εκθετική ανισότητα για το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για διευκόλυνση των αναγνώστων παραθέτουμε ξανά την εκφώνηση του θεωρήματος 4.2.3.

Θεώρημα 4.2.3 Έστω $g \in L^2$ και έστω T, a, b θετικοί αριθμοί. Τότε ισχύει

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \left[\int_0^t g(s) dB_s - \frac{a}{2} \int_0^t |g(s)|^2 ds \right] > b\right) \leq e^{-ab}$$

Απόδειξη: Ας ορίσουμε την ακολουθία χρόνων στάσης

$$\tau_n = \inf \left\{ t \geq 0 : \left| \int_0^t g(s) dB_s \right| + \int_0^t |g(s)|^2 ds \geq n \right\}$$

Ας ορίσουμε επίσης την στοχαστική διαδικασία

$$x_n(t) = a \int_0^t g(s) \mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(s) dB_s - \frac{a^2}{2} \int_0^t |g(s)|^2 ds \mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(s) ds$$

η οποία είναι φραγμένη. Εφαρμόζουμε τώρα τον τύπο του Itô στην στοχαστική διαδικασία $\exp(x_n(t))$. Μετά από λίγο άλγεβρα (που αφήνεται σαν άσκηση) καταλήγουμε ότι

$$\exp(x_n(t)) = 1 + a \int_0^t \exp(x_n(s)) g(s) \mathbf{1}_{[0, \tau_n]}(s) ds$$

από το οποίο και μπορούμε να δούμε ότι η $\exp(x_n(t))$ είναι μία martingale η οποία είναι μη αρνητική και έχει μέση τιμή ίση με την μονάδα. Κάνοντας χρήση λοιπόν των ανισοτήτων martingale για την $\exp(x_n(t))$ μπορούμε να δούμε ότι

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} \exp(x_n(t)) \geq e^{ab}\right) \leq e^{-ab} E[\exp(x_n(T))] = e^{-ab}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της εκθετικής συνάρτησης παίρνουμε από το παραπάνω ότι

$$P\left(\sup_{0 \leq t \leq T} x_n(t) \geq ab\right) \leq e^{-ab}$$

απ' όπου παίρνοντας το όριο $n \rightarrow \infty$ και λαμβάνοντας υπόψη ότι $\tau_n \rightarrow \infty$ μονότονα καταλήγουμε στο επιθυμητό αποτέλεσμα. \square

4.9.4 Απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης των martingale

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το θεώρημα αναπαράστασης των martingale. Πριν προχωρήσουμε με την απόδειξη θα κάνουμε την παρακάτω παρατήρηση.

Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$M_t = \exp \left[\int_0^t f(t) dB_t - \frac{1}{2} \int_0^t |f(t)|^2 dt \right]$$

όπου $f \in L^2([0, T])$. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Itô μπορούμε να δείξουμε ότι $dM_t = M_t dB_t$ ή ισοδύναμα σε ολοκληρωτική μορφή ότι $M_t = M_0 + \int_0^t M_s dB_s$ οπότε η M_t είναι μία martingale. Για την ειδική κλάση των martingale αυτών λοιπόν μπορούμε να δούμε ότι μπορούν να γραφούν σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα κάποιας στοχαστικής διαδικασίας (τον εαυτό τους αλλά ας το παραβλέψουμε αυτό προς το παρόν). Το ερώτημα είναι αν αυτό μπορούμε να αποδείξουμε ότι ισχύει για οποιαδήποτε martingale η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη. Η απάντηση είναι θετική και μάλιστα στην γενική περίπτωση η υπό ολοκλήρωση ποσότητα δεν θα είναι απαραίτητα η ίδια η martingale την οποία θέλουμε να αναπαραστήσουμε με το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για την γενική απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι μία οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή μπορεί να αναπαρασταθεί σαν μία ακολουθία απο εκθετικά διαδικασιών Itô κάποιας ειδικής μορφής. Αυτό είναι και η ουσία του παρακάτω λήμματος.

Λήμμα 4.9.1. *Ο γραμμικός διανυσματικός χώρος (linear span) που παράγεται από τυχαίες μεταβλητές της μορφής $\exp \left\{ \int_0^T h(t) dB_t - \int_0^T |h(t)|^2 dt \right\}$ όπου $h \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{1 \times m})$ ντετερμινιστική συνάρτηση είναι πυκνός¹¹ στον $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. Με τον συμβολισμό $h \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{1 \times m})$ εννοούμε ότι η $h : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^{1 \times m}$ είναι μία συνάρτηση μετρήσιμη κατά Borel τέτοια ώστε $\int_0^T |h(t)|^2 dt < \infty$, σ.β.. Ο χώρος $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ αποτελείται από τις τυχαίες μεταβλητές X οι οποίες είναι \mathcal{F}_t μετρήσιμες και για τις οποίες ισχύει $E[|X|^2] < \infty$.*

Απόδειξη: Για την απόδειξη του λήμματος αυτού, θα χρειαστούμε πρώτα να δείξουμε ότι το σύνολο των τυχαίων μεταβλητών $\{\phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})\}$ όπου $t_i \in [0, T]$ και $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{m \times n}, \mathbb{R})$, $n = 1, 2, \dots$ είναι πυκνό στο $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. Με $C_0^\infty(\mathbb{R}^{m \times n}; \mathbb{R})$ συμβολίζουμε το σύνολο των συναρτήσεων οι οποίες είναι απείρως παραγωγίσιμες και με συμπαγές στήριγμα (compact support) από το $\mathbb{R}^{m \times n}$ στο \mathbb{R} . Αφού αποδειχθεί αυτό για την απόδειξη του λήμματος αρκεί να δείξουμε ότι αν κάποια τυχαία μεταβλητή $g \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ είναι ορθογώνια σε όλες τις τυχαίες μεταβλητές της μορφής $f = \exp \left\{ \int_0^T h(t) dB_t - \int_0^T |h(t)|^2 dt \right\}$ με ντετερμινιστικό h , υπό την έννοια ότι $E[fg] = 0$, τότε $g = 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θα περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $m = 1$.

Ας δείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό: Ας πάρουμε μία ακολουθία t_i τέτοια ώστε $t_i \in [0, T]$. Ας πάρουμε την σ-άλγεβρα που παράγεται από τα B_{t_1}, \dots, B_{t_n} την οποία ας συμβολίσουμε $\mathcal{G}_n = \sigma(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$. Μπορούμε να δούμε ότι $\mathcal{G}_n \subset \mathcal{G}_{n+1}$ δηλαδή η \mathcal{G}_n αποτελεί μία διήθηση και ότι αν \mathcal{F}_t είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την κίνηση Brown (επαυξημένη με τα σύνολα μέτρου 0 ως προς το μέτρο P) τότε $\mathcal{F}_T = \sigma(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{G}_n)$. Για το τελευταίο αρκεί να σκεφτείτε ότι τα $t_i \in [0, T]$ συνεπώς για πολύ μεγάλες τιμές του i η ακολουθία $\{t_i\}$ αναγκαστικά θα καλύπτει το διάστημα $[0, T]$. Αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε $g \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ μπορούμε να ορίσουμε την ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη martingale $X_n := E[g | \mathcal{G}_n]$. Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε χρήση του θεωρήματος σύγκλισης των martingale και να δείξουμε ότι $X_n := E[g | \mathcal{G}_n] \rightarrow E[g | \mathcal{F}_T]$ καθώς $n \rightarrow \infty$. Η τυχαία μεταβλητή X_n είναι \mathcal{G}_n -μετρήσιμη, συνεπώς κάνοντας χρήση του λήμματος των Doob-Dynkin (βλ. θεώρημα ;) μπορεί να γραφεί για κάθε n ως $X_n = g_n(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ για κάποια συνάρτηση Borel $g_n : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Επειδή, κάθε τέτοια συνάρτηση g_n μπορεί να προσεγγιστεί στον $L^2_{\mathcal{F}_T}$ από συναρτήσεις $\phi_n(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ όπου $\phi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Για την απόδειξη του ισχυρισμού του λήμματος ας θεωρήσουμε ότι η g είναι ορθογώνια σε κάθε τυχαία μεταβλητή f της μορφής

$$f = \exp \left\{ \int_0^T h(t) dB_t - \int_0^T |h(t)|^2 dt \right\}$$

δηλαδή $E[fg] = 0$. Κάνοντας την επιλογή $h(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}$ όπου $\lambda_i \in \mathbb{R}$ οποιοδήποτε ντετερμινιστικοί αριθμοί, μπορούμε να δούμε ότι η ορθογωνιότητα δίνει ισοδύναμα ότι

$$E[\exp \{ \lambda_1 B_{t_1} + \dots + \lambda_n B_{t_n} \} g] = \int \exp \{ \lambda_1 B_{t_1} + \dots + \lambda_n B_{t_n} \} g dP = 0$$

¹¹Με αυτό εννοούμε ότι κάθε στοιχείο f του $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία της μορφής $f_n = \sum_{i=1}^n a_n \exp \left\{ \int_0^T h_n(t) dB_t - \int_0^T |h_n(t)|^2 dt \right\}$ όπου $h_n \in L^2([0, T], \mathbb{R}^{1 \times m})$ ντετερμινιστική συνάρτηση.

Από την ισότητα αυτή μπορούμε να αποδείξουμε ότι $g = 0$. Για να γίνει αυτό χρειαζόμαστε ορισμένες τεχνικές από την μιγαδική ανάλυση τις οποίες θα σακαγραφήσουμε εδώ χωρίς απόδειξη. Ορίζουμε την συνάρτηση

$$G(\lambda) := E[\exp\{\lambda_1 B_{t_1} + \dots + \lambda_n B_{t_n}\} g]$$

η οποία είναι πραγματική και αναλυτική στο $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. Συμφωνα με την θεωρία της αναλυτικής επέκτασης η G θα έχει μία αναλυτική επέκταση στο μιγαδικό επίπεδο $\lambda \in \mathbb{C}^n$ την οποία θα συμβολίζουμε G^* . Για την αναλυτική επέκταση G^* θα ισχύει $G^* = 0$ στο \mathbb{C}^n εφόσον η $G = 0$ στο \mathbb{R}^n και είναι και αναλυτική. Συνεπώς

$$G^*(z) := E[\exp\{z_1 B_{t_1} + \dots + z_n B_{t_n}\} g] = 0$$

για κάθε $z = (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$ και κάθε $t_1, \dots, t_n \in [0, T]$. Αν επιλέξουμε $z = (i\lambda_1, \dots, i\lambda_n)$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ τότε έχουμε ότι $G(i\lambda_1, \dots, i\lambda_n) = 0$.

Εστω τώρα $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τότε θα δείξουμε ότι $E[\phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})g] = 0$. Πράγματι, εφόσον $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ μπορούμε να δώσουμε μία ολοκληρωτική έκφραση για την $\phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ κάνοντας χρήση του μετασχηματισμού Fourier $\hat{\phi}$ της ϕ δηλαδή ότι

$$\phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\lambda_1 B_{t_1} + \dots + i\lambda_n B_{t_n}) \hat{\phi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} E[\phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})g] &= \int_{\Omega} \phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) g dP \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\Omega} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\lambda_1 B_{t_1} + \dots + i\lambda_n B_{t_n}) \hat{\phi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n \right\} g dP = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \left\{ \int_{\Omega} \exp(i\lambda_1 B_{t_1} + \dots + i\lambda_n B_{t_n}) g dP \right\} d\lambda_1 \dots d\lambda_n = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{\phi}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) G(i\lambda_1, \dots, i\lambda_n) d\lambda_1 \dots d\lambda_n = 0 \end{aligned}$$

εφόσον $G(i\lambda_1, \dots, i\lambda_n) = 0$ για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$.

Έχουμε λοιπόν ότι $E[\phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})g] = 0$ για οποιαδήποτε $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Όμως δείξαμε στην αρχή ότι οι συναρτήσεις της μορφής $\phi(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ για $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνές στο $L^2_{\mathcal{F}_T}$. Εφόσον η g είναι ορθογώνια σε ένα πυκνό υποσύνολο του $L^2_{\mathcal{F}_T}([0, T])$ έχουμε ότι $g = 0$.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι αν κάποια τυχαία μεταβλητή $g \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$ είναι ορθογώνια σε όλες τις τυχαίες μεταβλητές της μορφής

$$f = \exp \left\{ \int_0^T h(t) dB_t - \int_0^T |h(t)|^2 dt \right\}$$

με ντετερμινιστικό h , υπό την έννοια ότι $E[fg] = 0$ τότε $g = 0$. Αυτό είναι επαρκές για να διαπιστώσουμε το ότι οι τυχαίες μεταβλητές f είναι πυκνές στο $L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. Για την γενικότερη περίπτωση όπου $m \neq 1$ παραπέμπουμε στο [24]. \square

Λήμμα 4.9.2. Για κάθε τυχαία μεταβλητή $\xi \in L^2_{\mathcal{F}_T}(\Omega; \mathbb{R})$ υπάρχει μία στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([0, T], \mathbb{R}^{1 \times m})$ τέτοια ώστε

$$\xi = E[\xi] + \int_0^T f(s) dB_s$$

όπου $B_t = (B_{1,t}, \dots, B_{m,t})$ είναι μία m -διάστατη κίνηση Brown. Η στοχαστική διαδικασία f είναι μοναδική υπό την έννοια ότι αν υπάρχει ακόμα μία στοχαστική διαδικασία g για την οποία ισχύει το παραπάνω αποτέλεσμα τότε έχουμε ότι

$$E \left[\int_0^T |f(s) - g(s)|^2 ds \right] = 0$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι η ξ έχει την ειδική μορφή

$$\xi = \exp \left\{ \int_0^T h(t) dB_t - \int_0^T |h(t)| dt \right\}.$$

Ορίζοντας την στοχαστική διαδικασία

$$x(t) = \exp \left\{ \int_0^t h(s) dB_s - \int_0^t |h(s)| ds \right\}$$

και κάνοντας χρήση του λήμματος του Itô μπορούμε να δούμε ότι $dx(t) = h(t)x(t)dB_t$. Ολοκληρώνοντας από 0 έως T παίρνουμε ότι

$$x_T = \xi = 1 + \int_0^T h(t)x(t)dB_t = E[\xi] + \int_0^T h(t)x(t)dB_t$$

Συνεπώς για τυχαίες μεταβλητές της ειδικής μορφής που θεωρήσαμε πιο πάνω ο ισχυρισμός του λήμματος ισχύει με την επιλογή $f(t) = h(t)x(t)$. Λόγω της γραμμικότητας του στοχαστικού ολοκληρώματος ο ισχυρισμός του λήμματος ισχύει και αν η τυχαία μεταβλητή ξ είναι ένας γραμμικός συνδυασμός εκθετικών τυχαίων μεταβλητών της παραπάνω μορφής. Δειξαμε όμως στο λήμμα 4.9.1 ότι το σύνολο αυτών των τυχαίων μεταβλητών είναι πυκνό στο $L_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$. Άρα ο ισχυρισμός ισχύει για κάθε τυχαία μεταβλητή $\xi \in L_{\mathcal{F}_T}(\Omega, \mathbb{R})$.

Η μοναδικότητα του f προκύπτει από απλή χρήση της ισομετρίας του Itô και αφήνεται σαν άσκηση. \square

Σχόλιο: Ο προσδιορισμός της στοχαστικής διαδικασίας f δεν είναι πάντοτε εύκολη υπόθεση. Μία γενική απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται με την χρήση του λογισμού κατά Malliavin αλλά κάτι τέτοιο είναι εκτός των πλαισίων του παρόντος.

Μπορούμε τώρα προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης των martingale. Για διευκόλυνση των αναγνωστών διατυπώνουμε εκ νέου το θεώρημα.

Θεώρημα 4.6.1 Θεωρημα αναπαράστασης των martingale Έστω M_t μία συνεχής τοπική martingale (πιθανόν πολυδιάστατη) η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση $\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \leq t)$, όπου B_t μία κίνηση Brown (πιθανόν πολυδιάστατη). Τότε υπάρχει διαδικασία θ_t η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, τέτοια ώστε

$$M_t = M_0 + \int_0^t \theta_s dB_s, \quad t \geq 0$$

Η διάσταση της διαδικασίας θ_t εξαρτάται από την διάσταση της κίνησης Brown B_t και θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να έχει νόημα το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα αν η M_t παίρνει τιμές στον \mathbb{R}^d και η B_t παίρνει τιμές στον \mathbb{R}^m , τότε η θ παίρνει τιμές στο $\mathbb{R}^{d \times m}$ και πρέπει να ανήκει στον χώρο $M^2([0, T]; \mathbb{R}^{d \times m})$.

Απόδειξη: Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε την M_t μονοδιάστατη, δηλαδή ότι $d = 1$. Ας εφαρμόσουμε το λήμμα 4.9.2 στην τυχαία μεταβλητή $\xi = M(T)$. Υπάρχει λοιπόν στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([0, T], \mathbb{R}^{1 \times m})$ τέτοια ώστε

$$M_T = E[M_T] + \int_0^T f(s) dB_s = M_0 + \int_0^T f(s) dB_s$$

(θεωρούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι M_0 είναι ντετερμινιστικό). Κάνοντας χρήση της ιδιότητας martingale για την M_t έχουμε ότι

$$M_t = E[M_T | \mathcal{F}_t] = E[M_0 + \int_0^T f(s) dB_s | \mathcal{F}_t] = M_0 + \int_0^t f(s) dB_s$$

(όπου επίσης κάναμε χρήση και των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος). Συνεπώς αποδείχθηκε το ζητούμενο. \square

4.10 Βασικά σημεία του κεφαλαίου.

Στο κεφάλαιο αυτό ορίσαμε την έννοια του στοχαστικού ολοκληρώματος το οποίο είναι μία στοχαστική διαδικασία που μπορούμε να πάρουμε ολοκληρώνοντας μία τυχαία συνάρτηση επάνω στην κίνηση Brown. Δώσαμε τις βασικές ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος κατά Itô και το χρησιμοποιήσαμε για τον ορισμό ενός νέου είδους στοχαστικών διαδικασιών, των διαδικασιών Itô. Δείξαμε επίσης ότι ο μετασχηματισμός μίας διαδικασίας Itô μέσω μίας μη γραμμικής συνάρτησης είναι επίσης μία διαδικασία Itô η ακριβής μορφή της οποίας δίνεται από τον τύπο του Itô. Οι διαδικασίες του Itô και του τύπου του Itô έχουν πολλές εφαρμογές στα οικονομικά και συγκεκριμένα στην θεωρία των παραγώγων συμβολαίων.

Τα βασικά σημεία που θα πρέπει να θυμόμαστε είναι

- Τον ορισμό του ολοκληρώματος του Itô επάνω στην κίνηση Brown και τις ιδιότητες του. Να θυμάστε ότι το ολοκλήρωμα του Itô επάνω στην κίνηση Brown είναι μία martingale. Το ολοκλήρωμα του Itô μπορεί να γενικευθεί και σε περιπτώσεις που η ολοκλήρωση γίνεται επάνω σε πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες.
- Το ορισμό των διαδικασιών Itô. Μία διαδικασία Itô περιλαμβάνει μία ταχύτητα και μία διακύμανση (διάχυση).
- Τον τύπο του Itô που μας δίνει το πως μετασχηματίζεται μία διαδικασία Itô κάτω από έναν μη γραμμικό μετασχηματισμό.
 - ◇ Ο τύπος του Itô μπορεί να θεωρηθεί η βάση για οποιαδήποτε μελέτη στην στοχαστική ανάλυση ή την χρηματοοικονομική.
 - ◇ Ισχύει για συναρτήσεις οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες στην στοχαστική διαδικασία και μία στον χρόνο. Υπάρχουν όμως και γενικεύσεις του κάτω από πιο ασθενείς περιορισμούς.
 - ◇ Ισχύει τόσο για ντετερμινιστικούς χρόνους όσο και για τυχαίους χρόνους.
- Το ολοκλήρωμα του Itô μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την αναπαράσταση οποιασδήποτε τετραγωνικά ολοκληρώσιμης τοπικής martingale (Θεώρημα αναπαράστασης των martingale).

Κεφάλαιο 5

Στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις

Στο κεφάλαιο αυτό θα κάνουμε μία εισαγωγή στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Η θεωρία αυτή βρίσκει πολλές εφαρμογές σε διάφορους επιστημονικούς κλάδους, αλλά ίσως μία από τις σημαντικότερες εφαρμογές της είναι στην κατασκευή μοντέλων για τα χρηματοοικονομικά μαθηματικά.

5.1 Βασικές έννοιες

Θα ξεκινήσουμε με τον ορισμό μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

Ορισμός 5.1.1. Μία στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι μία εξίσωση της μορφής

$$(5.1) \quad dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

ή ισοδύναμα σε ολοκληρωτική μορφή

$$(5.2) \quad X_t = x + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s$$

όπου B_t είναι μία m -διάστατη κίνηση Brown $\sigma : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ και $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ είναι μετρήσιμες πραγματικές συναρτήσεις και $X_t \in \mathbb{R}^n$.

Λέμε ότι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση έχει λύση αν υπάρχει μία διαδικασία Itô X_t η οποία την ικανοποιεί. Τέτοιες λύσεις ονομάζονται **τροχιακές λύσεις (pathwise solutions)**. Μία τέτοια λύση είναι μία semi-martingale. Μία πολύ συναφής έννοια με την τροχιακή λύση είναι και η ισχυρή λύση (strong solution). Στο βιβλίο αυτό θα ακολουθήσουμε την ορολογία ισχυρή λύση αντί για την ορολογία τροχιακή λύση. Οι λύσεις των εξισώσεων αυτών πολλές φορές ονομάζονται και **διαδικασίες διάχυσης**.

Σχόλιο: Στον παραπάνω ορισμό δώσαμε την γενικότερη μορφή μίας διανυσματικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Στον ορισμό χρησιμοποιήσαμε την συμπαγή μορφή της εξίσωσης αυτής που μπορεί να γραφεί και σε μορφή συνιστωσών ως

$$\begin{pmatrix} dX_{1,t} \\ \vdots \\ dX_{n,t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1(t, X_t) \\ \vdots \\ b_n(t, X_t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11}(t, X_t) & \cdots & \sigma_{1m}(t, X_t) \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_{n1}(t, X_t) & \cdots & \sigma_{nm}(t, X_t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dB_{1,t} \\ \vdots \\ dB_{m,t} \end{pmatrix}$$

Στον παραπάνω τύπο m είναι ο αριθμός των κινήσεων Brown που συνεισφέρουν στην εξίσωση και n η διάσταση της στοχαστικής διαδικασίας $X_t = (X_{1,t}, \dots, X_{n,t}) \in \mathbb{R}^n$. Στην ειδική περίπτωση που έχουμε $n = 1$ παίρνουμε μία βαθμωτή στοχαστική διαφορική εξίσωση για την στοχαστική διαδικασία $X_t \in \mathbb{R}$, η οποία εν γένει θα έχει την μορφή

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sum_{k=1}^m \sigma_{ik}(t, X_t)dB_{k,t}$$

όπου τώρα οι b, σ_{ik} είναι πραγματικές συναρτήσεις. Τέλος, η πιο απλή είναι η περίπτωση όπου $n = 1, m = 1$ όπου έχουμε μία βαθμωτή στοχαστική διαφορική εξίσωση η οποία οδηγείται από μία κίνηση Brown.

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια της μοναδικότητας για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Ορισμός 5.1.2. Η λύση της стоχαστικής διαφορικής εξίσωσης (5.1) λέμε πως είναι ισχυρά μοναδική αν για δύο οποιεσδήποτε стоχαστικές διαδικασίες X_t και X'_t οι οποίες ικανοποιούν την (5.1) ισχύει

$$P(X_0 = X'_0) = 1 \implies P(X_t = X'_t, \forall t \geq 0) = 1$$

Κάτω από ορισμένες συνθήκες είναι δυνατό να δείξουμε ότι οι стоχαστικές διαφορικές εξισώσεις έχουν μοναδικές ισχυρές λύσεις. Τέτοιες συνθήκες είναι κατά κύριο λόγο, συνθήκες τύπου Lipschitz στους συντελεστές της εξίσωσης. Παραθέτουμε μία τυπική μορφή των συνθηκών αυτών όπως θα τις οποίες θα χρησιμοποιήσουμε στο βιβλίο αυτό.

ΒΑΣΙΚΗ ΥΠΟΘΕΣΗ ΓΙΑ ΤΑ b ΚΑΙ σ

- **Συνέχεια Lipschitz**

$$|b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K |x - y|, \quad \forall t, x, y$$

- **Συνθήκη γραμμικής αύξησης**

$$|b(t, x)|^2 + |\sigma(t, x)|^2 \leq (1 + |x|^2), \quad \forall t, x, y$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.1.1. Ας θεωρήσουμε την стоχαστική διαφορική εξίσωση (5.1) με συντελεστές σ και b οι οποίες είναι συναρτήσεις¹ που είναι φραγμένες και που ικανοποιούν την βασική υπόθεση. Τότε η стоχαστική διαφορική εξίσωση έχει ισχυρή λύση. Η λύση αυτή είναι μοναδική.

Η απόδειξη του θεωρήματος, ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης του αντιστοίχου θεωρήματος για ντετερμινιστικές διαφορικές εξισώσεις με τις κατάλληλες τροποποιήσεις που είναι απαραίτητες για την стоχαστική περίπτωση. Βασίζεται στην χρήση ενός θεωρήματος σταθερού σημείου σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο χώρο Banach. Μία και οι έννοιες αυτές είναι λίγο προχωρημένες η απόδειξη είναι προαιρετική για τους αναγνώστες με πιο θεωρητικά μαθηματικά ενδιαφέροντα. Για απλότητα παρουσιάζουμε την απόδειξη στην περίπτωση όπου $n = 1$, $m = 1$ αλλά η γενίκευση είναι απλή για οποιεσδήποτε τιμές των m και n . Η απόδειξη είναι κλασσική και παραλλαγές της εμφανίζονται σε διάφορα συγγράμματα (βλ. π.χ. [4]).

Απόδειξη: (*) Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου για ένα τελεστή συστολής σε ένα κατάλληλα επιλεγμένο χώρο Banach. Η λύση της εξίσωσης θα γίνει σύμφωνα με το επαναληπτικό σχήμα

$$X_t^{(i+1)} = x + \int_0^t b(t, X_t^{(i)}) dt + \int_0^t \sigma(t, X_t^{(i)}) dB_t$$

Αυτό είναι ουσιαστικά το стоχαστικό ανάλογο του επαναληπτικού σχήματος του Picard το οποίο χρησιμοποιείται στην επίλυση ντετερμινιστικών διαφορικών εξισώσεων. Αν υπάρχει стоχαστική διαδικασία για την οποία $X_t^{(i+1)} = X_t^{(i)}$ για κάθε i μεγαλύτερο από κάποιο i^* , τότε η διαδικασία αυτή είναι η λύση της стоχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Αν ορίσουμε τον συναρτησιακό χώρο M^2 που αποτελείται από τις стоχαστικές διαδικασίες X_t που είναι τέτοιες ώστε $E[\int_0^T |X_t|^2 dt] < \infty$. Ο χώρος αυτός εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_\lambda$ που ορίζεται σαν

$$\|X_t\|_\lambda^2 = E \left[\int_0^T e^{-\lambda t} |X_t|^2 dt \right]$$

είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος με νόρμα, δηλαδή ένας χώρος Banach. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε τον τελεστή $\mathcal{T} : M^2 \rightarrow M^2$ με βάση την σχέση

$$\mathcal{T}X_t = x + \int_0^t b(t, X_t) dt + \int_0^t \sigma(t, X_t) dB_t$$

¹θεωρούμε ότι n και m μπορεί να πάρουν οποιεσδήποτε ακέραιες τιμές

Ένα σημείο $\chi = X_t$ του χώρου M^2 τέτοιο ώστε $\mathcal{T}\chi = \chi$ ή ισοδύναμα $X_t = \mathcal{T}X_t$, ονομάζεται σταθερό σημείο του τελεστή \mathcal{T} , και στο παρών πλαίσιο θα είναι μία στοχαστική διαδικασία που είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Για να αποδείξουμε λοιπόν την επιλυσιμότητα της εξίσωσης αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σταθερού σημείου σύμφωνα με το οποίο αν ο τελεστής \mathcal{T} είναι ένας τελεστής συστολής, θα έχει κάποιο σταθερό σημείο (βλ. παράρτημα του κεφαλαίου). Υπενθυμίζουμε πως ένας τελεστής ονομάζεται τελεστής συστολής αν για οποιαδήποτε χ_1, χ_2 που ανήκουν στον εν λόγω συναρτησιακό χώρο (στην προκειμένη περίπτωση τον M^2) ισχύει ότι

$$\|\mathcal{T}\chi_1 - \mathcal{T}\chi_2\| \leq \nu \|\chi_1 - \chi_2\|$$

όπου $\nu < 1$. Στην προκειμένη περίπτωση για νόρμα του χώρου θα χρησιμοποιήσουμε την νόρμα $\|\cdot\|_\lambda$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε πως ο τελεστής αυτός είναι ένας τελεστής συστολής. Ας πάρουμε λοιπόν διαφορετικά σημεία χ_1, χ_2 του χώρου M^2 που αντιστοιχούν στις στοχαστικές διαδικασίες $X_{1,t}$ και $X_{2,t}$. Από τον ορισμό του τελεστή \mathcal{T} έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{T}X_{1,t} - \mathcal{T}X_{2,t} &= \int_0^T (b(t, X_{1,t}) - b(t, X_{2,t}))dt + \int_0^T (\sigma(t, X_{1,t}) - \sigma(t, X_{2,t}))dB_t \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

θα υπολογίσουμε χωριστά τον καθένα από τους όρους αυτούς.

- Ο όρος I_1 : Ο όρος αυτός είναι ουσιαστικά ο ίδιος με την ντερμιναστική περίπτωση:

$$\begin{aligned} \|I_1\|_\lambda^2 &\leq E \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \left| \int_0^t (b(s, X_{1,s}) - b(s, X_{2,s}))ds \right|^2 dt \right] \\ &\leq E \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |b(s, X_{1,s}) - b(s, X_{2,s})|^2 ds dt \right] \\ &\leq C^2 E \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds dt \right] \\ &= C^2 E \left[\int_0^T \left(\int_s^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} dt \right) e^{-\lambda s} |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds \right] \\ &\leq \frac{C^2}{\lambda} E \left[\int_0^T e^{-\lambda s} |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds \right] = \frac{C^2}{\lambda} \|X_1 - X_2\|_\lambda^2 \end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις χρησιμοποιήσαμε (α) την ιδιότητα Lipschitz για την συνάρτηση b σύμφωνα με την οποία $|b(x_1, t) - b(x_2, t)| \leq C |x_1 - x_2|$, (β) το ότι το ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned} \int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t f(s) ds dt &= \int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^T f(s) H(t-s) ds dt \\ &= \int_0^T \int_0^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} e^{-\lambda s} f(s) H(t-s) ds dt \\ &= \int_0^T \left[\int_0^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} H(t-s) dt \right] e^{-\lambda s} f(s) ds \\ &= \int_0^T \left[\int_s^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} ds \right] e^{-\lambda s} f(s) ds \end{aligned}$$

όπου $f(s)$ είναι μία οποιαδήποτε συνάρτηση του s και στην συγκεκριμένη περίπτωση το $|X_{1,s} - X_{2,s}|$ και $H(s)$ η συνάρτηση του Heaviside δηλαδή μία συνάρτηση τέτοια ώστε

$$H(s) = \begin{cases} 0, & \text{αν } s < 0 \\ 1, & \text{αν } s \geq 0 \end{cases}$$

και (γ) ότι

$$\int_0^T e^{-\lambda t} e^{\lambda s} dt = \frac{1}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(T-t)}) \leq \frac{1}{\lambda}$$

- Ο όρος I_2 : Για τον όρο αυτό θα επαναλάβουμε τα παραπάνω βήματα αλλά επιπλέον πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την ισομετρία του Itô για το στοχαστικό ολοκλήρωμα. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|I_2\|_{\lambda}^2 &= E \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \left| \int_0^t (\sigma(s, X_{1,s}) - \sigma(s, X_{2,s})) dB_s \right|^2 dt \right] \\ &= E \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |\sigma(s, X_{1,s}) - \sigma(s, X_{2,s})|^2 ds dt \right] \\ &\quad (\text{ισομετρία του Itô}) \\ &\leq C^2 E \left[\int_0^T e^{-\lambda t} \int_0^t |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds dt \right] \\ &\leq \frac{C^2}{\lambda} E \left[\int_0^T e^{-\lambda s} |X_{1,s} - X_{2,s}|^2 ds \right] = \frac{C^2}{\lambda} \|X_1 - X_2\|_{\lambda}^2 \end{aligned}$$

Επιλέγοντας λοιπόν το λ κατά τρόπο ώστε $2\frac{C^2}{\lambda} < 1$ ο τελεστής \mathcal{T} θα είναι μία συστολή στον χώρο M^2 και συνεπώς θα έχει ένα και μοναδικό σταθερό σημείο, που θα είναι και η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. \square

Πολλές στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις μπορεί να επιλυθούν με την χρήση του τύπου του Itô.

Παράδειγμα 5.1.1. Η γεωμετρική κίνηση Brown θεωρείστε το γραμμικό μοντέλο αύξησης στην μορφή

$$\frac{dS_t}{dt} = a_t S_t$$

και ας υποθέσουμε ότι ο συντελεστής αύξησης είναι μία τυχαία μεταβλητή της μορφής

$$a_t = \mu + \sigma \dot{B}_t.$$

Ας θυμηθούμε ότι η παράγωγος της κίνησης Brown ορίζεται μόνο κάτω από ένα ολοκλήρωμα. Κατά συνέπεια είναι μαθηματικά ορθότερο να γράψουμε την εξίσωση στην μορφή

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t.$$

Αν ο στοχαστικός όρος έλειπε από την εξίσωση, η εξίσωση θα ήταν μία εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, και η λύση θα ήταν μία εκθετική συνάρτηση. Έχοντας γνώση αυτού του πράγματος, ας γράψουμε σε αναλογία με την ντετερμινιστική περίπτωση

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= \mu dt + \sigma dB_t \implies \\ (5.-28) \quad \int_0^t \frac{dS_t}{S_t} &= \int_0^t \mu dt + \sigma dB_t = \mu t + \sigma B_t \end{aligned}$$

Αν στο στάδιο αυτό μπειτε στον πειρασμό να αντικαταστήσετε το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής με το $\ln(S_t) - \ln(S_0)$ **μηγν** το κάνετε! Εφόσον η S_t είναι μία διάχυση αυτό δεν είναι αληθινό. Για να

υπολογίστετε το ολοκλήρωμα αυτό, ας υπολογίσουμε την χρονική παράγωγο της στοχαστικής διαδικασίας $Z_t = \ln(S_t)$. Με την χρήση του τύπου του Itô παίρνουμε

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{dS_t}{S_t} + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{S_t^2} \right) (dS_t)^2 \\ &= \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2S_t^2} \sigma^2 S_t^2 dt = \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \sigma^2 dt \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει ότι

$$\int_0^t \frac{dS_t}{S_t} = Z_t + \frac{1}{2} \sigma^2 t = \ln(S_t) + \frac{1}{2} \sigma^2 t$$

και αντικαθιστώντας αυτό στην εξίσωση (5.-28) βρίσκουμε ότι

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \underbrace{\sigma B_t}_{\text{σB}_t} \right]$$

όπου οι υπογραμμισμένοι όροι οφείλονται στην στοχαστικότητα. Η στοχαστική διαδικασία S_t ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown και χρησιμοποιείται στην χρηματοοικονομική σαν ένα μοντέλο για τις τιμές των μετοχών. Το μοντέλο αυτό, που θα δούμε αρκετά συχνά στην διάρκεια του βιβλίου αυτού, βασίζεται στην παρατήρηση ότι πολλές φορές, η σχετική απόδοση μίας μετοχής δηλαδή η ποσότητα $\frac{dS_t}{S_t}$ είναι ίση με μία σταθερή τιμή μ η οποία ονομάζεται **ταχύτητα** της μετοχής και από μία διακύμανση γύρω από την τιμή αυτή η οποία είναι της μορφής σdB_t όπου B_t είναι μία τυπική κίνηση Brown και σ είναι το πλάτος των διάκυμάνσεων αυτών. Η παράμετρος σ ονομάζεται συνήθως η **πτητικότητα** της μετοχής.

Παράδειγμα 5.1.2. Η διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck και τα επιτόκια Ας θεωρήσουμε την εξής στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = -aX_t dt + dB_t$$

με αρχική συνθήκη $X_0 = x$. Η στοχαστική διαδικασία που είναι η λύση της στοχαστικής αυτής διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται διαδικασία Ornstein-Uhlenbeck και βρίσκει αρκετές εφαρμογές στην φυσική και τα χρηματοοικονομικά.

Η εξίσωση αυτή μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Ας εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην συνάρτηση $f(t, x) = \exp(\sigma t)x$ με την επιλογή $x = X_t$ και $\sigma \in \mathbb{R}$ το οποίο θα καθορίσουμε στην πορεία. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô παίρνουμε

$$df(t, X_t) = (\sigma - a) \exp(\sigma t) X_t dt + \exp(\sigma t) dB_t$$

Επιλέγοντας $\sigma = a$ βλέπουμε ότι

$$df(t, X_t) = \exp(\sigma t) dB_t$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί αμέσως και να δώσει

$$\begin{aligned} f(t, X_t) - f(0, X_0) &= \int_0^t \exp(at) dB_t \implies \\ \exp(at) X_t - x &= \int_0^t \exp(at) dB_t \end{aligned}$$

από την οποία και συμπεραίνουμε ότι

$$X_t = \exp(-at)x + \exp(-at) \int_0^t \exp(at) dB_t$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διασπορά της διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck. Έχουμε λοιπόν

$$E[X_t] = x \exp(-at)$$

και

$$\begin{aligned} E[(X_t - E[X_t])^2] &= \exp(-2at) E \left[\left(\int_0^t \exp(at) dB_t \right)^2 \right] \\ &= \exp(-2at) \int_0^t \exp(2at) dt = \frac{1}{2a} (1 - \exp(-2at)) \end{aligned}$$

Η στοχαστική αυτή διαφορική εξίσωση μπορεί να χρησιμοποιηθεί σαν ένα μοντέλο για τα επιτόκια. Τα επιτόκια μας δίνουν το πως η αξία του χρήματος σήμερα θα σχετίζεται με την αξία του χρήματος αύριο. Στην πράξη, τα επιτόκια δεν είναι σταθερά και μάλιστα μπορούμε να πούμε ότι υπόκεινται σε τυχαιότητα. Αν πάρουμε λοιπόν το επιτόκιο r σαν συνάρτηση του χρόνου θα έχουμε μία στοχαστική διαδικασία r_t . Οι τιμές των επιτοκίων κυμαίνονται γύρω από μία σταθερή τιμή. Ένα μοντέλο που έχει προταθεί για τις τιμές των επιτοκίων είναι το μοντέλο του Vasicek το οποίο είναι μία στοχαστική διαφορική εξίσωση της μορφής

$$dr_t = (\theta - ar_t)dt + \sigma dB_t$$

Η εξίσωση αυτή είναι μία γενίκευση της στοχαστικής διαδικασίας Ornstein-Uhlenbeck και η λύση της μπορεί να βρεθεί αναλυτικά με την ίδια μέθοδο όπως αυτή που χρησιμοποιήσαμε για την λύση της εξίσωσης Ornstein-Uhlenbeck.

Παράδειγμα 5.1.3. Η γέφυρα Brown Μία άλλη διαφορική εξίσωση που συναντάται συχνά στην θεωρία πιθανοτήτων είναι η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = -\frac{X_t}{1-t} dt - dB_t$$

με αρχική συνθήκη $X_0 = 0$. Η λύση της στοχαστικής αυτής διαφορικής εξίσωσης ονομάζεται η γέφυρα Brown (Brownian bridge). Για να λύσουμε την εξίσωση αυτή θα πρέπει να εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην συνάρτηση $f(t, x) = g(t)x$ όπου $g(t)$ είναι μία C^1 συνάρτηση που θα καθορίσουμε αργότερα και θα θεωρήσουμε $x = X_t$. Με την εφαρμογή του λήμματος του Itô έχουμε

$$df(t, X_t) = \left(\frac{dg}{dt} - \frac{g}{1-t} \right) X_t dt + g(t) dB_t$$

οπότε επιλέγοντας

$$\frac{dg}{dt} = \frac{g}{1-t} \implies g(t) = \frac{1}{1-t}$$

παίρνουμε ότι

$$df(t, X_t) = \frac{1}{1-t} dB_t$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί αμέσως δίνοντας

$$\frac{1}{1-t} X_t - 0 = \int_0^t \frac{dB_t}{1-t}$$

ή

$$X_t = (1-t) \int_0^t \frac{dB_t}{1-t}$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή και την διασπορά της γέφυρας Brown. Πράγματι έχουμε

$$E[X_t] = (1-t)E\left[\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}\right] = 0$$

και

$$E[X_t^2] = (1-t)^2 E\left[\left(\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}\right)^2\right] = (1-t)^2 \int_0^t (1-s)^2 ds = t - t^2$$

Η γέφυρα Brown έχει χρησιμοποιηθεί στα χρηματοοικονομικά μαθηματικά για την μοντελοποίηση της διαδικασίας τιμών ορισμένων ομολόγων (zero-coupon bonds) (βλ. π.χ. [28]).

Παράδειγμα 5.1.4. Οι συνθήκες του θεωρήματος ύπαρξης και μοναδικότητας είναι σημαντικό να λαμβάνονται υπόψη. Για παράδειγμα η στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = |X_t|^\alpha dB_t$$

έχει μοναδική λύση όταν $\alpha \geq \frac{1}{2}$ ενώ μπορεί να έχει απειρία λύσεων όταν $\alpha < \frac{1}{2}$.

Παράδειγμα 5.1.5. Μία άλλη περίπτωση, διανυσματικής στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης η οποία δεν έχει καμία λύση είναι η ακόλουθη

$$dX_t = \sigma(X_t)dB_t$$

όπου $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$, $B_t = (B_{1,t}, B_{2,t})$ και

$$\sigma(X_1, X_2) = \begin{pmatrix} \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} & -\frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \\ \frac{X_2}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} & \frac{X_1}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \end{pmatrix}$$

5.2 Ισχυρές και ασθενείς λύσεις

Οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων που αναφέραμε μέχρι τώρα βασίζονταν στην εξής φιλοσοφία: Έχοντας καθορίσει τους συντελεστές της εξίσωσης f, g και έχοντας επίσης μία συγκεκριμένη κίνηση Brown B_t και μία διήθηση \mathcal{F}_t υπόψη ο σκοπός μας ήταν να καθορίσουμε μία στοχαστική διαδικασία (και συγκεκριμένα μία διαδικασία Itô) X_t τέτοια ώστε να ικανοποιείται η εξίσωση

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) dB_s$$

Οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης με τον τρόπο αυτό ονομάζονται **ισχυρές λύσεις** (στρογγυλές λύσεις) της παραπάνω στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Για μία ισχυρή λύση λοιπόν τα δεδομένα του προβλήματος είναι τα $(f, g, B_t, \mathcal{F}_t)$ και το ζητούμενο είναι η διαδικασία Itô X_t .

Μπορούμε όμως να φανταστούμε και το ακόλουθο πρόβλημα: Τα δεδομένα είναι μόνο οι συναρτήσεις (f, g) και τα ζητούμενα είναι η κατασκευή μίας διήθησης \mathcal{F}_t , μίας κίνησης Brown \bar{B}_t και μίας διαδικασίας Itô X_t τέτοιων ώστε να ισχύει η εξίσωση

$$X_t = X_0 + \int_0^t f(s, X_s) ds + \int_0^t g(s, X_s) d\bar{B}_s$$

Το ζητούμενο λοιπόν είναι τώρα οι $(X_t, \bar{B}_t, \mathcal{F}_t)$. Η τριπλέτα αυτή ονομάζεται **ασθενής λύση** (weak solution) της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Μία ισχυρή λύση μίας στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης είναι και ασθενής της λύση αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει πάντοτε. Η έννοια της μοναδικότητας μπορεί αν γενικευθεί και για μη ισχυρές λύσεις.

Ορισμός 5.2.1. Οι ασθενείς λύσεις της (5.1) έχουν την ιδιότητα της ασθενούς μοναδικότητας αν για οποιοδήποτε δύο ασθενείς λύσεις $(\Omega, \mathcal{F}_t, P, B_t, X_t)$ και $(\Omega', \mathcal{F}'_t, P', B'_t, X'_t)$ οι στοχαστικές διαδικασίες X_t και X'_t έχουν την ίδια κατανομή.

Παράδειγμα 5.2.1. Ας δούμε ένα παράδειγμα ασθενούς λύσης στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$(5.-54) \quad dX_t = \text{sign}(X_t)dB_t$$

Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση του Tanaka. Έστω X_t μία οποιαδήποτε κίνηση Brown \bar{B}_t και \mathcal{F}_t μία διήθηση (ως προς την οποία η \bar{B}_t είναι κίνηση Brown). Ας ορίσουμε την \tilde{B}_t ως το στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô

$$(5.-53) \quad \tilde{B}_t := \int_0^t \text{sign}(\bar{B}_t)d\bar{B}_t$$

Εφόσον έχουμε ορίσει $X_t := \bar{B}_t$ γράφοντας την (5.-53) σε διαφορική μορφή παίρνουμε

$$d\tilde{B}_t = \text{sign}(X_t)dX_t \implies dX_t = \text{sign}(X_t)d\tilde{B}_t$$

συνεπώς η $X_t = \bar{B}_t$ θα είναι μία ασθενής λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (5.-54) αν η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown (φυσικά ως προς την διήθηση \mathcal{F}_t). Αυτό μπορεί να γίνει με εφαρμογή του θεωρήματος του Levy και κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô (βλ. παράδειγμα 4.2.3).

Η εξίσωση του Tanaka δεν έχει ισχυρή λύση επειδή η συνάρτηση $\text{sign}(x)$ δεν ικανοποιεί τις συνθήκες Lipschitz.

Στο βιβλίο αυτό θα ασχοληθούμε μόνο με ισχυρές λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

5.3 Πρώτη εφαρμογή στη χρηματοοικονομική

Στο τμήμα αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τις τεχνικές που είδαμε πιο πάνω για να διατυπώσουμε ένα μοντέλο για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων. Το μοντέλο αυτό προτάθηκε από τους Black και Scholes το 1973, οι οποίοι τιμήθηκαν για την συμβολή τους στην οικονομική επιστήμη με το βραβείο Nobel το 1997. Το μοντέλο αυτό αν και σχετικά απλό χρησιμοποιείται ακόμα και σήμερα στην πράξη.

Ας ξεκινήσουμε την μελέτη μας με την έννοια του παραγώγου συμβολαίου. Μιά και θα ασχοληθούμε εκτενώς με την μελέτη παραγώγων συμβολαίων αργότερα θα αναφέρουμε εδώ εισαγωγικά κάποια πράγματα για ένα συγκεκριμένο είδος παραγώγων συμβολαίων, τα δικαιώματα (options). Για να είμαστε πιο συγκεκριμένοι θα ασχοληθούμε με ένα δικαίωμα ανάκλησης (call option). Ένα δικαίωμα ανάκλησης, είναι ένα συμβόλαιο το οποίο δίνει στον κάτοχο του το δικαίωμα να αγοράσει (εφόσον το επιθυμεί) έναν τίτλο σε κάποια προκαθορισμένη τιμή, μέχρι κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Το δικαίωμα ανάκλησης, πρέπει να αγοραστεί από τον κάτοχο του σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή και μπορεί να πουληθεί οποτεδήποτε (πριν την λήξη του). Επι παραδείγματι, μπορεί κανείς να αγοράσει για 1000 δρχ. ένα δικαίωμα ανάκλησης που του επιτρέπει να αγοράσει τίτλους της Ελληνικής Διαστημικής Βιομηχανίας Α.Ε. προς 24000 το κομμάτι, την 30η Φεβρουαρίου 2002. Αν την ημερομηνία της λήξης του συμβολαίου οι τίτλοι της εταιρείας αυτής πωλούνται προς π.χ. 27000 το κομμάτι τότε ο κάτοχος του συμβολαίου ανάκλησης έχει κέρδος $(27000-24000)-1000=2000$ δρχ (εφόσον έχει πληρώσει και 1000 δρχ. για την κατοχή του δικαιώματος). Αν η τιμή των τίτλων την ημερομηνία λήξης των συμβολαίων, έχει πέσει παρακάτω από τις 24000 δρχ. π.χ. οι τίτλοι της εταιρείας αυτής πωλούνται προς 21000 τότε το δικαίωμα ανάκλησης δεν έχει καμία αξία, εφόσον κανείς δεν θα ενδιαφερθεί να αγοράσει τις μετοχές προς 24000 αφού μπορεί στην ελεύθερη αγορά να τις αγοράσει φθηνότερα. Ο κάτοχος του δικαιώματος ανάκλησης λοιπόν έχει χάσει από πάνω και τις 1000 δρχ τις οποίες έδωσε για την αγορά του δικαιώματος ανάκλησης. Τα δικαιώματα έχουν διπλή χρήση. Μπορούν είτε να χρησιμοποιηθούν για τη παραγωγή κέρδους (όπως στην παραπάνω περίπτωση) είτε για την εξασφάλιση ενός χαρτοφυλακίου από περιουσιακά στοιχεία (διαχείριση κινδύνου). Θα επανέλθουμε στα δικαιώματα και τις πιθανές τους χρήσεις αργότερα.

Ένα δικαίωμα μπορεί να μεταβιβαστεί οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από την λήξη του. Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι: ποιά είναι η δίκαια τιμή ενός δικαιώματος μία οποιαδήποτε χρονική στιγμή πριν από την λήξη του.

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής έχει στην διάθεση του έναν αριθμό τίτλων μετοχών, έναν αριθμό από δικαιώματα και κάποιο ποσό επενδυμένο σε κάποια επένδυση χωρίς ρίσκο (π.χ. τραπεζικός λογαριασμός ή ομόλογο). Μία τέτοια συλλογή περιουσιακών στοιχείων ονομάζεται χαρτοφυλάκιο. Αν N_1 είναι ο αριθμός των τίτλων των μετοχών

που έχει στην διάθεση του, N_2 είναι ο αριθμός των δικαιωμάτων, και Q είναι το ποσό που είναι τοποθετημένο σε ομόλογα, τότε η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού είναι

$$V(t) = N_1(t)S(t) + N_2(t)W(t) + Q(t)$$

όπου $S(t)$ είναι η αξία του κάθε τίτλου μετοχών και $W(t)$ είναι η αξία του δικαιώματος την χρονική στιγμή t .

Είναι γνωστό σε όλους ότι οι τιμές των μετοχών παρουσιάζουν διακυμάνσεις. Ένα πιθανό μοντέλο για τις διακυμάνσεις αυτές μπορεί να είναι το ακόλουθο

$$\frac{dS_t}{S_t} = adt + \sigma dB_t.$$

Το μοντέλο αυτό προτάθηκε για πρώτη φορά στις αρχές του 20ου αιώνα, από τον Γάλλο μαθηματικό Bachelier (ο οποίος μάλιστα ήταν και φοιτητής του H. Poincaré). Το μοντέλο αυτό μας παρέχει την σχετική μεταβολή της τιμής μίας μετοχής, η οποία θεωρείται πως αποτελείται από μία σταθερή ταχύτητα και από μία διακύμανση η οποία είναι της μορφής μίας κίνησης Brown. Στο απλό αυτό μοντέλο θα θεωρήσουμε ότι οι παράμετροι a και σ είναι σταθερές, αλλά το μοντέλο όπως θα δούμε παρακάτω μπορεί να γενικευθεί και για μη σταθερές παραμέτρους. Η παράμετρος σ καλείται πτητικότητα (volatility).

Είναι λογικό να αναμένουμε ότι η τιμή ενός δικαιώματος κάποια χρονική στιγμή t εξαρτάται από την τιμή της μετοχής S την χρονική στιγμή αυτή. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$W(t) = F(t, S)$$

όπου για τεχνικούς λόγους η συνάρτηση F θεωρείται να είναι $C^{1,2}$.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Itô μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβολή στην αξία του δικαιώματος σαν αποτέλεσμα της μεταβολής στην αξία της μετοχής

$$\begin{aligned} dW_t &= \frac{\partial F}{\partial t} dt + \frac{\partial F}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} (dS)^2 \\ &= \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S} aS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sigma S dB_t \\ &:= a_W W_t dt + \sigma_W W_t dB_t \end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε τώρα την αλλαγή της αξίας του χαρτοφυλακίου στον χρόνο. Για απλούστευση θα θεωρήσουμε ότι η μεταβολή της αξίας του ομολόγου στον χρόνο ακολουθεί τον νόμο $dQ_t = rQ_t dt$ όπου r είναι το επιτόκιο το οποίο μπορεί να είναι και (ντετερμινιστική) συνάρτηση του χρόνου. Ας κάνουμε επίσης και την περαιτέρω παραδοχή ότι τα N_1 και N_2 μεταβάλλονται σε χρονικές κλίμακες που είναι πολύ πιο αργές από την χρονική κλίμακα στην οποία μεταβάλλονται οι αξίες των μετοχών και των δικαιωμάτων S και W αντίστοιχα. Έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε πως $dN_{1t} \simeq 0$ και $dN_{2t} \simeq 0$. (self financing ?) Μπορούμε τώρα να εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην συνάρτηση V και έχουμε

$$\begin{aligned} dV_t &= N_1 dS_t + N_2 dW_t + dQ_t \\ &= N_1 (adt + \sigma dB_t) S \\ &\quad + N_2 \left(\left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial S} aS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial F}{\partial S} \sigma S dB_t \right) \\ &\quad + rQ_t dt \end{aligned}$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με το V_t παίρνουμε

$$\frac{dV_t}{V_t} = (adt + \sigma dB_t) W_{1t} + (a_W dt + \sigma_W dB_t) W_{2t} + rdt W_{3t}$$

όπου

$$W_{1t} = \frac{N_1 S_t}{P_t}, \quad W_{2t} = \frac{N_2 W_t}{P_t}, \quad W_{3t} = \frac{Q_t}{P_t} = 1 - W_1 - W_2.$$

Τώρα μπορούμε να θέσουμε το εξής πρόβλημα: Πως μπορούμε να επιλέξουμε τις αναλογίες των W_{1t} και W_{2t} κατά τρόπο ώστε το χαρτοφυλάκιο μας να μην εμπεριέχει κίνδυνο; Ο τρόπος ορισμού του κινδύνου δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένος και το θέμα αυτό αποτελεί ένα σημαντικό κλάδο της χρηματοοικονομικής. Για το συγκεκριμένο

παράδειγμα σαν μέτρο του κινδύνου την διασπορά (διακύμανση) του dP_t/P_t . Με τον όρο χαρτοφυλάκιο χωρίς κίνδυνο θα εννοούμε εδώ ένα χαρτοφυλάκιο για το οποίο η διακύμανση του dP_t/P_t θα μηδενίζεται δηλαδή η επιλογή του χαρτοφυλακίου μας θα είναι τέτοια ώστε η τοις εκατό μεταβολή της αξίας του δεν θα έχει διακυμάνσεις στον χρόνο. Υπολογίζοντας την διακύμανση του dP_t/P_t παίρνουμε

$$\text{Var} \left(\frac{dP_t}{P_t} \right) = (\bar{W}_1 \sigma + \bar{W}_2 \sigma_W)^2 dt = 0$$

(όπου θέσαμε τον όρο αυτό ίσο με το 0, εφόσον ζητάμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο δεν εμπεριέχει κίνδυνο).

Η αναμενόμενη (μέση τιμή) της απόδοσης ενός τέτοιου χαρτοφυλακίου που δεν περιέχει κίνδυνο, θα πρέπει να είναι ίση με την απόδοση του περιουσιακού στοιχείου το οποίο δεν έχει κίνδυνο, δηλαδή του ομολόγου (ή της τραπεζικής κατάθεσης). Η απαίτηση αυτή σχετίζεται με το ότι αν αυτό δεν ήταν αληθινό (π.χ. ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο είχε μεγαλύτερη απόδοση από το ομολόγο) τότε κάποιος θα μπορούσε να δανειστεί κάποιο ποσό από την τράπεζα, με επιτόκιο r να το τοποθετήσει στο εν λόγω χαρτοφυλάκιο, και από τα κέρδη του να πληρώσει το δάνειο στην τράπεζα και να έχει έτσι σταθερό κέρδος χωρίς ρίσκο και χωρίς να πληρώσει τίποτα από το προσωπικό του κεφάλαιο! Μία τέτοια ευκαιρία ονομάζεται arbitrage και αν και είναι το όνειρο του κάθε ενός, δεν είναι γενικά αποδεκτή από την θεωρία γιατί θεωρείται ότι δημιουργεί αστάθειες στην αγορά. Όταν ζητούμε λοιπόν να βρούμε την 'δίκαιη' τιμή ενός παραγώγου συμβολαίου συνήθως δεν δεχόμαστε την ύπαρξη arbitrage.

Αν λοιπόν θεωρήσουμε ότι το ακίνδυνο χαρτοφυλάκιο αποτελείται από την επιλογή \bar{W}_1, \bar{W}_2 σύμφωνα με την παραπάνω συζήτηση θα πρέπει να ισχύει

$$E \left(\frac{dP_t}{P_t} \right) = \{a\bar{W}_1 + a_W \bar{W}_2 + r(1 - \bar{W}_1 - \bar{W}_2)\} dt = r dt$$

Από τις δύο αυτές συνθήκες μπορούμε τώρα να πάρουμε συνθήκες που συνδέουν τις \bar{W}_1, \bar{W}_2 το επιτόκιο r και τα a και a_W που περιέχουν πληροφορία σχετικά με το πως συνδέεται η μεταβολή της τιμής του δικαιώματος με την αλλαγή της τιμής της μετοχής. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{\bar{W}_1}{\bar{W}_2} &= -\frac{\sigma_W}{\sigma} \\ r &= a\bar{W}_1 + a_W \bar{W}_2 + r(1 - \bar{W}_1 - \bar{W}_2) \end{aligned}$$

Οι δύο αυτές εξισώσεις είναι ένα ομογενές σύστημα γραμμικών αλγεβρικών εξισώσεων και μπορούν να έχουν μη μηδενική λύση αν ισχύει η συνθήκη συμβατότητας

$$\frac{a - r}{\sigma} = \frac{a_W - r}{\sigma_W}.$$

Από το ορισμό του a και του σ είναι καθαρό ότι η συνθήκη συμβατότητας μας δίνει μία γραμμική μερική διαφορική εξίσωση οι λύσεις της οποίας παρέχουν την τιμή του παραγώγου συμβολαίου $F(S, t)$. Στην ειδική περίπτωση που η πτητικότητα και η ταχύτητα της αποδόσεως της μετοχής είναι σταθερές παίρνουμε την γνωστή εξίσωση Black-Scholes

$$\frac{\partial F}{\partial t} + rS \frac{\partial F}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 F}{\partial S^2} - rF = 0$$

η λύση της οποίας μπορεί να δώσει την βέλτιστη τιμή που μπορεί κανείς να πληρώσει για το συμβολαίο αυτό με τις παραπάνω παραδοχές.

Μία μερική διαφορική εξίσωση για να λυθεί πρέπει να συμπληρωθεί και από μία αρχική συνθήκη. Στην περίπτωση ενός δικαιώματος ανάκλησης η 'αρχική' συνθήκη θα είναι ότι γνωρίζουμε την αξία του παραγώγου συμβολαίου κατά την λήξη του συμβολαίου, η οποία δεν είναι τίποτε άλλο από την απόδοση του. Για παράδειγμα, αν το δικαίωμα μας επιτρέπει να αγοράσουμε μία μετοχή στην τιμή K , η αξία του δικαιώματος θα είναι $S_T - K$ αν $S_T > K$ (αγοράζουμε την προκαθορισμένη τιμή K και έχουμε κέρδος $S_T - K$) και 0 αν $S_T < K$ (αν μπορούμε να αγοράσουμε την μετοχή στην ελεύθερη αγορά για S_T για πιο λόγο να ενδιαφερθούμε για ένα δικαίωμα το οποίο θα μας επιτρέψει να την αγοράσουμε ακριβότερα). Άρα η εξίσωση Black-Scholes θα πρέπει να συμπληρωθεί με την αρχική συνθήκη

$$F(S, T) = \max(S_T - K, 0)$$

Παρόλο που η εξίσωση αυτή φαίνεται αρκετά περίπλοκη, υπάρχει ένας απλός μετασχηματισμός μεταβλητών που μπορεί να την μετατρέψει στην εξίσωση διάχυσης, η οποία μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Το τελικό αποτέλεσμα είναι

ότι η τιμή ενός δικαιώματος ανάκλησης, όπως αποτιμάται από το μοντέλο Black-Scholes είναι

$$\begin{aligned} F(S, t) &= SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2) \\ d_1 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= \frac{\ln\left(\frac{S}{K}\right) + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ N(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d \exp\left(-\frac{1}{2}s^2\right) ds. \end{aligned}$$

Η παραπάνω απλή ανάλυση δείχνει την βασική ιδέα του πως μπορεί να αποτιμηθούν ορισμένα παράγωγα συμβόλαια με την προϋπόθεση της απουσίας arbitrage στην αγορά. Το μοντέλο αυτό είναι εξαιρετικά δημοφιλές και έχει αμέτρητες παραλλαγές και γενικεύσεις. Θα επανέλθουμε σε αυτό αργότερα με πιο αυστηρά εργαλεία της στοχαστικής ανάλυσης αλλά στο συγκεκριμένο σημείο το αναφέραμε σαν ένα παράδειγμα της χρήσης των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων στην χρηματοοικονομική.

5.4 Δύο σημαντικές ιδιότητες

Θα δείξουμε τώρα ότι οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες, που διευκολύνουν ιδιαίτερα τους υπολογισμούς, την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov.

5.4.1 Η ιδιότητα Markov

Είδαμε στα προηγούμενα κεφάλαια ότι η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία που έχει την ιδιότητα Markov. Μπορούμε να δούμε ότι το στοχαστικό ολοκλήρωμα του Itô επάνω στην κίνηση Brown και οι διαδικασίες Itô, κάτω από ορισμένες συνθήκες ικανοποιούν την ιδιότητα Markov. Κατ'επέκταση θα δείξουμε εδώ ότι οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν την ιδιότητα Markov.

Πιο συγκεκριμένα έχουμε το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 5.4.1. Η ιδιότητα Markov Αν X_t είναι η λύση της αυτόνομης² στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (5.1), και f είναι μία φραγμένη συνάρτηση τότε για οποιοδήποτε t και s όπου $t, s \geq 0$

$$E_x[f(X_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = E_{X_s}[f(X_t)]$$

Το αριστερό μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να ερμηνευθεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας X η οποία ξεκινάει στο σημείο x την χρονική στιγμή 0 και 'τρέχει' για χρονικό διάστημα $t+s$, δηλαδή ουσιαστικά είναι η μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_{t+s} αν $X_0 = x$. Το δεξιό μέλος της παραπάνω ισότητας μπορεί να ερμηνευθεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας X η οποία ξεκίνησε την χρονική στιγμή 0 στο σημείο X_s (δηλαδή στο σημείο που έφτασε η αρχική διαδικασία την χρονική στιγμή s) και τρέχει για χρονικό διάστημα t .

Η διαισθητική ερμηνεία της ιδιότητας Markov είναι ότι η μελλοντική συμπεριφορά της διαδικασίας, δεδομένου ότι έγινε μέχρι την χρονική στιγμή t , μπορεί να καθοριστεί απλά και μόνο από σαν να ξεκινούσαμε μία νέα διαδικασία διάχυσης στην θέση X_t . Με άλλα λόγια, η διαδικασία διάχυσης δεν έχει μνήμη του παρελθόντος της. Αυτό είναι σε πλήρη αναλογία με την ιδιότητα Markov για την κίνηση Brown. Η ιδιότητα αυτή συνεχίζει να ισχύει ακόμα και αν ο χρόνος t αντικατασταθεί με ένα τυχαίο χρόνο π.χ. έναν χρόνο στάσης. Με άλλα λόγια, οι λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν την ισχυρή ιδιότητα Markov. Αυτό όμως συμβαίνει κάτω από ορισμένες σχετικά αυστηρές συνθήκες.

Αυτό που είναι ενδιαφέρον είναι ότι η ιδιότητα Markov μπορεί να γενικευθεί και για λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες έχουν συντελεστές που εξαρτώνται εκπεφρασμένα από τον χρόνο (μη αυτόνομες στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις).

Θα ξεκινήσουμε με ένα ισοδύναμο ορισμό μιας διαδικασίας Markov.

Ορισμός 5.4.1. Μία d -διάστατη στοχαστική διαδικασία X_t η οποία είναι προσαρμοσμένη στην διήθηση \mathcal{F}_t ονομάζεται διαδικασία Markov αν για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και για κάθε $0 \leq s \leq t$ (πεπερασμένα) ισχύει

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = P(X_t \in A | X_s)$$

² Δηλαδή της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης αν οι συντελεστές b και σ δεν περιέχουν ρητά τον χρόνο, $b = b(X_t)$, $\sigma = \sigma(X_t)$.

Σχόλιο: Με $P(\cdot | X_s)$ εννοούμε την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς την σ-άλγεβρα που παράγεται από την τυχαία μεταβλητή X_s . Με $P(\cdot | \mathcal{F}_s)$ εννοούμε την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς την σ-άλγεβρα \mathcal{F}_s ως προς την οποία είναι μετρήσιμες οι τυχαίες μεταβλητές X_r για $0 \leq r \leq s$. Μία πιθανή επιλογή για την \mathcal{F}_s μπορεί να είναι η σ-άλγεβρα που παράγεται από την στοχαστική διαδικασία X_t δηλαδή $\mathcal{F}_s = \sigma(X_r, 0 \leq r \leq s)$.

Αυτή η ιδιότητα είναι μία διαφορετική έκφραση της ιδιότητας της στοχαστικής διαδικασίας X_t ότι το μέλλον και το παρελθόν της διαδικασίας είναι ανεξάρτητα όταν είναι γνωστό το παρόν της διαδικασίας. Με άλλα λόγια αυτό μπορεί να εκφραστεί με το ότι η διαδικασία 'ξεχνάει' το παρελθόν της. Η ιδιότητα αυτή μπορεί να δούμε ότι είναι ισοδύναμη με την ιδιότητα

$$E[\phi(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[\phi(X_t) | X_s]$$

για κάθε φραγμένη συνάρτηση $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ η οποία είναι Borel μετρήσιμη.

Η υπό συνθήκη μέση τιμή $E[\phi(X_t) | X_s]$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας X_t που 'ξεκινάνε' στο σημείο X_s την χρονική στιγμή s και μπορούμε να την συμβολίσουμε με $E_{s, X_s}[\phi(X_t)]$. Η μέση τιμή αυτή μπορεί να εκφραστεί και με την βοήθεια της **πιθανότητας μετάβασης** $p(s, x; t, A) := P(X_t \in A | \mathcal{F}_s)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ της διαδικασίας Markov X_t . Συγκεκριμένα, μπορούμε να ορίσουμε την συνάρτηση

$$v(s, x) := E_{s, x}[\phi(X_t)] := \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y) p(s, x; t, y) dy$$

Η μέση τιμή $E_{s, X_s}[\phi(X_t)]$ είναι η συνάρτηση $v(s, x)$ υπολογισμένη στο $x = X_s$. Η πιθανότητα μετάβασης $p(x, s; \cdot, t)$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στο $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^d$ και για κάθε $0 \leq s \leq t$ (πεπερασμένα). Η πιθανότητα μετάβασης $p(s, x; t, A)$ μπορεί να ερμηνευθεί σαν η πιθανότητα να βρεθεί η διαδικασία X_t , η οποία ξεκινάει την χρονική στιγμή s στο σημείο x , στο σύνολο $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ την χρονική στιγμή t . Χρήσιμη ποσότητα είναι και η πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης $p(s, x; t, y)$ η οποία μπορεί να οριστεί από την σχέση

$$p(s, x; t, A) = \int_A p(s, x; t, y) dy$$

Για την πιθανότητα μετάβασης ισχύει η εξίσωση Chapman-Kolmogorov σύμφωνα με την οποία

$$p(s, x; t, A) = \int_{\mathbb{R}^d} p(r, y; t, A) p(s, x; r, y) dy, \quad \forall s \leq r \leq t$$

Η εξίσωση αυτή λέει ότι η μετάβαση από το x την χρονική στιγμή s στο A την χρονική στιγμή t μπορεί να γραφεί σαν η μετάβαση από το (x, s) στο ενδιάμεσο σημείο y την χρονική στιγμή r και κατόπιν σαν η μετάβαση από το (y, r) στο A την χρονική στιγμή t . Πρέπει δε να λάβουμε υπόψη όλα τα πιθανά ενδιάμεσα σημεία y . Αυτό γίνεται με την ολοκλήρωση επάνω σε όλα τα $y \in \mathbb{R}^d$.

Στην περίπτωση που η πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης μεταξύ των (s, x) και (t, y) εξαρτάται μόνο από την χρονική διάρκεια $t - s$ και όχι από τις συγκεκριμένες χρονικές στιγμές που ξεκινήσαμε λέμε ότι η διαδικασία Markov είναι **χρονικά ομογενής**. Για χρονικά ομογενείς διαδικασίες Markov ισχύει $p(s, x; t, y) = p(0, x; t - s, y) := p(t - s, x; y)$. Η συνάρτηση $p(t, x; y)$ αντιστοιχεί στην πιθανότητα (ή καλύτερα στην πυκνότητα πιθανότητας μετάβασης) της στοχαστικής διαδικασίας από το σημείο x στο σημείο y σε χρονικό διάστημα $t - s$. Δεν παίζει κανένα ρόλο το πότε ξεκινήσαμε την διαδικασία. Στην περίπτωση αυτή οι παραπάνω σχέσεις απλοποιούνται σημαντικά.

Το παρακάτω θεώρημα μας δείχνει ότι ένας τρόπος να παράγουμε διαδικασίες Markov είναι μέσω των λύσεων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Θεώρημα 5.4.2. (Η ιδιότητα Markov) Έστω X_t η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

όπου οι συντελεστές πληρούν τις συνθήκες Lipschitz και την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Τότε η X_t είναι μία διαδικασία Markov με πιθανότητα μετάβασης που ορίζεται από την σχέση

$$p(s, x; t, A) = P(X_t^{(s, x)} \in A)$$

όπου $X_t^{(s, x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$X_t^{(s, x)} = x + \int_s^t f(r, X_r^{(s, x)}) dr + \int_s^t g(r, X_r^{(s, x)}) dB_r$$

για $t \geq s$. Η $X_t^{(s,x)}$ ουσιαστικά είναι η λύση της αρχικής στοχαστικής εξίσωσης με αρχική τιμή x την χρονική στιγμή s ή αλλιώς για $X_s = x$.

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου \square

Αν η στοχαστική διαφορική εξίσωση είναι **αυτόνομη**, δηλαδή αν $b(t, X_t) = b(X_t)$ και $\sigma(t, X_t) = \sigma(X_t)$, τότε η διαδικασία Markov X_t θα είναι και **χρονικά ομογενής**.

Σχόλιο: Για να ισχύει η ιδιότητα Markov για την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης αρκεί να έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης. Συνεπώς, η ιδιότητα Markov μπορεί να ισχύει και μόνο αν ισχύουν τοπικές ιδιότητες Lipschitz.

5.4.2 Η ισχυρή ιδιότητα Markov

Κάτω από ορισμένες συνθήκες μπορούμε να δείξουμε ότι η ιδιότητα Markov για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων ισχύει και για χρόνους στάσης, δηλαδή λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν την ισχυρή ιδιότητα Markov. Συγκεκριμένα, ισχύει το παρακάτω θεώρημα

Θεώρημα 5.4.3. (Η ισχυρή ιδιότητα Markov) Έστω X_t η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Ας θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις γραμμικές συνθήκες αύξησης δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)|^2 \vee |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 &\leq \bar{K} |x - y|^2 \\ |b(t, x)|^2 \vee |\sigma(t, x)|^2 &\leq K(1 + |x|^2) \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$. Τότε, η στοχαστική διαδικασία X_t έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov.

Απόδειξη: Βλ. παράρτημα του κεφαλαίου \square .

5.4.3 Εφαρμογές της ιδιότητας Markov

Θα δώσουμε τώρα ορισμένες εφαρμογές και παραδείγματα σχετικά με την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 5.4.1. Η κίνηση Brown με ταχύτητα v είναι μία διαδικασία Markov με πυκνότητα μετάβασης

$$p(t_0, x; t_1, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp \left\{ -\frac{(y - (x + v(t_1 - t_0)))^2}{2(t_1 - t_0)} \right\}$$

Για να αποδείξουμε τον παραπάνω ισχυρισμό αρκεί να δούμε ότι η κίνηση Brown με ταχύτητα v είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = vdt + dB_t$$

Οι συντελεστές της εξίσωσης $b(t, x) = v$ και $\sigma(t, x) = 1$ πληρούν τις συνθήκες του θεωρήματος 5.4.2 συνεπώς η λύση της X_t είναι μία διαδικασία Itô η οποία ικανοποιεί την ιδιότητα Markov. Η πιθανότητα μετάβασης θα δίνεται από την σχέση $p(t_0, x; t_1, A) = P(X_{t_1}^{(t_0, x)} \in A)$ όπου $X^{(t_0, x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$X_t^{(t_0, x)} = x + \int_{t_0}^t vds + \int_{t_0}^t dB_s = x + (t - t_0)v + (B_t - B_{t_0})$$

Συνεπώς

$$p(t_0, x; t_1, A) = P(x + (t_1 - t_0)v + (B_{t_1} - B_{t_0}) \in A)$$

Επιλέγοντας σαν A το διάστημα $[y, y + dy]$ μπορούμε να δούμε ότι

$$\begin{aligned} p(t_0, x; t_1, y)dy &= P(B_{t_1} - B_{t_0} \in [y - x - (t_1 - t_0)v, y - x - (t_1 - t_0)v + dy]) \\ &= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1 - t_0}} \exp \left\{ -\frac{(y - (x + v(t_1 - t_0)))^2}{2(t_1 - t_0)} \right\} dy \end{aligned}$$

γιατί όπως γνωρίζουμε η κατανομή της διαφοράς $B_{t_1} - B_{t_0}$ είναι η κατανομή $N(0, t_1 - t_0)$. Έτσι καταλήγουμε στο ζητούμενο.

Παράδειγμα 5.4.2. Η γεωμετρική κίνηση Brown $X_t = \exp(at + bB_t)$, όπου B_t είναι μία κίνηση Brown και a, b σταθερές, είναι μία διαδικασία Markov με πυκνότητα μετάβασης

$$p(t_0, x; t_1, y) = \frac{1}{\sigma y \sqrt{2\pi(t_1 - t_0)}} \exp \left\{ -\frac{1}{2\sigma^2(t_1 - t_0)} \left[\ln \frac{y}{x} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) (t_1 - t_0) \right]^2 \right\}$$

Ο παραπάνω ισχυρισμός μπορεί να δειχθεί ως εξής. Γνωρίζουμε ότι η γεωμετρική κίνηση Brown είναι λύση της стоχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = rX_t dt + \sigma X_t dB_t$$

όπου οι σταθερές r, σ σχετίζονται με τις σταθερές a, b με τις σχέσεις

$$a = r - \frac{\sigma^2}{2}, \quad b = \sigma$$

Η стоχαστική διαφορική εξίσωση αυτή ικανοποιεί τις συνθήκες των θεωρημάτων 5.4.2 και 5.4.3, συνεπώς η λύση της είναι μία стоχαστική διαδικασία η οποία ικανοποιεί τόσο την ιδιότητα Markov όσο και την ισχυρή ιδιότητα Markov. Η πιθανότητα μετάβασης θα δίνεται από την σχέση $p(t_0, x; t_1, A) = P(X_{t_1}^{(t_0, x)} \in A)$ όπου $X^{(t_0, x)}$ είναι η λύση της стоχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$X_t^{(t_0, x)} = x + \int_{t_0}^t r X_s^{(t_0, x)} ds + \int_{t_0}^t \sigma X_s^{(t_0, x)} dB_s$$

Μπορούμε να δούμε κάνοντας χρήση του λήμματος του Itô, ότι η стоχαστική διαδικασία $X_t^{(t_0, x)}$ θα δίνεται από την σχέση

$$X_t^{(t_0, x)} = x \exp(a(t_1 - t_0) + b(B_{t_1} - B_{t_0}))$$

Συνεπώς

$$p(t_0, x; t_1, A) = P(x \exp(a(t_1 - t_0) + b(B_{t_1} - B_{t_0})) \in A)$$

Παίρνοντας $A = [y, y + dy]$, λαμβάνοντας υπόψη ότι $B_{t_1} - B_{t_0} \sim N(0, t_1 - t_0)$, και μετά από αρκετή και επίπονη άλγεβρα καταλήγουμε στο ζητούμενο αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 5.4.3. Έστω X_t η διαδικασία Itô που είναι λύση της стоχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = f(X_t)dt + g(X_t)dB_t$$

Ορίζουμε την συνάρτηση $v(t, x) := E_{t, x}[h(X(T))]$ όπου $h(x)$ είναι μία δεδομένη συνάρτηση και $0 \leq t \leq T$. Με $E_{t, x}[h(X_T)]$ συμβολίζουμε την μέση τιμή των τιμών της συνάρτησης h υπολογισμένη στα X_T όπου X_T είναι οι τιμές της διαδικασίας X_s την χρονική στιγμή T , δεδομένου ότι η X_t 'ξεκινάει' την χρονική στιγμή t στο σημείο x . Δείξτε ότι αν $X_0 = \xi$, η стоχαστική διαδικασία $v(t, X_t)$ είναι martingale δηλαδή ισχύει $E[v(t, X_t) | \mathcal{F}_s] = v(s, X_s)$.

Η X_t ικανοποιεί την ιδιότητα Markov. Συνεπώς

$$E[h(X_T) | \mathcal{F}_s] = E_{t, X_t}[h(X_T)] = v(t, X_t)$$

Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της υπό συνθήκη μέσης τιμής μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} E[v(t, X_t) | \mathcal{F}_s] &= E[E[h(X_T) | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] \\ &= E[h(X_T) | \mathcal{F}_s] = E_{s, X_s}[h(X_T)] = v(s, X_s) \end{aligned}$$

Στο τελευταίο χρησιμοποιήσαμε ξανά την ιδιότητα Markov για την стоχαστική διαδικασία X_t .

5.5 Αλλαγή μέτρου

Θα ασχοληθούμε τώρα με ένα θεώρημα το οποίο είναι πολύ χρήσιμο στο να μελετήσουμε το πως συνδέονται οι λύσεις δύο στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες έχουν διαφορετικές ταχύτητες. Το θεώρημα αυτό που οφείλεται στον Girsanov και που σχετίζεται επίσης και με κάποια προγενέστερα αποτελέσματα των Cameron και Martin ονομάζεται και θεώρημα αλλαγής μέτρου, και μας επιτρέπει να παράγουμε λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων από γνωστές λύσεις άλλων στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι αρκετά τεχνική και απαιτεί κάποια στοιχεία θεωρίας μέτρου.

Πριν παρουσιάσουμε το θεώρημα αυτό θα πρέπει να θυμηθούμε τον ορισμό του ισοδύναμου μέτρου.

Ορισμός 5.5.1. Ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας Δύο μέτρα πιθανότητας Q και P ονομάζονται **ισοδύναμα μέτρα πιθανότητας** αν για κάθε γεγονός A , $P(A) = 0$ αν και μόνο αν $Q(A) = 0$.

Στη περίπτωση αυτή υπάρχει πάντοτε μία τυχαία μεταβλητή ξ η οποία ονομάζεται η παράγωγος κατά Radon-Nikodym του Q ως προς το P με την ακόλουθη ιδιότητα:

Αν η Z είναι τέτοια ώστε $E_Q[|Z|] < \infty$ τότε $E_Q[Z] = E_P[\xi Z]$. Ένας αρκετά συνηθισμένος συμβολισμός είναι $\xi = \frac{dQ}{dP}$.

Η ισχύς του παραπάνω ισχυρισμού εξασφαλίζεται από το θεώρημα Radon-Nikodym το οποίο και παραθέτουμε:

Θεώρημα 5.5.1. (Το θεώρημα Radon-Nikodym) Έστω (Ω, \mathcal{F}, P) ένας διαχωρίσιμος χώρος πιθανοτήτων και έστω P και Q πεπερασμένα μέτρα που ορίζονται στην σ -άλγεβρα \mathcal{F} . Οι παρακάτω δύο προτάσεις είναι ισοδύναμες

- (i) Για κάθε $A \in \mathcal{F}$ ισχύει $P(A) = 0 \implies Q(A) = 0$
- (ii) Υπάρχει $k \in L^1$, $k \geq 0$ τέτοιο ώστε $Q(A) = \int_A k dP$

Η πυκνότητα k ονομάζεται και παράγωγος Radon-Nikodym και συμβολίζεται $k = \frac{dQ}{dP}$.

Για την απόδειξη και περαιτέρω στοιχεία για το θεμελιώδες αυτό θεώρημα της πραγματικής ανάλυσης παραπέμπουμε π.χ. στον Rudin [34].

Σχόλια:(1) Ένας χώρος πιθανοτήτων ονομάζεται **διαχωρίσιμος** αν υπάρχει μία ακολουθία η οποία είναι πυκνή στον $L^1(P)$

(2) Το θεώρημα Radon-Nikodym δεν περιορίζεται μόνο σε χώρους πιθανοτήτων αλλά ισχύει και για γενικότερους χώρους μέτρου.

Είμαστε λοιπόν σε θέση να παρουσιάσουμε το το θεώρημα του Girsanov:

Θεώρημα 5.5.2. (Girsanov) Ας θεωρήσουμε $u_t = (u_{1,t}, \dots, u_{n,t})$ ένα διάνυσμα από (τετραγωνικά ολοκληρώσιμες) στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν την συνθήκη του Novikov

$$E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T u_s \cdot u_s ds \right) \right] < \infty.$$

Έστω B_t μία τυπική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P . Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$M_t^u = \exp \left[- \int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s \cdot u_s ds \right], \quad t \in [0, T].$$

Η στοχαστική αυτή διαδικασία είναι μία martingale κάτω από το μέτρο P .

Θεωρείστε τώρα το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q^u που ορίζεται από το

$$\frac{dQ^u}{dP} = M_t^u$$

³Ελπίζουμε πως μέχρι τώρα θα έχει γίνει ξεκάθαρο στους αναγνώστες ότι αν έχουμε μία τυχαία μεταβλητή ξ , μπορούμε να ορίσουμε την μέση τιμή της ως προς **οποιοδήποτε** μέτρο πιθανότητας. Η απάντηση που θα πάρουμε θα εξαρτάται βεβαίως από την επιλογή του μέτρου πιθανότητας. Εφόσον ο ορισμός της martingale χρησιμοποιεί την έννοια της μέσης τιμής και της υπό συνθήκη μέσης τιμής μπορούμε να δούμε από τα παραπάνω ότι μία διαδικασία μπορεί να είναι martingale ως προς κάποιο μέτρο αλλά όχι martingale ως προς κάποιο άλλο μέτρο! Με τον ίδιο τρόπο, μία διαδικασία μπορεί να είναι κίνηση Brown ως προς κάποιο μέτρο αλλά όχι ως προς κάποιο άλλο.

Τότε η στοχαστική διαδικασία \bar{B}^u που ορίζεται από την σχέση

$$\bar{B}_t^u = B_t + \int_0^t u_s ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

είναι μία τυπική κίνηση Brown και μία martingale κάτω από το μέτρο Q^u . Επιπλέον, η \bar{B}^u έχει την ιδιότητα αναπαράστασης martingale, δηλαδή για κάθε τοπική Q^u -martingale L_t υπάρχει κάποια ϕ η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και τέτοια ώστε

$$L_t = L_0 + \int_0^t \phi_s d\bar{B}_s^u, \quad t \leq T$$

Σχόλιο: Στα επόμενα δεν θα χρησιμοποιήσουμε το πρόθεμα u στο μέτρο Q^u και στις στοχαστικές διαδικασίες M_t^u και \bar{B}_t^u .

Σαν βοηθητικό στο θεώρημα αυτό έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 5.5.3. Έστω X η διαδικασία Itô

$$X_t = x + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

στο \mathbb{R}^n . Έστω ν_t ένα διάνυσμα ολοκληρώσιμων στοχαστικών διαδικασιών και ας θεωρήσουμε ότι υπάρχει ένα διάνυσμα από στοχαστικές διαδικασίες u_t οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες και τέτοιες ώστε

$$u_t \sigma_t = \mu_t - \nu_t$$

Τότε αν η M^u είναι martingale κάτω από το μέτρο P (για το οποία αρκεί να ισχύει η συνθήκη του Novikov) η X είναι επίσης διαδικασία Itô με

$$X_t = x + \int_0^t \nu_t ds + \int_0^t \sigma_s d\bar{B}_s^u$$

όπου \bar{B}_s^u είναι η τυπική κίνηση Brown ως προς το μέτρο Q^u που ορίζεται ως

$$\bar{B}_t^u = B_t + \int_0^t u_s ds$$

Απόδειξη: Η απόδειξη αποτελεί εφαρμογή του θεωρήματος 5.5.2. \square

Το θεώρημα του Girsanov μπορεί να το δει κανείς διαισθητικά ως εξής: Ας υποθέσουμε πως από τις κρατάμε τις τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας \bar{B}_t ως έχουν, δηλαδή κρατάμε μία συλλογή από συναρτήσεις της μορφής $\bar{B}_t(\omega)$ και αλλάζουμε την συχνότητα εμφάνισης των διαφορετικών ω . Αυτό είναι ισοδύναμο με το να αλλάζουμε το μέτρο P με το ισοδύναμο μέτρο Q . Κάτω από μία νέα, κατάλληλα επιλεγμένη, συχνότητα εμφάνισης των ω μπορεί η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t να είναι μία κίνηση Brown. Αυτό είναι σε αναλογία με τα παραδείγματα που είχαμε δει στο κεφάλαιο σχετικά με τις διαδικασίες martingale (βλ. παραδείγματα 2.1.1- 2.1.3 και τα σχόλια που το ακολουθούν).

Το θεώρημα του Girsanov μας επιτρέπει να αλλάζουμε την ταχύτητα σε στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις και κατά κάποιο τρόπο συνδέει τις λύσεις διαφορετικών στοχαστικών εξισώσεων μεταξύ τους. Όπως θα δούμε και πιο κάτω μέσω της αναπαράστασης Feynman-Kac μπορεί και να συνδέει λύσεις διαφορετικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους μεταξύ τους.

Το θεώρημα του Girsanov είναι ένα θεμελιώδες και σημαντικό αποτέλεσμα για την στοχαστική ανάλυση.

Παράδειγμα 5.5.1. Μία κίνηση Brown με ταχύτητα. Στα πλαίσια του θεωρήματος του Girsanov θα μελετήσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$\bar{B}_t = \int_0^t u_s ds + B_t$$

όπου B_t είναι μία τυπική μονοδιάστατη κίνηση Brown και u είναι μία μονοδιάστατη διαδικασία (τέτοια ώστε η u_s είναι \mathcal{F}_s -μετρήσιμη). Η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown με ταχύτητα u_s (όχι απαραίτητα ντετερμινιστική). Ακολουθώντας το θεώρημα του Girsanov μπορούμε να ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds \right)$$

και το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q που ορίζεται έτσι ώστε

$$Q(A) = \int_A Z_T dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad t < T$$

Σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο \bar{P} . Αποδειξτε ότι

- (1) η στοχαστική διαδικασία Z_t είναι μία martingale κάτω από το μέτρο πιθανότητας P (κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία B_t είναι μία κίνηση Brown). και
- (2) η στοχαστική διαδικασία Z_t^{-1} είναι μία martingale κάτω από το μέτρο πιθανότητας \bar{P} (κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown).

Απόδειξη: (1) Θα γράψουμε την Z_t σαν $Z_t = \exp(Y_t)$, όπου

$$Y_t = - \int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds$$

και θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα του Itô για να υπολογίσουμε το διαφορικό της Z_t :

$$dZ_t = \exp(Y_t) dY_t + \frac{1}{2} \exp(Y_t) (dY_t)^2$$

όπου

$$\begin{aligned} dY_t &= -u_t dB_t - \frac{1}{2} u_t^2 dt \\ (dY_t)^2 &= -u_t^2 (dB_t)^2 = -u_t^2 dt \end{aligned}$$

(χρησιμοποιήσαμε τους κανόνες του λογισμού του Itô). Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στην παραπάνω έχουμε ότι

$$dZ_t = \exp(Y_t) u_t dB_t = -Z_t u_t dB_t \implies Z_t = Z_0 - \int_0^t Z_s u_s dB_s$$

Το τελευταίο είναι ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην στοχαστική διαδικασία B_t η οποία είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P . Από τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να δούμε πως η Z_t είναι μία martingale κάτω από το μέτρο P .

Ας τονίσουμε εδώ ότι η Z_t **δεν** είναι martingale κάτω από το μέτρο \bar{P} ! Αυτό γιατί η B_t **δεν** είναι κίνηση Brown κάτω από το μέτρο αυτό!

(2) Μια και θα εργαστούμε κάτω από το μέτρο \bar{P} θα εκφράσουμε όλα τα διαφορικά συναρτήσει της στοχαστικής διαδικασίας \bar{B}_t η οποία γνωρίζουμε ως είναι και μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο αυτό. Από τον ορισμό της \bar{B}_t έχουμε

$$d\bar{B}_t = u_t dt + dB_t$$

οπότε και

$$Z_t = \exp \left(- \int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds \right) = \exp \left(- \int_0^t u_s d\bar{B}_s + \frac{1}{2} \int_0^t u_s^2 ds \right)$$

Συνεπώς $Z_t^{-1} = \exp(-Y_t)$ όπου τώρα $Y_t = -u_t d\bar{B}_t + \frac{1}{2}u_t^2 dt$. Θα εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στο Z_t^{-1} και θα πάρουμε

$$d(Z_t^{-1}) = \exp(-Y_t) \left(dY_t + \frac{1}{2}(dY_t)^2 \right)$$

Εφόσον εργαζόμαστε κάτω από το μέτρο \bar{P} (κάτω από το οποίο η διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown) οι κανόνες του λογισμού του Itô τώρα θα είναι $d\bar{B}_t d\bar{B}_t = dt$ και θα έχουμε

$$dY_t = u_t^2 d\bar{B}_t d\bar{B}_t = u_t^2 dt$$

οπότε αντικαθιστώντας παίρνουμε ότι

$$d(Z_t^{-1}) = \exp(-Y_t) u_t d\bar{B}_t \implies Z_t^{-1} = Z_0^{-1} + \int_0^t Z_s^{-1} u_s d\bar{B}_s$$

Εφόσον κάτω από το μέτρο \bar{P} η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown από τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος βλέπουμε ότι η Z_t^{-1} (που μπορεί να γραφεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην \bar{B}_t) θα είναι μία martingale κάτω από το μέτρο αυτό. Βέβαια η Z_t^{-1} δεν είναι μία martingale κάτω από το μέτρο P !

Παράδειγμα 5.5.2. Υπολογισμός μέσων τιμών κάτω από το καινούργιο μέτρο

Στο παράδειγμα αυτό θα δώσουμε ένα τρόπο υπολογισμού των μέσων τιμών κάτω από την αλλαγή μέτρου. Ας θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή f είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη. Τότε

$$(5.-125) \quad E_Q[f] = \int f dQ = \int f \frac{dQ}{dP} dP = E_P \left[f \frac{dQ}{dP} \right] = E_P[f Z_T]$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον νόμο της ολικής πιθανότητας παίρνοντας μέσες τιμές υπό συνθήκη ως προς την \mathcal{F}_t . Ο λόγος που το κάνουμε αυτό είναι γιατί ξέρουμε ότι η f είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη και η Z_t είναι μία martingale ως προς το μέτρο P . Έχουμε λοιπόν

$$E_P[f Z_T] = E_P[E_P[f Z_T | \mathcal{F}_t]] = E_P[f E_P[Z_T | \mathcal{F}_t]] = E_P[Z_t f]$$

Ο υπολογισμός των υπό συνθήκη μέσων τιμών κάτω από το καινούργιο μέτρο δεν είναι όμως τόσο απλή υπόθεση! Αυτό φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα το οποίο μας δίνει ένα τύπο με βάση τον οποίο μπορούμε να υπολογίζουμε την υπό συνθήκη μέση τιμή ως προς κάποια σ-άλγεβρα στο καινούργιο μέτρο. Ο τύπος αυτός είναι εξαιρετικά χρήσιμος στην αμελέτη της αποτίμησης παραγώγων συμβολαίων.

Παράδειγμα 5.5.3. Υπολογισμός των υπό συνθήκη μέσων τιμών κάτω από το καινούργιο μέτρο

Ας θεωρήσουμε ότι η τυχαία μεταβλητή g είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη και ότι $s < t$. Τότε

$$(5.-125) \quad E_Q[g | \mathcal{F}_s] = Z_s^{-1} E_P[g Z_t | \mathcal{F}_s]$$

Για να αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό της υπό συνθήκης μέσης τιμής. Θα πρέπει να δείξουμε λοιπόν ότι για οποιοδήποτε $A \in \mathcal{F}_s$ θα ισχύει

$$(5.-124) \quad \int_A Z_s^{-1} E_P[g Z_t | \mathcal{F}_s] dQ = \int_A g dQ$$

Πράγματι

$$\int_A Z_s^{-1} E_P[g Z_t | \mathcal{F}_s] dQ = E_Q[\mathbf{1}_A Z_s^{-1} E_P[g Z_t | \mathcal{F}_s]]$$

Εφαρμόζουμε τώρα το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.5.2 για την τυχαία μεταβλητή $f = Z_s^{-1} E_P[g Z_t | \mathcal{F}_s]$ η οποία είναι \mathcal{F}_s -μετρήσιμη. Έχουμε λοιπόν ότι

$$E_Q[\mathbf{1}_A Z_s^{-1} E_P[g Z_t | \mathcal{F}_s]] = E_Q[f] = E_P[Z_s f] = E_P[\mathbf{1}_A E_P[g Z_t | \mathcal{F}_s]]$$

Εφόσον $A \in \mathcal{F}_s$ η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{1}_A$ είναι \mathcal{F} -μετρήσιμη και συνεπώς μπορούμε να την περάσουμε μέσα στην υπό συνθήκη πιθανότητα ως προς την σ -άλγεβρα αυτή

$$\begin{aligned} E_P[\mathbf{1}_A E_P[gZ_t | \mathcal{F}_s]] &= E_P[E_P[\mathbf{1}_A gZ_t | \mathcal{F}_s]] \\ &= E_P[\mathbf{1}_A gZ_t] = E_Q[\mathbf{1}_A g] = \int_A g dQ \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο χρησιμοποιήσαμε ξανά το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.5.2 για την τυχαία μεταβλητή $\mathbf{1}_A g$ η οποία είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη (εφόσον $s < t$ έχουμε ότι $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$ και αφού η $\mathbf{1}_A$ είναι \mathcal{F}_s -μετρήσιμη θα είναι και \mathcal{F}_t -μετρήσιμη). Συνεπώς αποδείξαμε την σχέση (5.-124) και άρα ο αρχικός μας ισχυρισμός ισχύει.

Με βάση τα αποτελέσματα των δύο παραπάνω παραδειγμάτων μπορούμε να υπολογίζουμε τις μέσες τιμές και τις υπό συνθήκη μέσες τιμές ποσοτήτων κάτω από διαφορετικά μέτρα. Αυτό μας δίνει ένα τρόπο να υπολογίζουμε συναρτησοειδή των τροχιών περίπλοκων στοχαστικών διαδικασιών επάνω στις τροχιές πιο απλών στοχαστικών διαδικασιών κάνοντας την κατάλληλη αλλαγή μέτρου. Σαν ένα απλό παράδειγμα δίνουμε τον υπολογισμό των χρόνων εξόδου της κίνησης Brown με ταχύτητα από ένα χωρίο.

Παράδειγμα 5.5.4. Χρησιμοποιείστε το θεώρημα του Girsanov για να υπολογίσετε την κατανομή των χρόνων εξόδου για μία κίνηση Brown με ταχύτητα u δηλαδή της στοχαστικής διαδικασίας $\bar{B}_t = B_t + ut$ όπου B_t είναι η τυπική κίνηση Brown.

Έστω $\bar{T}_a = \inf\{t : \bar{B}_t = a\}$. Θα υπολογίσουμε πρώτα την πιθανότητα $P(\bar{T}_a \leq t)$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov μπορούμε να ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$Z_t = \exp\left(-uB_t - \frac{1}{2}u^2t\right)$$

και το ισοδύναμο μέτρο Q , τέτοιο ώστε

$$Q(A) = \int_A Z_T dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad t < T$$

κάτω από το οποίο η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown. Έχουμε λοιπόν

$$P(\bar{T}_a \leq t) = E_P[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}}] = E_Q[Z_T^{-1} \mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}}]$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η τυχαία μεταβλητή $\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}}$ είναι \mathcal{F}_t -μετρήσιμη (το \bar{T}_a είναι ένας χρόνος στάσης) και το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.5.2. Κάτω από το μέτρο αυτό όμως η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown. Μπορούμε να υπολογίσουμε λοιπόν την μέση τιμή αφού βέβαια πρώτα γράψουμε την Z_t συναρτήσει της \bar{B}_t . Έχουμε

$$Z_t = \exp\left(-u\bar{B}_t + \frac{1}{2}u^2t\right)$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} P(\bar{T}_a \leq t) &= E_Q\left[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}} \exp\left(+u\bar{B}_T - \frac{1}{2}u^2T\right)\right] \\ &= E_Q\left[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}} E_Q\left[\exp\left(u\bar{B}_T - \frac{1}{2}u^2T\right) \mid \mathcal{F}_{\bar{T}_a \wedge t}\right]\right] \\ &\quad (\text{η } Z_T \text{ είναι μία } Q\text{-martingale}) \\ &= E_Q\left[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}} \exp\left(u\bar{B}_{\bar{T}_a \wedge t} - \frac{1}{2}u^2(\bar{T}_a \wedge t)\right)\right] \\ &\quad (\text{περιοριζόμαστε στο } T_a \leq t \text{ και ισχύει } \bar{B}_{T_a} = a) \\ &= E_Q\left[\mathbf{1}_{\{\bar{T}_a \leq t\}} \exp\left(ua - \frac{1}{2}u^2\bar{T}_a\right)\right] \\ (5.-137) \quad &= \int_0^t Q(\bar{T}_a \in ds) \exp\left(ua - \frac{1}{2}u^2\bar{T}_a\right) \end{aligned}$$

όπου με $Q(\bar{T}_a \in ds)$ συμβολίζουμε, ως συνήθως, την πιθανότητα κάτω από το μέτρο Q ο χρόνος εξόδου της \bar{B}_t από το χωρίο $x \leq a$ να βρίσκεται στο διάστημα $(s, s + ds)$. Αυτή η πιθανότητα φυσικά μπορεί να γραφεί και ως $Q(\bar{T}_a \in ds) = f_{\bar{T}_a}(s)ds$ όπου $f_{\bar{T}_a}(s)$ η πυκνότητα πιθανότητας του χρόνου εξόδου \bar{T}_a (κάτω από το μέτρο Q). Κάτω από το μέτρο Q όμως γνωρίζουμε ότι η \bar{B}_t είναι τυπική κίνηση Brown, συνεπώς

$$(5.-136) \quad Q(\bar{T}_a \in dt) = P(T_a \in dt) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2t}\right) dt$$

για $0 < t \leq T$. Αντικαθιστώντας την 5.-137 στην 5.-136 λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} P(\bar{T}_a \leq t) &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left(-\frac{a^2}{2s}\right) \exp\left(ua - \frac{1}{2}u^2 s\right) ds \\ &= \int_0^t \frac{a}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left[-\frac{(a-us)^2}{2s}\right] ds \end{aligned}$$

από όπου καταλήγουμε για την πυκνότητα πιθανότητας ότι ισχύει

$$P(\bar{T}_a \in dt) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left[-\frac{(a-ut)^2}{2t}\right] dt$$

Θα μπορούσαμε να οδηγηθούμε στο αποτέλεσμα αυτό και διαφορετικά, κάνοντας τον υπολογισμό του μετασχηματισμού Laplace του χρόνου εξόδου. Υπολογισμοί σαν τον παραπάνω είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην αποτίμηση των λεγομένων εξωτικών παραγώγων συμβολαίων.

Με την χρήση του θεωρήματος του Girsanov μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε και άλλες ενδιαφέρουσες ποσότητες για την κίνηση Brown με ταχύτητα, όπως π.χ. την κατανομή του μεγίστου της.

Παράδειγμα 5.5.5. Υπολογίστε την απο κοινού κατανομή του μεγίστου και της ίδιας της κίνησης Brown με ταχύτητα u χρησιμοποιώντας το θεώρημα του Girsanov.

Έστω $\bar{B}_t = ut + B_t$ η κίνηση Brown με ταχύτητα u και \bar{M}_t το μέγιστο της μέχρι τον χρόνο t . Σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov, αν ορίσουμε το μέτρο Q έτσι ώστε

$$\frac{dQ}{dP} = Z_T = \exp\left(-uB_T - \frac{1}{2}u^2T\right) = \exp\left(-u\bar{B}_T + \frac{1}{2}u^2T\right)$$

ή ισοδύναμα

$$Q(A) = \int_A Z_T dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad t < T$$

η \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q . Συνεπώς κάτω από το μέτρο αυτό θα ισχύει η αρχή της ανάκλασης για την \bar{B}_t . Σύμφωνα με αυτή μπορούμε να αποδείξουμε ότι

$$(5.-140) \quad Q(\bar{M}_t > \bar{m}, \bar{B}_t < \bar{b}) = Q(\bar{B}_t > 2\bar{m} - \bar{b}) = \int_{2\bar{m}-\bar{b}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dy$$

όπου ισχύει ο περιορισμός $\bar{m} > 0, \bar{b} < \bar{m}$. Ο περιορισμός αυτός είναι προφανής αφού εφόσον η \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown (κάτω από το Q) η οποία αρχίζει στο 0, το μέγιστο της μέχρι την χρονική στιγμή t θα είναι απαραίτητα μεγαλύτερο από το 0, ενώ η τιμή της \bar{B}_t θα είναι πάντοτε μικρότερη από το μέγιστο της ($\bar{b} < \bar{m}$). Από την σχέση (5.-140) μπορούμε να υπολογίσουμε την κοινή κατανομή των μεγίστων της κίνησης Brown με ταχύτητα και της κίνησης Brown με ταχύτητα, κάτω από το μέτρο Q :

$$\begin{aligned} Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in d\bar{b}) &= -\frac{\partial^2}{\partial \bar{m} \partial \bar{b}} (Q(\bar{M}_t > \bar{m}, \bar{B}_t < \bar{b})) d\bar{m} d\bar{b} \\ (5.-140) \quad &= \frac{2(2\bar{m} - \bar{b})}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2\bar{m} - \bar{b})^2}{2t}\right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το αποτέλεσμα αυτό μπορούμε να εκφράσουμε την μέση τιμή κάτω από το μέτρο Q μίας οποιασδήποτε συνάρτησης $f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)$:

$$\begin{aligned} E_Q[f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)] &= \int_{\bar{m}=0}^{\infty} \int_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} f(\bar{m}, \bar{b}) Q(\bar{M}_t > \infty, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b} \\ &= \int_{\bar{m}=0}^{\infty} \int_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} f(\bar{m}, \bar{b}) \frac{2(2\bar{m} - \bar{b})}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2\bar{m} - \bar{b})^2}{2t}\right) d\bar{m} d\bar{b} \end{aligned}$$

Αν θέλαμε την ίδια μέση τιμή κάτω από το μέτρο P η μέση τιμή αυτή θα μπορούσε να εκφραστεί με την βοήθεια της κοινής κατανομής της \bar{B}_t και των μεγίστων της κάτω όμως τώρα από το μέτρο P :

$$(5.-141) \quad E_P[f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)] = \int_{\bar{m}=0}^{\infty} \int_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} f(\bar{m}, \bar{b}) P(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b}$$

όπου $P(\bar{M}_t > \infty, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b}$ είναι η ζητούμενη κοινή κατανομή. Τώρα θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Girsanov για να υπολογίσουμε την μέση τιμή που εμφανίζεται στην σχέση (5.-141). Σύμφωνα με αυτό

$$\begin{aligned} (5.-141) \quad E_P[f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)] &= E_Q[Z_t^{-1} f(\bar{M}_t, \bar{B}_t)] \\ &= E_Q \left[\exp\left(u\bar{B}_t - \frac{1}{2}u^2t\right) f(\bar{M}_t, \bar{B}_t) \right] \\ &= \int_{\bar{m}=0}^{\infty} \int_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} \exp\left(u\bar{b} - \frac{1}{2}u^2t\right) f(\bar{m}, \bar{b}) Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b} \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις (5.-141) και (5.-141) καταλήγουμε ότι

$$P(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) = \exp\left(u\bar{b} - \frac{1}{2}u^2t\right) Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b})$$

όπου η $Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b})$ δίνεται από την (5.-140).

Με βάση το παραπάνω αποτέλεσμα μπορούμε να υπολογίσουμε, με διαφορετικό τρόπο από ότι στο παράδειγμα 5.5.4, τους χρόνους εξόδου της κίνησης Brown με ταχύτητα u .

Παράδειγμα 5.5.6. Αν $\bar{T}_a = \inf\{t : \bar{B}_t \geq a\}$ βρείτε την πιθανότητα $P(\bar{T}_a \leq t)$ κάνοντας χρήση της από κοινού κατανομής του μεγίστου και της ίδιας της κίνησης Brown με ταχύτητα u .

Έχουμε ότι

$$P(\bar{T}_a \leq t) = P(\bar{M}_t \geq a) = E_P(\mathbf{1}_{\{\bar{M}_t \geq a\}})$$

θα εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 5.5.5 επιλέγοντας

$$f(\bar{M}_t, \bar{B}_t) = \mathbf{1}_{\{\bar{M}_t \geq a\}}.$$

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} (5.-144) \quad E_P(\mathbf{1}_{\{\bar{M}_t \geq a\}}) &= \int_{\bar{m}=0}^{\infty} \int_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} \exp\left(u\bar{b} - \frac{1}{2}u^2t\right) \mathbf{1}_{\{\bar{M}_t \geq a\}} Q(\bar{M}_t \in d\bar{m}, \bar{B}_t \in \bar{b}) d\bar{m} d\bar{b} \\ &= \int_{\bar{m}=a}^{\infty} \int_{\bar{b}=-\infty}^{\bar{m}} \exp\left(u\bar{b} - \frac{1}{2}u^2t\right) \frac{2(2\bar{m} - \bar{b})}{t\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(2\bar{m} - \bar{b})^2}{2t}\right) d\bar{b} d\bar{m} \end{aligned}$$

Ας δούμε τώρα μία εφαρμογή του θεωρήματος του Girsanov σε ένα κλασσικό μοντέλο της χρηματοοικονομικής, την γεωμετρική κίνηση Brown. Όπως έχουμε δει μέχρι τώρα η γεωμετρική κίνηση Brown χρησιμοποιείται για την μοντελοποίηση των τιμών των μετοχών στις χρηματαγορές. Η γεωμετρική κίνηση Brown είναι μία διαδικασία Itô με κάποια ταχύτητα. Είναι δυνατό να βρούμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από αυτό η διαδικασία αυτή να παίρνει πιο απλή μορφή; Η απάντηση του ερωτήματος αυτού που είναι ιδιαίτερα σημαντικό για την χρηματοοικονομική (βλ. πχ. την παράγραφο 2.7.1 ή την παράγραφο 2.7.2) δίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Παράδειγμα 5.5.7. Το θεώρημα του Girsanov και η γεωμετρική κίνηση Brown. Θα εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα του Girsanov σε ένα απλό μοντέλο για την τιμή των μετοχών, την γεωμετρική κίνηση Brown που είδαμε λίγο παραπάνω. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό, αν S_t είναι η τιμή ενός χρεωγράφου, τότε οι μεταβολές της δίνονται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

όπου B_t είναι μία κίνηση Brown (κάτω από το μέτρο P). Είναι φανερό ότι για $\mu \neq 0$ η στοχαστική διαδικασία S_t δεν μπορεί να είναι μία martingale. Θέτουμε τα εξής ερωτήματα:

1. Είναι δυνατό, να βρούμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q' τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία S_t να μην έχει ταχύτητα και να είναι μία martingale;
2. Είναι δυνατό να βρούμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η στοχαστική διαδικασία S_t να έχει ταχύτητα rS_t όπου r είναι καθορισμένη συνάρτηση του χρόνου (πιθανόν και σταθερά). Το r πολλές φορές σε εφαρμογές στην χρηματοοικονομική επιλέγεται ίσο με το επιτόκιο.
3. Υπολογίστε τις μέσες τιμές $E_P[S_t]$, $E_{Q'}[S_t]$ και $E_Q[S_t]$.

Απάντηση:

1. Θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η ταχύτητα της S_t να μηδενίζεται. Ας θεωρήσουμε για ευκολία ότι το μ είναι σταθερό. Ας ξεκινήσουμε με την στοχαστική διαφορική εξίσωση που ακολουθεί η τιμή της μετοχής

$$(5.-144) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

όπου B_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P . Θα αναδιατάξουμε την εξίσωση αυτή. Έχουμε λοιπόν

$$(5.-143) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t = \sigma S_t \left(\frac{\mu}{\sigma} dt + dB_t \right)$$

Ας ονομάσουμε $u' = \frac{\mu}{\sigma}$ ας και ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία $\bar{B}'_t = u' t + B_t$. Μπορούμε σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov να δούμε ότι η \bar{B}'_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q' το οποίο ορίζεται από την σχέση

$$Q'(A) = \int_A Z'_T dP, \quad \forall A \in \mathcal{F}, \quad t < T$$

όπου

$$Z'_t = \exp \left(-u' B_t - \frac{1}{2} u'^2 t \right) = \exp \left(-u' \bar{B}'_t + \frac{1}{2} u'^2 t \right)$$

Έχουμε λοιπόν από την (5.-143) ότι

$$(5.-144) \quad dS_t = \sigma S_t d\bar{B}'_t$$

όπου \bar{B}'_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q' . Κάτω από το μέτρο αυτό η S_t δίνεται από ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown συνεπώς η S_t είναι μία Q' martingale. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται πολύ απλά για την περίπτωση που μ είναι συνάρτηση του χρόνου και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη. Στην περίπτωση αυτή μόνο λίγο προσοχή στους περιορισμούς για την ισχύ του θεωρήματος του Girsanov και συγκεκριμένα στην συνθήκη του Novikov.

2. Θα προσπαθήσουμε τώρα να ορίσουμε ένα μέτρο πιθανότητας τέτοιο ώστε κάτω από το μέτρο αυτό η ταχύτητα της S_t να είναι καθορισμένη και ίση με rS_t . Θα θεωρήσουμε ξανά ότι μ, r, σ σταθερές. Έχουμε λοιπόν

$$(5.-143) \quad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t = rS_t dt + \sigma S_t \left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t \right)$$

Ας ονομάσουμε $u = \frac{\mu - r}{\sigma}$ ας και ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία $\bar{B}_t = ut + B_t$. Μπορούμε σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov να δούμε ότι η \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q το οποίο ορίζεται από την σχέση

$$Q(A) = \int_A Z_T dP \quad \forall A \in \mathcal{F} \quad t < T$$

όπου

$$Z_t = \exp \left(-uB_t - \frac{1}{2}u^2t \right) = \exp \left(-u\bar{B}_t + \frac{1}{2}u^2t \right)$$

Έχουμε λοιπόν από την (5.-143) ότι

$$(5.-144) \quad dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\bar{B}_t$$

όπου \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q . Κάτω από το μέτρο αυτό η S_t δίνεται από ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown και τον όρο $rS_t dt$ συνεπώς η S_t έχει κάτω από το μέτρο αυτό την ζητούμενη ταχύτητα. Το αποτέλεσμα αυτό γενικεύεται πολύ απλά για την περίπτωση που μ είναι συνάρτηση του χρόνου και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη.

3. Θα υπολογίσουμε τώρα τις μέσες τιμές της S_t κάτω από τα διαφορετικά μέτρα P, Q' και Q . Από την σχέση (5.-144) έχουμε ότι

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma B_t \right),$$

όπου B_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P . Συνεπώς

$$E_P[S_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{y^2}{2t} \right) S_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma y \right) dy = S_0 \exp(\mu t)$$

Από την σχέση (5.-144) έχουμε ότι

$$S_t = S_0 \exp \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma \bar{B}'_t \right),$$

όπου \bar{B}'_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q' . Συνεπώς

$$E_{Q'}[S_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{y^2}{2t} \right) S_0 \exp \left(-\frac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma y \right) dy = S_0$$

Από την σχέση (5.-144) έχουμε ότι

$$S_t = S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma \bar{B}_t \right),$$

όπου \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q . Συνεπώς

$$E_Q[S_t] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp \left(-\frac{y^2}{2t} \right) S_0 \exp \left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) t + \sigma y \right) dy = S_0 \exp(rt)$$

Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Girsanov μπορούμε να υπολογίσουμε ασθενείς λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων.

Παράδειγμα 5.5.8. Ας υποθέσουμε ότι Y_t είναι μία γνωστή ασθενής ή ισχυρή λύση της εξίσωσης

$$(5.-149) \quad dY_t = b(Y_t)dt + \sigma(Y_t)dB_t$$

$$(5.-148) \quad b: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \sigma: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m},$$

και B_t μία m -διάστατη κίνηση Brown. Κάνοντας χρήση του θεωρήματος του Girsanov χρησιμοποιώντας την X_t βρείτε μία ασθενή λύση της εξίσωσης

$$(5.-147) \quad dX_t = a(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει $u_0: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε να επιλύει την εξίσωση

$$\sigma(y)u_0(y) = b(y) - a(y), \quad y \in \mathbb{R}^n$$

και η στοχαστική διαδικασία $u_0(Y_t)$ να ικανοποιεί την συνθήκη του Novikou. Τότε, σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov μπορούμε να ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$\bar{B}_t = \int_0^t u_0(Y_s)ds + B_t$$

η οποία είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q που ορίζεται σύμφωνα με την σχέση

$$\frac{dQ}{dP} = M_t$$

και για την οποία ισχύει

$$(5.-149) \quad dY_t = a(Y_t)dt + \sigma(Y_t)d\bar{B}_t$$

Εφόσον λοιπόν η (\bar{B}_t, Q) είναι μία κίνηση Brown τέτοια ώστε η Y_t να ικανοποιεί την (5.-149) από τον ορισμό των ασθενών λύσεων μπορούμε να συμπεράνουμε ότι η (Y_t, \bar{B}_t) είναι μία ασθενής λύση της εξίσωσης (5.-147).

5.6 Σχέση με διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους

Θα ασχοληθούμε τώρα με την στενή σχέση των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων με τις ελλειπτικές και παραβολικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους.

5.6.1 Ο γεννήτορας μίας διαδικασίας διάχυσης

Με κάθε διαδικασία διάχυσης μπορούμε να συνδέσουμε έναν διαφορικό τελεστή δεύτερης τάξης με μερικές παραγώγους. Ο τελεστής αυτός ονομάζεται ο γεννήτορας της διάχυσης X_t .

Ορισμός 5.6.1. Έστω X_t μία χρονικά ομογενής διάχυση Itô στο \mathbb{R}^n . Ο απειροστός γεννήτορας A της X_t ορίζεται από το

$$Af(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_x[f(X_t)] - f(x)}{t}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

Ο παραπάνω τύπος μας λέει με λόγια ότι για τον υπολογισμό της δράσης του γεννήτορα τελεστή της X_t σε μία συνάρτηση $f(x)$ θα πρέπει να ξεκινήσουμε μία διαδικασία Itô στο σημείο x και να την αφήσουμε να 'τρέξει' για χρόνο t . Υπολογίζουμε την τιμή της συνάρτησης f στο σημείο που έφτασε η διαδικασία διάχυσης δηλαδή υπολογίζουμε την ποσότητα $f(X_t)$. Επαναλαμβάνουμε για πολλές πραγματοποιήσεις της διαδικασίας αυτής (ξεκινώντας πάντοτε από το αρχικό σημείο x) και παίρνουμε την μέση τιμή. Μετά αφαιρούμε την $f(x)$ και παίρνουμε το όριο $t \rightarrow 0$. Η συνάρτηση που προκύπτει είναι η δράση του τελεστή A στην συνάρτηση $f(x)$, δηλαδή είναι η $Af(x)$.

Ο ορισμός αυτός μπορεί να γενικευθεί και για μη χρονικά ομογενείς διαχύσεις (διαδικασίες Itô). Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να λάβουμε υπόψη και το χρονικό σημείο στο οποίο έχουμε ξεκινήσει. Συνεπώς, στον απειροστό γεννήτορα θα πρέπει να αντικαταστήσουμε σαν αρχική συνθήκη το ζεύγος (x_0, t_0) , δηλαδή να θεωρήσουμε ότι η

διάχυση (διαδικασία Itô) 'ξεκινάει' την χρονική στιγμή t_0 στο χωρικό σημείο x_0 . Σε αναλογία με τον συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε στην παρουσίαση της ιδιότητας Markov θα συμβολίσουμε την διαδικασία αυτή ως $X_t^{(t_0, x_0)}$. Ο τελεστής A στην περίπτωση αυτή επιδρά τόσο στις χωρικές όσο και στις χρονικές συντεταγμένες συνεπώς θα οριστεί ως

$$Af(t_0, x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{E_x[f(X_t^{(t_0, x_0)})] - f(t_0, x_0)}{t}, \quad t_0 \in \mathbb{R}_+, x_0 \in \mathbb{R}^n.$$

Γνωρίζουμε ότι μία διαδικασία Itô μπορεί να παρασταθεί σαν ένα ολοκλήρωμα κατά Riemann και σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα. Στην αναπαράσταση αυτή χρησιμοποιούνται κάποιοι συντελεστές. Θα ήταν χρήσιμο αν μπορούσαμε να εκφράσουμε τον γεννήτορα τελεστή της διάχυσης συναρτήσει των συντελεστών αυτών.

Έχουμε το ακόλουθο πολύ σημαντικό θεώρημα:

Θεώρημα 5.6.1. Έστω $X_t \in \mathbb{R}^n$ μία χρονικά ομογενής διάχυση Itô που δίνεται σαν λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t,$$

όπου η κίνηση Brown θεωρείται ότι είναι m -διάστατη, και τα b και σ είναι κατάλληλα επιλεγμένα διανύσματα και πίνακες, αντίστοιχα. Τότε

$$Af(x) = \sum_{i=1}^n b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma \sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

όπου με σ^T συμβολίζεται ο ανάστροφος πίνακας.

Απόδειξη: Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στην χρήση του λήμματος του Itô. Εφαρμόζοντας το λήμμα του Itô στην συνάρτηση $f(x)$ και θέτοντας $x = X_t$ μπορούμε να δούμε, κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του στοχαστικού ολοκληρώματος Itô ότι

$$E_x[f(X_t)] - f(x) = E \left[\int_0^t \left(\sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_s) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma \sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(X_s) \right) ds \right]$$

όπου το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι ένα ολοκλήρωμα Riemann. Κάνοντας χρήση των ιδιοτήτων του ολοκληρώματος Riemann, της συνέχειας της διαδικασίας X_s και των ιδιοτήτων της f έπεται το ζητούμενο. □

Σχόλιο Η συνθήκη της χρονικής ομοιογένειας των συντελεστών μπορεί να παραλειφθεί. Αν οι συντελεστές περιέχουν εκπεφρασμένα τον χρόνο, τότε ο γεννήτορας τελεστής θα έχει τυπικά την ίδια μορφή μόνο που οι συντελεστές του θα περιέχουν χρονική εξάρτηση. Σε τέτοιες περιπτώσεις χρειάζεται λίγο προσοχή σχετικά με το ορισμό του πεδίου ορισμού του τελεστή αυτού. Η τυπική μορφή του τελεστή θα είναι

$$Af(t, x) = \sum_{i=1}^n b_i(t, x) \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (\sigma(t, x) \sigma^T(t, x))_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Το πολύ σημαντικό αποτέλεσμα που μας δίνει το παραπάνω θεώρημα είναι ότι με κάθε διάχυση (κάθε διαδικασία Itô) μπορεί να συσχετιστεί ένας διαφορικός τελεστής με μερικές παραγώγους⁴

Ο τελεστής αυτός έχει την ακόλουθη σημαντική ιδιότητα:

Θεώρημα 5.6.2. Η στοχαστική διαδικασία

$$Z_t = f(X_t) - \int_0^t Af(X_s)ds$$

είναι μία martingale.

⁴Ο τελεστής αυτός είναι ελλειπτικού ή πιθάνον παραβολικού τύπου (βλ. [9], [36]) και την παράγραφο 5.6.4 του παρόντος.

Απόδειξη: Η απόδειξη βασίζεται στην χρήση του λήμματος του Itô και αφήνεται σαν άσκηση στον αναγνώστη. □

Σχόλιο: Η γενίκευση σε χρονικά μη ομογενείς διαδικασίες Itô είναι προφανής. Προσοχή χρειάζεται στις συνθήκες που θα πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές της διαδικασίας.

Θα δώσουμε τώρα ορισμένα παραδείγματα για την κατασκευή του γεννήτορα τελεστή.

Παράδειγμα 5.6.1. Ο γεννήτορας τελεστής της κίνησης Brown B_t είναι ο

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

ο οποίος δρά επάνω σε συναρτήσεις $f = f(x)$. Επανερχόμενοι στον ορισμό του γεννήτορα τελεστή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι ξεκινάμε την κίνηση Brown στο σημείο x και η f είναι συνάρτηση της αρχικής θέσης.

Παράδειγμα 5.6.2. Ο γεννήτορας τελεστής της πολυδιάστατης κίνησης Brown $B_t = (B_{1,t}, \dots, B_{d,t})$ είναι ο

$$A = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} = \frac{1}{2} \Delta$$

δηλαδή σχετίζεται με τον τελεστή Laplace. Ο τελεστής αυτός δρά επάνω σε συναρτήσεις της μορφής $f = f(x_1, \dots, x_d)$. Αν επανέλθουμε στον ορισμό του γεννήτορα τελεστή, μπορούμε να φανταστούμε ότι ξεκινάμε την πολυδιάστατη κίνηση Brown στο σημείο $x = (x_1, \dots, x_d)$ και η f είναι μία συνάρτηση των αρχικών συνθηκών. Σχετικά με τον τελεστή Laplace και τις εφαρμογές του παραπέμπουμε π.χ. στο [23].

Παράδειγμα 5.6.3. Έστω $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$ η λύση του συστήματος

$$\begin{aligned} dX_{1,t} &= dt, \\ dX_{2,t} &= dB_t, \end{aligned}$$

με αρχικές συνθήκες

$$X_{1,0} = t_0 \quad X_{2,0} = x_0.$$

Είναι φανερό ότι η X είναι το γράφημα της κίνησης Brown. Ο γεννήτορας τελεστής για την στοχαστική διαδικασία X_t είναι ο τελεστής

$$A = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

Ο τελεστής αυτός δρά επάνω σε συναρτήσεις $f = f(x, t)$. Επανερχόμενοι στον ορισμό του γεννήτορα τελεστή βλέπουμε ότι η στοχαστική διαδικασία X_t χρειάζεται δύο αρχικές συνθήκες για να οριστεί. Την χρονική στιγμή t από την οποία ξεκινάμε το γράφημα και την θέση x . Η f θεωρείται συνάρτηση των δύο αυτών αρχικών συνθηκών.

Παράδειγμα 5.6.4. Η διαδικασία Bessel Ορίσαμε στο παράδειγμα 4.5.5 την διαδικασία Itô $R_t = \|B_t\|$, όπου $B_t = (B_{1,t}, \dots, B_{d,t})$ η d -διάστατη κίνηση Brown και $\|\cdot\|$ η Ευκλείδεια νόρμα στον \mathbb{R}^d . Η διαδικασία R_t Bessel και δίνει την ακτίνα της πολυδιάστατης κίνησης Brown. Όπως δείξαμε στο παράδειγμα 4.5.5 η R_t μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$(5.-157) \quad dR_t = \frac{d-1}{2R_t} dt + d\bar{B}_t$$

όπου \bar{B} είναι μία d -διάστατη κίνηση Brown. Συνεπώς από την εξίσωση (;) καταλήγουμε ότι ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας Bessel είναι ο

$$A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{d-1}{2r} \frac{\partial}{\partial r}$$

που δρά επάνω σε συναρτήσεις της μορφής $f = f(r)$. Με r συμβολίζουμε την αρχική ακτίνα της πολυδιάστατης κίνησης Brown, δηλαδή αν έχουμε ξεκινήσει την κίνηση Brown στο σημείο $x = (x_1, \dots, x_d)$, $r = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_d^2}$. Ο τελεστής A είναι γνωστός ως τελεστής του Bessel. Αξίζει να σημειώσουμε ότι αν θεωρήσουμε τον τελεστή του Laplace σε d -διαστάσεις και θεωρήσουμε ότι επιδρά σε συναρτήσεις $f(x_1, \dots, x_d)$ τέτοιας μορφής ώστε $f(x_1, \dots, x_d) = f(r)$ τότε μετά από κάποια άλγεβρα μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{2} \Delta f = \frac{1}{2} A f$$

Παράδειγμα 5.6.5. Σαν τελευταίο παράδειγμα ας θεωρήσουμε την κίνηση Brown στον μοναδιαίο κύκλο S^1 που μελετήσαμε στο παράδειγμα 4.5.4. Ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας Itô $X_t = (X_{1,t}, X_{2,t})$ που είναι η κίνηση Brown στον μοναδιαίο κύκλο είναι ο

$$A = \frac{1}{2} \left(x_2^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - 2x_1x_2 \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} + x_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - x_2 \frac{\partial}{\partial x_2} \right).$$

Ο τελεστής αυτός θεωρείται ότι επιδρά επάνω σε συναρτήσεις $f = f(x_1, x_2)$ όπου x_1, x_2 είναι η αρχική θέση της κίνησης Brown στον μοναδιαίο κύκλο.

5.6.2 Ο τύπος των Feynman-Kac

Ας θεωρήσουμε τον τελεστή

$$A := \sum_i b_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{ij} (\sigma \sigma^T)_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

Στο τμήμα αυτό θα δείξουμε ότι η λύση στο πρόβλημα Cauchy

$$(5.-159) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Au + cu \\ u(t, x) &\in C^{1,2}([0, \infty) \times \mathbb{R}^n), \\ u(0, x) &= f(x) \end{aligned}$$

για c συνεχή και φραγμένη και $f \in C_0^2$, μπορεί να γραφεί σαν η μέση τιμή επάνω στις τροχιές της διαδικασίας Itô X_t η οποία έχει για γεννήτορα τελεστή τον τελεστή A . Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.6.3. Η λύση στο πρόβλημα Cauchy (5.-159) μπορεί να γραφεί ως

$$(5.-159) \quad u(t, x) = E_x \left[f(X_t) \exp \left(\int_0^t c(X_s) ds \right) \right].$$

(5.-159)

Πρωτού προχωρήσουμε σε ένα σχέδιο της απόδειξης του θεωρήματος αυτού ας δούμε με λόγια τι μας λείπει: Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την λύση της εξίσωσης (5.-159) στο σημείο x την χρονική στιγμή t . Τότε παίρνουμε μία σειρά από διαχύσεις $X_t(\omega_i)$, οι οποίες έχουν γεννήτορα τελεστή A , και που όλες ξεκινάνε την χρονική στιγμή 0 στο σημείο x . Αφήνουμε τις διαχύσεις να τρέξουν για χρόνο t και για κάθε μία από τις τροχιές υπολογίζουμε την ποσότητα $f(X_t(\omega_i)) \exp(\int_0^t c(X_s(\omega_i)) ds)$. Μετά παίρνουμε την μέση τιμή επάνω σε όλες τις τροχιές (όλα τα ω_i) και η μέση τιμή αυτή είναι η λύση της εξίσωσης. Η αναπαράσταση αυτή μας παρέχει ένα ωραίο τρόπο εύρεσης της λύσης παραβολικών προβλημάτων.

Απόδειξη: Θα δώσουμε ένα σχέδιο απόδειξης του παραπάνω θεωρήματος στην περίπτωση που $c = 0$. Θα δώσουμε κάποιες νύξεις για τις αλλαγές που χρειάζονται στην απόδειξη αν $c \neq 0$.

(α) Ας υποθέσουμε ότι η u λύνει το πρόβλημα Cauchy (5.-159) για $c = 0$. Τότε θα αποδείξουμε ότι η u μπορεί να αναπαρασταθεί από την μέση τιμή που δίνεται στην εξίσωση (5.-159) με $c = 0$ δηλαδή $u(t, x) = E_x[f(X_t)]$.

Θα θεωρήσουμε κάποιο t_0 σταθερό και θα ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία $M_t = u(t_0 - t, X_t)$. Ας εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην M_t . Έχουμε

$$(5.-158) \quad dM_t = \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + Au \right) dt + \nabla u \cdot \sigma dB_t$$

Το αρνητικό πρόσθετο μπροστά από την χρονική παράγωγο του u που εμφανίστηκε όταν χρησιμοποιήσαμε το λήμμα του Itô προέρχεται από το ότι παίρνουμε την $u(t_0 - t, X_t)$ και όχι την $u(t, X_t)$. Εφόσον η u ικανοποιεί την εξίσωση (5.-159) για $c = 0$ η (5.-158) μας δίνει ότι

$$dM_t = \nabla u \cdot \sigma dB_t$$

συνεπώς η M_t μπορεί να γραφεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα επάνω στην κίνηση Brown και άρα είναι μία martingale. Από τις ιδιότητες των martingale έχουμε όμως ότι

$$(5.-158) \quad E_x[M_{t_0}] = E_x[M_0]$$

Θα υπολογίσουμε τώρα χωριστά το αριστερό και το δεξιό μέρος της ισότητας αυτής

- Αριστερό μέλος: $E_x[M_{t_0}] = E_x[u(0, X_{t_0})] = E_x[f(X_{t_0})]$
εφόσον γνωρίζουμε ότι $u(0, x) = f(x)$ για κάθε x .
- Δεξιό μέλος: $E_x[M_0] = E_x[u(t_0, X_0)] = u(t_0, x)$
εφόσον η διάχυση X_t ξεκινάει στο σημείο x ($X_0 = x$).

Έτσι λοιπόν καταλήγουμε από την (5.-158) ότι $E_x[f(X_{t_0})] = u(t_0, x)$ και αφού το t_0 είναι αυθαίρετο το αποτέλεσμα που θέλαμε να αποδείξουμε ισχύει.

(β) Ας ορίσουμε σαν $v(t, x) \equiv E_x[f(X_t)]$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση v είναι λύση του προβλήματος Cauchy (5.-159) για $c = 0$. Για να το αποδείξουμε αυτό θα κάνουμε χρήση της ιδιότητας Markov της διαδικασίας διάχυσης X_t .

Ισχυριζόμαστε ότι για το $v(t, x)$ όπως έχει οριστεί πιο πάνω, η στοχαστική διαδικασία $M_t = v(T - t, X_t)$ (όπου T σταθερό και $t < T$) είναι ένα martingale. Αρχικά θα αποδείξουμε τον ισχυρισμό αυτό.

Ας θεωρήσουμε ότι ξεκινάμε την διαδικασία διάχυσης οπουδήποτε. Έχουμε:

$$(5.-157) \quad E[f(X_T) | \mathcal{F}_t] = E_{X_t}[f(X_{T-t})] = v(T - t, X_t) = M_t$$

Το παραπάνω ισχύει λόγω της ιδιότητας Markov : Η υπό συνθήκη μέση τιμή μιάς ποσότητας που εξαρτάται από την θέση μιάς διάχυσης την χρονική στιγμή T ως προς την σ -άλγεβρα \mathcal{F}_t έχοντας ξεκινήσει την χρονική στιγμή 0 οπουδήποτε, είναι ίση με την μέση τιμή της ίδιας ποσότητας επάνω σε μία διάχυση που ξεκίνησε την χρονική στιγμή 0, στην θέση X_t και θα 'τρέξει' για χρονικό διάστημα $T - t$. Τονίζουμε ότι ο τρόπος που γράψαμε την ιδιότητα Markov εδώ ισχύει για χρονικά ομογενείς διαχύσεις.

Από την (5.-157) θα πρέπει να φαίνεται αμέσως ότι η M_t είναι μία martingale . Πράγματι

$$E[M_t | \mathcal{F}_s] = E[f(X_T) | \mathcal{F}_t | \mathcal{F}_s] = E[f(X_T) | \mathcal{F}_s] = M_s$$

Ας εφαρμόσουμε τώρα το λήμμα του Itô στην στοχαστική διαδικασία M_t . Έχουμε ότι

$$dM_t = d(v(T - t, X_t)) = \left(-\frac{\partial v}{\partial t} + Av \right) dt + \nabla v \sigma \cdot dB_t$$

Εφόσον όμως η M_t είναι μία martingale θα πρέπει το κομμάτι που είναι ανάλογο του dt να μηδενίζεται άρα η v ικανοποιεί την εξίσωση (5.-159). Το ότι ικανοποιείται η αρχική συνθήκη μπορεί να φανεί αμέσως από τον ορισμό της v . \square

Σημείωση: Στην παραπάνω απόδειξη θεωρούμε ότι ισχύουν ορισμένες απαραίτητες συνθήκες κάποιες από τις οποίες θα πρέπει να ελεγχθούν. Η πιο βασική είναι ότι η συνάρτηση $v(t, x)$ που ορίζεται από την μέση τιμή $E_x(f(X_t))$ είναι μία συνάρτηση που ανήκει στο $C^{1,2}$ (μία συνεχής παράγωγος στο t , και δύο συνεχείς παράγωγοι στο x). Το σημείο αυτό είναι αρκετά τεχνικό και παραλείπεται. Για μία αντιμετώπιση του θέματος αυτού παραπέμπουμε στο [28]. Επίσης, εσκεμμένα παραλείψαμε την αναφορά των συνθηκών που θα πρέπει να ικανοποιούν οι συντελεστές του προβλήματος για να ικανοποιείται η αναπαράσταση Feynman-Kac. Οι συνθήκες αυτές αναφέρονται λεπτομερώς στην παράγραφο 5.6.4. Αξίζει να αναφέρουμε ότι τα αποτελέσματα αυτά μπορεί να γενικευθούν και όταν τα στοιχεία του προβλήματος ικανοποιούν πιο ασθενείς συνθήκες όπως πχ. αν η c δεν είναι φραγμένη. Επίσης μπορεί να γενικευθούν πολύ άνετα και στην περίπτωση που οι συντελεστές της εξίσωσης εξαρτώνται εκπεφρασμένα από τον χρόνο (μη χρονικά ομογενής διαδικασία Itô). Για την γενίκευση αυτή βλ. παράγραφο 5.6.4.

Παράδειγμα 5.6.6. Εκφράστε την λύση της εξίσωσης

$$(5.-158) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \\ u(0, x) &= f(x) \end{aligned}$$

σαν την μέση τιμή επάνω σε μία κατάλληλα επιλεγμένη διαδικασία διάχυσης.

Η διαδικασία διάχυσης που παράγει ο γεννήτορας $A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ δεν είναι άλλη από την κίνηση Brown $X_t = B_t$. Από την αναπαράσταση Feynman-Kac έχουμε λοιπόν

$$u(t, x) = E_x[f(X_t)] = E_x[f(B_t)] = E_0[f(x + B_t)]$$

όπου η τρίτη μέση τιμή είναι επάνω σε μία κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο x και η τέταρτη μέση τιμή είναι επάνω σε μία κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο 0. Εφόσον ξέρουμε την κατανομή της κίνησης Brown μπορούμε να γράψουμε εκπεφρασμένα την λύση σαν

$$u(t, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+z) \exp\left(-\frac{z^2}{2t}\right) dz$$

Όσοι από εσάς έχουν κάποια επαφή με τις μερικές διαφορικές εξισώσεις θα αναγνωρίσουν το δεύτερο από τα ολοκληρώματα αυτά ως την ολοκληρωτική αναπαράσταση της λύσης της εξίσωσης θερμότητας χρησιμοποιώντας την θεμελιώδη λύση (συνάρτηση Green).

Πολλές φορές είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε την λύση του προβλήματος Cauchy ανάστροφα στο χρόνο, δηλαδή γνωρίζοντας την λύση σε κάθε x την χρονική στιγμή T , και αναζητώντας την για $t < T$. Τέτοιες εφαρμογές εμφανίζονται πολύ συχνά την χρηματοοικονομική και συγκεκριμένα σε προβλήματα αποτίμησης παραγώγων συμβολαίων, των οποίων η αξία είναι γνωστή την στιγμή της λήξης τους και χρειάζεται να βρούμε την αξία τους κάποια στιγμή πριν την λήξη.

Θα παρουσιάσουμε μία πιθανοθεωρητική αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος Cauchy

$$(5.-161) \quad \begin{aligned} -\frac{\partial u}{\partial t} &= Au + cu \\ u(T, x) &= f(x), \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned}$$

Ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.6.4. (Feynman-Kac II) Η λύση του προβλήματος (5.-161) μπορεί να γραφεί σαν

$$u(t, x) = E_{t,x} \left[f(X_T) \exp \left(\int_t^T c(X_s) ds \right) \right]$$

όπου με το σύμβολο $E_{t,x}[\cdot]$ εννοούμε την μέση τιμή επάνω σε διαχύσεις X_t που έχουν γεννήτορα A και ξεκινάνε την χρονική στιγμή t στο σημείο x .

Απόδειξη: Όπως και προηγουμένως θα δώσουμε την απόδειξη για $c = 0$ και αφήνουμε την γενική περίπτωση ως άσκηση.

(α) Έστω ότι η συνάρτηση u είναι λύση του προβλήματος Cauchy (5.-161) με $c = 0$. Τότε η $u(t, x)$ μπορεί να αναπαρασταθεί ως $u(t, x) = E_{t,x}[f(X_T)]$.

Ας θεωρήσουμε την στοχαστική διαδικασία $M_t = u(t, X_t)$ και ας εφαρμόσουμε το λήμμα του Itô στην διαδικασία M_t :

$$dM_t = \left(\frac{\partial u}{\partial t} + Au \right) dt + \nabla u \sigma \cdot dB_t$$

Λόγω όμως της υποθέσεως ότι η u λύνει την (5.-161) η παραπάνω εξίσωση γίνεται

$$dM_t = \nabla u \sigma \cdot dB_t$$

και από τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος βλέπουμε ότι η M_t είναι μία martingale. Λόγω της ιδιότητας martingale ισχύει

$$E_{t,x} M_T = E_{t,x} M_t$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι ίσο με $E_{t,x}[f(X_T)]$ (λόγω του ότι $u(T, x) = f(x)$ για κάθε x) ενώ το δεξιό μέλος της εξίσωσης αυτής είναι ίσο με $u(t, x)$ (γιατί η μέση τιμή παίρνεται επάνω σε διαχύσεις που ξεκινάνε την χρονική στιγμή t στο σημείο x οπότε $X_t = x$). Συνεπώς καταλήγουμε στο συμπέρασμα που θέλουμε.

(β) Ας ορίσουμε τώρα $v(t, x) = E_{t,x}[f(X_T)]$. Θα δείξουμε ότι η συνάρτηση $v(t, x)$ είναι λύση του προβλήματος Cauchy (5.-161) με $c = 0$.

Για να αποδείξουμε αυτό θα καταφύγουμε στην ιδιότητα Markov για την διάχυση X_t . Ισχυρίζομαστε πρώτα ότι η στοχαστική διαδικασία $M_t = v(t, X_t)$ είναι μία martingale.

Πράγματι, από την ιδιότητα Markov έχουμε

$$E[f(X_T) | \mathcal{F}_t] = E_{t, X_t}[f(X_T)] = v(t, X_t) = M_t$$

από όπου φαίνεται ότι η M_t είναι μία martingale. Στην παραπάνω εφαρμογή της ιδιότητας Markov η πρώτη μέση τιμή είναι επάνω σε μία διάχυση που ξεκινάει την χρονική στιγμή 0 σε οποιαδήποτε θέση, ενώ η δεύτερη μέση τιμή είναι επάνω σε μία διάχυση που ξεκινάει την χρονική στιγμή t στην θέση X_t . Δεν χρειάζεται εδώ να πάρουμε X_{T-t} σαν όρισμα της f γιατί ξεκινάμε την χρονική στιγμή t και όχι την χρονική στιγμή 0 (όπως στην απόδειξη της άλλης παραλλαγής του θεωρήματος Feynman-Kac). Ως εκ τούτου η απόδειξη αυτή ισχύει και για διαχύσεις που μπορεί να μην είναι χρονικά ομογενείς.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το λήμμα του Itô στην διαδικασία M_t

$$dM_t = \left(\frac{\partial v}{\partial t} + Av \right) dt + \nabla v \sigma \cdot dB_t$$

Εφόσον η διαδικασία M_t είναι martingale το ολοκλήρωμα ως προς dt θα πρέπει να είναι ίσο με 0 άρα η v θα πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση (5.-161). Η τελική συνθήκη $v(T, x) = f(x)$ για κάθε x αποδεικνύεται πολύ εύκολα ότι ισχύει. \square

Θα δούμε τώρα την εφαρμογή της αναπαράστασης Feynman-Kac σε μία διαφορική εξίσωση η οποία συναντάται πολύ συχνά στην χρηματοοικονομική.

Παράδειγμα 5.6.7. Η εξίσωση Black-Scholes

Γράψτε την λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + rs \frac{\partial v}{\partial s} - rv = 0$$

με την συνθήκη $v(T, s) = f(s)$ σαν μία μέση τιμή επάνω σε μία κατάλληλα επιλεγμένη διαδικασία διάχυσης. Η εξίσωση αυτή ονομάζεται εξίσωση Black-Scholes και δίνει την τιμή ενός παραγώγου συμβολαίου σαν συνάρτηση του χρόνου πριν την λήξη του και της τιμής του βασικού τίτλου.

Ο τελεστής $A = rs \frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \frac{\partial^2}{\partial s^2}$ είναι ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας διάχυσης S_t που είναι λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dB_t$$

όπου B_t η μονοδιάστατη κίνηση Brown. Αναγνωρίζουμε την S_t σαν την γεωμετρική κίνηση Brown. Σύμφωνα με την αναπαράσταση Feynman-Kac λοιπόν η λύση της εξίσωσης Black-Scholes θα δίνεται από την μέση τιμή

$$v(t, s) = E_{t,s}[\exp^{-r(T-t)} f(S_T)] \equiv E[\exp^{-r(T-t)} f(S_T) | S_t = s]$$

όπου η μέση τιμή λαμβάνεται επάνω στις τροχιές της γεωμετρικής κίνησης Brown που ξεκινάνε την χρονική στιγμή t στην θέση s .

Παράδειγμα 5.6.8. Η αναπαράσταση Feynman-Kac και αλλαγή μέτρου

θα δούμε τώρα την σχέση της αναπαράστασης Feynman-Kac με το θεώρημα του Girsanov το οποίο μας επιτρέπει να αλλάξουμε την ταχύτητα κάποιας διάχυσης με την κατάλληλη αλλαγή του μέτρου πιθανότητας κάτω από το οποίο 'βλέπουμε' την διαδικασία.

Ας θεωρήσουμε την διαδικασία διάχυσης

$$(5.-169) \quad dX_t = a_1(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

και P το μέτρο πιθανότητας κάτω από το οποίο η B_t είναι μία κίνηση Brown. Η διάχυση αυτή έχει γεννήτορα τελεστή τον

$$A_1 = a_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(σε μία διάσταση, με προφανή γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις). Σύμφωνα με το θεώρημα του Girsanov μπορούμε να ορίσουμε ένα ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q κάτω από το οποίο η διάχυση X_t θα έχει την μορφή

$$(5.-169) \quad dX_t = a_2(X_t)dt + \sigma(X_t)d\bar{B}_t$$

όπου \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο Q . Η διάχυση αυτή έχει γεννήτορα τελεστή τον

$$A_1 = a_1(x) \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma(x)^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

(σε μία διάσταση, με προφανή γενίκευση σε περισσότερες διαστάσεις). Η λύση του προβλήματος

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = A_1 v_1 + c v_1, \quad v_1(0, x) = f(x)$$

θα δίνεται από την αναπαράσταση Feynman-Kac

$$v_1(t, x) = E_{P,x}[f(X_t) \exp(\int_0^t c(X_s) ds)]$$

όπου με $E_{P,x}$ συμβολίζουμε την μέση τιμή κάτω από το μέτρο P και για μία διάχυση που είναι λύση της (5.-169) και ξεκινάει την χρονική στιγμή 0 στην θέση x .

Η λύση του προβλήματος

$$\frac{\partial v_2}{\partial t} = A_2 v_2 + c v_2, \quad v_2(0, x) = f(x)$$

θα δίνεται από την αναπαράσταση Feynman-Kac

$$v_2(t, x) = E_{Q,x}[f(X_t) \exp(\int_0^t c(X_s) ds)]$$

όπου με $E_{Q,x}$ συμβολίζουμε την μέση τιμή κάτω από το μέτρο Q και για μία διάχυση που είναι λύση της (5.-169) και ξεκινάει την χρονική στιγμή 0 στην θέση x .

5.6.3 Προβλήματα συνοριακών συνθηκών: Το πρόβλημα Dirichlet

Το πρόβλημα Cauchy δεν είναι το μοναδικό που μπορεί να αντιμετωπιστεί με πιθανοθεωρητικές μεθόδους. Ορισμένα προβλήματα συνοριακών συνθηκών μπορούν να αντιμετωπιστούν επίσης με πιθανοθεωρητικές μεθόδους. Ένα τέτοιο πρόβλημα είναι το πρόβλημα Dirichlet σε κάποιο χωρίο Ω . Η επίλυση του προβλήματος αυτού σχετίζεται με τον χρόνο πρώτης εξόδου της αντίστοιχης διαδικασίας διάχυσης από το χωρίο Ω .

Αρχικά, ας θεωρήσουμε το χρονικά ανεξάρτητο (ελλειπτικό) πρόβλημα

$$\begin{aligned} Au + cu &= f \quad x \in \Omega \\ u &= \phi \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Ας συμβολίσουμε με τ το χρόνο πρώτης εξόδου της διάχυσης με γεννήτορα τελεστή A από το χωρίο Ω ,

$$\tau = \inf\{t : t \in \partial\Omega\}$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα

Θεώρημα 5.6.5. Η λύση του προβλήματος Dirichlet μπορεί να αναπαρασταθεί ως

$$u(x) = E_x \left[\phi(X_\tau) \exp \left(\int_0^\tau c(X_s) ds \right) \right] - E_x \left[\int_0^\tau f(X_t) \exp \left(\int_0^t c(X_s) ds \right) dt \right].$$

Για την μοναδικότητα της λύσης και την ικανοποίηση των συνοριακών συνθηκών χρειάζομαστε την συμπληρωματική συνθήκη ότι όλα τα σημεία στο σύνορο του Ω είναι κανονικά ή με άλλα λόγια, αν $x \in \partial\Omega$ τότε $P_x(\tau = 0) = 1$.

Απόδειξη: Θα δώσουμε μόνο την βασική ιδέα της απόδειξης.

Ας δούμε αρχικά γιατί η λύση του προβλήματος αυτού θα πρέπει να έχει την μορφή που δώσαμε: Εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô στην συνάρτηση $u(x)exp(c_t)$ όπου $c_t = \int_0^t c(X_s)ds$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} u(X_t)exp(c_t) - u(x) &= \int_0^t (\nabla u(X_s)exp(c_s), \sigma(X_s)dB_s) \\ &+ \int_0^t (Au + cu)(X_s)exp(c_s)ds. \end{aligned}$$

Ο τύπος αυτός παραμένει αληθής αν αντικαταστήσουμε το t με την τυχαία μεταβλητή $\tau_T = T \wedge \tau$. Για $s < \tau_T$ η στοχαστική διαδικασία X_s βρίσκεται εντός του χωρίου Ω και συνεπώς αν η $u(x)$ είναι η λύση της ελλειπτικής εξίσωσης βλέπουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι

$$\int_0^t f(X_s)exp(c_s)ds$$

Τώρα παίρνουμε το όριο $T \rightarrow \infty$. Παίρνοντας την μέση τιμή και των δύο όρων και υπενθυμίζουμε ότι η μέση τιμή του στοχαστικού ολοκληρώματος είναι 0 αρκεί να είναι φραγμένο. Η ιδιότητα του ότι είναι φραγμένο μπορεί να εξασφαλιστεί στις ακόλουθες δύο περιπτώσεις

- (i) $c \leq 0$ και $E[\tau] < \infty$, (αν c αρνητικό και φραγμένο από το 0 τότε μπορούμε να αφήσουμε αυτή την υπόθεση.
- (ii) Αν υποθέσουμε ότι η c μπορεί να πάρει θετικές τιμές και $c < a$ τότε χρειαζόμαστε την συνθήκη $\sup_{x \in \Omega} E[exp(a\tau)] < \infty$.

Κάτω από οποιαδήποτε από τις δύο αυτές συνθήκες, μπορούμε να πάρουμε την μέση τιμή καθώς $T \rightarrow \infty$ και βλέπουμε ότι αν η u είναι λύση της ελλειπτικής εξίσωσης θα πρέπει να είναι της μορφής που δόθηκε στην εκφώνηση του θεωρήματος.

Δεύτερον ας προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι η συνάρτηση που δώσαμε παραπάνω ικανοποιεί την εξίσωση. Αυτό θα γίνει με τον ίδιο τρόπο που αποδείξαμε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για το πρόβλημα Cauchy. Εφόσον η τυχαία μεταβλητή τ είναι ένας χρόνος στάσης αρκεί να εφαρμόσουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov.

Τέλος ας ασχοληθούμε με την συνοριακή συνθήκη. Εντελώς διαισθητικά μπορούμε να δούμε ότι αν ένα σημείο του σύνορου του χωρίου είναι κανονικό, τότε αν αρχίσουμε την διαδικασία διάχυσης από το σημείο αυτό ο χρόνος εξόδου θα είναι 0 με πιθανότητα 1. Στην περίπτωση αυτή όλα τα ολοκληρώματα θα είναι μηδενικά, και εφόσον $X_{\tau_D} = x$ για $x \in \partial\Omega$ θα ισχύει $E[\psi(X_\tau)] \rightarrow \psi(x)$ και $u(x) \rightarrow \psi(x)$ καθώς πλησιάζουμε το σύνορο. Αν η συνθήκη της κανονικότητας δεν είχε τεθεί τότε θα είχαμε προβλήματα με την συνέχεια στο σύνορο και με το να ικανοποιήσουμε την συνοριακή συνθήκη Dirichlet και επίσης θα είχαμε πρόβλημα με την μοναδικότητα της λύσης. Οι διαισθητικές αυτές ιδέες μπορεί να γίνουν αυστηρές σχετικά εύκολα. Για την πλήρη απόδειξη βλ. π.χ. [2]. □

Με παρεμφερή τρόπο μπορούμε να δώσουμε μια αναπαράσταση των λύσεων του χρονικά εξαρτημένου (παραβολικού) προβλήματος Dirichlet.

Ας θεωρήσουμε το πρόβλημα

$$\begin{aligned} (5.-179) \quad \frac{\partial u}{\partial t} &= Au + cu, \quad x \in \Omega \\ u(0, x) &= f(x), \\ u(t, x) &= g(t, x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

Επίσης θεωρούμε ότι οι συναρτήσεις f, c, g είναι συνεχείς και φραγμένες.

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.6.6. Μία συνεχής και φραγμένη λύση του προβλήματος αυτού η οποία έχει φραγμένες και συνεχείς πρώτες παραγώγους στον χρόνο και φραγμένες και συνεχείς δεύτερες παραγώγους στις χωρικές μεταβλητές, έχει την αναπαράσταση

$$\begin{aligned} u(t, x) &= E_x \left[f(X_t) \mathbf{1}_{\{\tau_t=t\}} exp \left\{ \int_0^t c(X_s)ds \right\} \right] \\ &+ E_x \left[g(\tau, X_\tau) \mathbf{1}_{\{\tau_t \neq t\}} exp \left\{ \int_0^\tau c(X_s)ds \right\} \right] \end{aligned}$$

όπου $\tau = \inf\{s : X_s \in \partial\Omega\}$ είναι ο χρόνος πρώτης εξόδου της διαδικασίας X_s από το χωρίο Ω (ο οποίος φυσικά εξαρτάται από την αρχική συνθήκη x της διάχυσης), $\tau_t = t \wedge \tau_D$, $\mathbf{1}_{\{\tau_t=t\}}$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου $\{\omega : \tau = t\}$, $\mathbf{1}_{\{\tau_t \neq t\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\tau_t=t\}}$.

Απόδειξη: Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού είναι παρόμοια με την απόδειξη του αντίστοιχου θεωρήματος για την ελλειπτική περίπτωση και παραλείπεται. \square

5.6.4 Η αναπαράσταση Feynman-Kac για προβλήματα που οι συντελεστές τους εξαρτώνται από τον χρόνο

Η αναπαράσταση Feynman-Kac μπορεί να γενικευθεί χωρίς μεγάλη δυσκολία και για προβλήματα που οι συντελεστές τους εξαρτώνται από τον χρόνο. Θα παρουσιάσουμε εδώ μία τέτοια γενίκευση για προβλήματα τα οποία τα επιλύσουμε αντίστροφα στον χρόνο.

Ας ορίσουμε τον διαφορικό τελεστή

$$L := \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \frac{\partial}{\partial x_i} + c(t,x) := A + c(t,x)$$

Με $X_s^{(t,x)}$ ας συμβολίσουμε την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$X_s^{(t,x)} = x + \int_t^s b(r, X_r^{(t,x)}) dr + \int_t^s \sigma(r, X_r^{(t,x)}) dB_r$$

όπου σ είναι ένας πίνακας τέτοιος ώστε $\sigma\sigma^T = a$.

Θεωρούμε ότι πληρούνται οι υποθέσεις

Y1. $y^T a y \geq \lambda \|y\|^2$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ (ο τελεστής είναι ελλειπτικός)

Y2. a_{ij} , b_i ομοιόμορφα συνεχείς κατά Lipschitz

Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα Cauchy

$$(5.-183) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= f(x), \text{ στο } [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ u(T, x) &= g(x), \text{ στο } \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

και το πρόβλημα Dirichlet

$$(5.-184) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + Lu &= f(x), \text{ στο } [0, T] \times \Omega \\ u(T, x) &= g(x), \text{ στο } \mathbb{R}^n \\ u(t, x) &= w(t, x), \text{ στο } [0, T] \times \partial\Omega \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι σχετικά με το πρόβλημα Cauchy ικανοποιούνται και οι περαιτέρω υποθέσεις

Y3. Οι συναρτήσεις $a_{ij}(t, x)$ είναι φραγμένες στο $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ και συνεχείς (κατά Hölder βλ. [10]) στο x .

Y4. Η συνάρτηση c είναι φραγμένη στο $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ και ομοιόμορφα συνεχής κατά Hölder στο x και t σε κάθε συμπαγές υποσύνολο του $[0, T] \times \mathbb{R}^n$.

Y5. Η συνάρτηση b είναι συνεχής στο $[0, T] \times \mathbb{R}^n$, ομοιόμορφα συνεχής κατά Hölder στο x και t στο $[0, T] \times \mathbb{R}^n$ και φραγμένη από μία πολυωνυμική συνάρτηση του x .

Y6. Η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής στο \mathbb{R}^n και είναι φραγμένη από μία πολυωνυμική συνάρτηση του x .

Σχετικά με το πρόβλημα Dirichlet ικανοποιούνται οι υποθέσεις

Y3'. Οι συναρτήσεις c και f είναι ομοιόμορφα συνεχείς κατά Hölder στο $(t, x) \in [0, T] \times \bar{\Omega}$,

Y4'. Η g είναι συνεχής στο $\bar{\Omega}$,

$Y5'$. Η w είναι συνεχής στο $[0, T] \times \partial\Omega$,

$Y6'$. $g(x) = w(x, T)$ για $x \in \partial\Omega$.

Ισχύουν τα παρακάτω δύο θεωρήματα (βλ. [24])

Θεώρημα 5.6.7. Κάτω από τις υποθέσεις $Y1 - Y6$ υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος Cauchy (5.-183) η οποία δίνεται από την αναπαράσταση

$$\begin{aligned} u(t, x) &= E \left[g(X_T^{(t,x)}) \exp \left(\int_t^T c(s, X_s^{(t,x)}) ds \right) \right] \\ &- E \left[\int_t^T f(X_s^{(t,x)}) \exp \left(\int_t^s c(r, X_r^{(t,x)}) dr \right) ds \right] \end{aligned}$$

Θεώρημα 5.6.8. Ας θεωρήσουμε ότι το Ω είναι ένα φραγμένο και ανοικτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n του οποίου το σύνορο $\partial\Omega$ είναι C^2 . Κάτω από τις υποθέσεις $Y1 - Y2$ και $Y3' - Y6'$ υπάρχει μοναδική λύση του προβλήματος Dirichlet (5.-184) η οποία δίνεται από την αναπαράσταση

$$\begin{aligned} u(t, x) &= E \left[\mathbf{1}_{\{\tau < T\}} w(X_\tau^{(t,x)}, \tau) \exp \left(\int_t^\tau c(s, X_s^{(t,x)}) ds \right) \right] \\ &+ E \left[\mathbf{1}_{\{\tau = T\}} g(X_T^{(t,x)}) \exp \left(\int_t^T c(s, X_s^{(t,x)}) ds \right) \right] \\ &- E \left[\int_t^\tau f(s, X_s^{(t,x)}) \exp \left(\int_t^s c(r, X_r^{(t,x)}) dr \right) ds \right] \end{aligned}$$

όπου $\tau = T \wedge \inf\{s \in [t, T] : X_s^{(t,x)} \notin \Omega\}$

Τα παραπάνω θεωρήματα έχουν και εκδοχές για όταν αντί για τελική συνθήκη έχουμε αρχική συνθήκη, δηλαδή όταν δίνεται το $u(0, x)$ αντί του $u(t, x)$. Σαν παράδειγμα δίνουμε την εκδοχή αυτή της λύσεως του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Au + cu, \quad x \in \Omega \\ u(0, x) &= f(x), \\ u(t, x) &= g(t, x), \quad x \in \partial\Omega \end{aligned} \tag{5.-190}$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 5.6.9. Μία $C^{1,2}$ λύση του προβλήματος αυτού έχει την αναπαράσταση

$$\begin{aligned} u(t, x) &= E \left[f(X_t^{(t,x)}) \mathbf{1}_{\{\tau_t = t\}} \exp \left\{ \int_0^t c(t-s, X_s^{(t,x)}) ds \right\} \right] \\ &+ E \left[g(\tau, X_\tau^{(t,x)}) \mathbf{1}_{\{\tau_t \neq t\}} \exp \left\{ \int_0^\tau c(t-s, X_s^{(t,x)}) ds \right\} \right] \end{aligned}$$

όπου $\tau = \inf\{s : X_s^{(t,x)} \in \partial\Omega\}$ είναι ο χρονος πρώτης εξόδου της διαδικασίας $X_s^{(t,x)}$ από το χωρίο Ω (ο οποίος φυσικά εξαρτάται από την αρχική συνθήκη x της διάχυσης), $\tau_t = t \wedge \tau_D$, $\mathbf{1}_{\{\tau_t = t\}}$ η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου $\{\omega : \tau = t\}$, $\mathbf{1}_{\{\tau_t \neq t\}} = 1 - \mathbf{1}_{\{\tau_t = t\}}$.

5.6.5 Εφαρμογές των αναπαραστάσεων Feynman-Kac

Με την βοήθεια των αναπαραστάσεων Feynman-Kac μπορούμε να υπολογίσουμε ενδιαφέρουσες ποσότητες για διαδικασίες διάχυσης (διαδικασίες Itô). Παρουσιάζουμε στην παράγραφο αυτή ορισμένες τέτοιες ενδιαφέρουσες εφαρμογές (βλ. π.χ. [10]).

Η εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov

• Χρονικά ομογενείς διαχύσεις

Αν στον τύπο Feynman-Kac για το πρόβλημα Cauchy θέσουμε $c = 0$ βρίσκουμε ότι η $u(t, x) = E_x[f(X_t)]$ ικανοποιεί την ανάστροφη εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov (backward Fokker-Planck-Kolmogorov equation) η έχει την μορφή

$$\frac{\partial u}{\partial t} = Au.$$

Με άλλα λόγια, οποιαδήποτε ποσότητα η οποία εξελίσσεται κατά μήκος μίας τροχιάς μίας διάχυσης ικανοποιεί την εξίσωση αυτή.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι λύνουμε την εξίσωση αυτή με αρχικές συνθήκες μία συνάρτηση δέλτα $\delta(x - y)$. Η λύση της εξίσωσης αυτής με την δεδομένη αρχική συνθήκη ονομάζεται μία θεμελιώδης λύση⁵ ή στην γλώσσα της θεωρίας πιθανοτήτων η πυκνότητα μετάβασης της διαδικασίας Markov που παράγεται από την διάχυση αυτή. Η ειδική αυτή λύση συμβολίζεται ως $p(t, x; y)$.

Η λύση για οποιαδήποτε άλλη αρχική συνθήκη που δίνεται από μία συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $f(x)$ μπορεί να γραφεί σαν το ολοκλήρωμα

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)p(t, x; y)dy$$

Αντί ολόκληρου του \mathbb{R}^n ας θεωρήσουμε τώρα ένα χωρίο D που έχει λείο σύνορο ∂D και ας θέσουμε

$$f(x) = \mathbf{1}_D(x) = \begin{cases} 1, & x \in D \\ 0, & \text{σε κάθε άλλη περίπτωση} \end{cases}$$

Η λύση του προβλήματος Cauchy για αυτή την αρχική συνθήκη, μπορεί να γραφεί ως

$$u(x, t) = E_x[\mathbf{1}_D(X_t)] = P(t, x; D) = \int_D p(t, x; y)dy$$

όπου $P(t, x; D)$ είναι η πιθανότητα ότι η διάχυση έχοντας ξεκινήσει στο σημείο x βρίσκεται στο σύνολο D μετά την πάροδο χρόνου t . Αν κάνουμε λίγες πράξεις μπορούμε να δούμε ότι η πυκνότητα μετάβασης $p(t, x; y)$ ικανοποιεί την αποκαλούμενη ευθεία εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov (forward Fokker-Planck-Kolmogorov equation) στις μεταβλητές t και y . Η εξίσωση αυτή δεν είναι παρά η συζυγής εξίσωση της ανάστροφης εξίσωσης

$$\frac{\partial p(t, x; y)}{\partial t} = A_y^* p(t, x; y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (\sigma_{ij}(y)p(t, x; y)) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i(y)p(t, x; y))$$

Παράδειγμα 5.6.9. Βρείτε τις ευθείες (forward) και ανάστροφες (backward) εξισώσεις Kolmogorov για την κίνηση Brown.

Ο γεννήτορας τελεστής της κίνησης Brown είναι ο τελεστής $A = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ ο οποίος είναι και αυτοσυζυγής δηλαδή $A^* = A$. Η πιθανότητα μετάβασης της κίνησης Brown από την θέση x στην θέση y σε χρόνο t , $p(t, x, y)$ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}$$

ενώ οποιαδήποτε συνάρτηση της θέσης του σωματιδίου που εκτελεί την κίνηση Brown θα ικανοποιεί την ευθεία εξίσωση Kolmogorov

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Η λύση των εξισώσεων Fokker-Planck-Kolmogorov μπορεί να μας δώσει την πυκνότητα μετάβασης πιθανότητας για την κίνηση Brown

$$p(t, x; y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{2t}\right)$$

⁵ ή αλλιώς συνάρτηση Green

• Μη χρονικά ομογενείς διαδικασίες διάχυσης

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δούμε ότι για μία μη χρονικά ομογενή διαδικασία διάχυσης η πυκνότητα μετάβασης $p(s, x; t, y)$ ικανοποιεί την ανάστροφη εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + A_{s,x} \right) p(s, x; t, y) = 0, \quad s < t,$$

όπου με τους δείκτες s, x εννοούμε ότι ο τελεστής A περιέχει παραγωγίσεις ως προς τις (ανάστροφες) μεταβλητές s, x , και την ευθεία εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - A_{t,y}^* \right) p(s, x; t, y) = 0, \quad s < t,$$

όπου με τους δείκτες t, y εννοούμε ότι ο τελεστής A περιέχει παραγωγίσεις ως προς τις (ευθείες) μεταβλητές t, y ,

Παράδειγμα 5.6.10. Γράψτε τις εξισώσεις Fokker-Planck-Kolmogorov για την πυκνότητα μετάβασης πιθανότητας της διαδικασίας $Itô$ που δίνεται από την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

όπου $X \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^{n \times 1}$, $\sigma \in \mathbb{R}^{n \times d}$, $B_t \in \mathbb{R}^{d \times 1}$.

Η πυκνότητα μετάβασης πιθανότητας θα έχει την μορφή $p(s, x; t, y) := P[X_t = y \mid X_s = x]$, $s < t$ (εξάρτηση και από το s και το t λόγω του ότι η διαδικασία διάχυσης έχει συντελεστές που εξαρτώνται ρητά από τον χρόνο, δηλαδή δεν παράγεται από μία αυτόνομη στοχαστική διαφορική εξίσωση).

Η ευθεία εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov είναι της μορφής

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} p(s, x; t, y) &- \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} (a_{ij}(t, y) p(s, x; t, y)) \\ &- \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial y_i} (b_i(t, y) p(s, x; t, y)) = 0 \end{aligned}$$

και η ανάστροφη εξίσωση Fokker-Planck-Kolmogorov είναι της μορφής

$$\left(\frac{\partial}{\partial s} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(s, x) \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n nb_i(s, x) \frac{\partial}{\partial x_i} \right) p(s, x; t, y) = 0$$

Ο πίνακας a ορίζεται ως $a = \sigma\sigma^T$ ή με μορφή συνιστωσών $a_{ij} = \sum_{k=1}^d \sigma_{ik}\sigma_{kj}$.

Η λύση της ευθείας εξίσωσης μας δίνει την πυκνότητα μετάβασης σαν συνάρτηση των ευθέων μεταβλητών t, y και η λύση της ανάστροφης μας δίνει την πυκνότητα μετάβασης σαν συνάρτηση των ανάστροφων μεταβλητών s, x . Η λύση της ευθείας εξίσωσης είναι χρήσιμη για τον υπολογισμό μέσω των τιμών της μορφής $E[F(X_t) \mid \mathcal{F}_s]$ βάσει του τύπου

$$E[F(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = \int_{\mathbb{R}^n} p(s, x; t, y) F(y) dy.$$

Τέτοιοι τύποι είναι ιδιαίτερα χρήσιμοι στην αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων.

Μέσος χρόνος εξόδου από ένα χωρίο

Ας εφαρμόσουμε τώρα την αναπαράσταση της λύσης του ελλειπτικού προβλήματος Dirichlet στην περίπτωση όπου $\phi(x) = 0$, $c = 0$ και $f = -1$. Έχουμε ότι η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} Au &= -1 \quad x \in \Omega \\ u(x) &= 0 \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

μπορεί να αναπαρασταθεί ως $u(x) = E[\tau_\Omega]$ (βλ. θεώρημα 5.6.5). Η τελευταία έκφραση όμως δεν είναι τίποτε άλλο από τον μέσο χρόνο εξόδου από το χωρίο Ω της διαδικασίας διάχυσης που έχει ως γεννήτορα τελεστή τον τελεστή A . Στην μονοδιάστατη περίπτωση ο μέσος χρόνος εξόδου μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά.

Παράδειγμα 5.6.11. Για την μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει από το σημείο $x \in [a, b]$ υπολογίστε τον μέσο χρόνο εξόδου από το διάστημα $[a, b]$.

Ο γεννήτορας τελεστής της μονοδιάστατης κίνησης Brown είναι ο $A = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2}$. Ο μέσος χρόνος εξόδου από το διάστημα $[a, b]$ δίνεται από την λύση του προβλήματος συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} T(x) &= -1 \\ T(a) &= 0, \\ T(b) &= 0 \end{aligned}$$

όπου με $T(x)$ συμβολίζουμε τον μέσο χρόνο εξόδου από το διάστημα $[a, b]$ δεδομένου ότι ξεκινήσαμε από το σημείο x . Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί αναλυτικά. Η λύση είναι

$$T(x) = (x - a)(b - x).$$

Μονοδιάστατη περίπτωση $x \in (a, b)$: Πιθανότητα εξόδου από το b

Ας εφαρμόσουμε την αναπαράσταση της λύσης του προβλήματος Dirichlet για $\phi(x)$ τέτοιο ώστε $\phi(a) = 0$ και $\phi(b) = 1$, $c = 0$ και $f = 0$. Η λύση του προβλήματος Dirichlet

$$\begin{aligned} Au &= 0 \quad x \in (a, b) \\ u(a) &= 0, \\ u(b) &= 1 \end{aligned}$$

δίνεται από την αναπαράσταση $u(x) = E[\phi(X_\tau)]$ (βλ. θεώρημα 5.6.5). Από την επίλογή της ϕ φαίνεται καθαρά ότι $u(x) = P\{X_\tau = b\}$, δηλαδή η πιθανότητα ένα σωματίδιο που ξεκίνησε στο x φτάνει στο σημείο b πριν να φτάσει στο σημείο a . Η πιθανότητα αυτή μπορεί να υπολογιστεί με εκπεφρασμένο τρόπο επιλύοντας την συνήθη διαφορική εξίσωση που δόθηκε παραπάνω.

Παράδειγμα 5.6.12. Θεωρείτε την μονοδιάστατη κίνηση Brown στο διάστημα $[a, b]$ η οποία ξεκινάει από το σημείο x . Βρείτε την πιθανότητα $\psi(x)$ η πρώτη έξοδος από το διάστημα $[a, b]$ να είναι από το σημείο b .

Σύμφωνα με ότι είπαμε παραπάνω η πιθανότητα αυτή είναι λύση του προβλήματος συνοριακών συνθηκών

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) &= 0 \\ \psi(a) &= 0, \quad \psi(b) = 1 \end{aligned}$$

Η λύση του προβλήματος αυτού είναι

$$\psi(x) = \frac{x - a}{b - a}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είχαμε πάρει με διαφορετικό τρόπο χρησιμοποιώντας την θεωρία των martingale.

Μέση τιμή εκθετικών συναρτήσεων του χρόνου πρώτης εξόδου

Ας πάρουμε $\lambda > 0$ ένα πραγματικό αριθμό. Πώς μπορούμε να υπολογίσουμε την μέση τιμή $E[e^{-\lambda\tau}]$ όπου τ είναι ο χρόνος πρώτης εξόδου από το χωρίο Ω ;

Έστω $\phi = 1$, $f = 0$ και $c = -\lambda$. Τότε η αναπαράσταση της λύσης του ελλειπτικού προβλήματος

$$\begin{aligned} Au - \lambda u &= 0 & x \in \Omega \\ u &= 1 & x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

μας δίνει ότι $u(x) = E[e^{-\lambda\tau}] = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p_\tau(t) dt$ όπου $p_\tau(t)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας της τυχαίας μεταβλητής $\tau = \min\{t : X_t^x \in \partial\Omega\}$ (βλ. θεώρημα 5.6.5). Μπορούμε να αναγνωρίσουμε την $u(x)$ σαν τον μετασχηματισμό Laplace αυτής της πυκνότητας πιθανότητας.

Παράδειγμα 5.6.13. Για την μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο $x \in [a, b]$ βρείτε τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου χρόνου εξόδου $T_{x,a,b}$ από το διάστημα $[a, b]$.

ΑΣ συμβολίσουμε με $u(x; \lambda)$ την ποσότητα αυτή, δηλαδή $u(x; \lambda) = E[e^{-\lambda T_{x,a,b}}]$. Σύμφωνα με τα παραπάνω η ποσότητα αυτή λύνει το πρόβλημα συνοριακών τιμών

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d^2 u}{dx^2} - \lambda u &= 0 & x \in [a, b] \\ u(a; \lambda) &= 1 & \lambda \in \mathbb{R}_+ \\ u(b; \lambda) &= 1 & \lambda \in \mathbb{R}_+ \end{aligned}$$

Η γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$u(x; \lambda) = C_1 \exp(\sqrt{2\lambda}x) + C_2 \exp(-\sqrt{2\lambda}x)$$

όπου C_1, C_2 είναι σταθερές που καθορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες. Μετά από λίγη άλγεβρα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}b} - e^{-\sqrt{2\lambda}a}}{e^{\sqrt{2\lambda}a}e^{-\sqrt{2\lambda}b} - e^{\sqrt{2\lambda}b}e^{-\sqrt{2\lambda}a}} = 2 \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}b} - e^{-\sqrt{2\lambda}a}}{\sinh(\sqrt{2\lambda}(a-b))} \\ C_2 &= \frac{e^{\sqrt{2\lambda}b} - e^{\sqrt{2\lambda}a}}{e^{\sqrt{2\lambda}a}e^{-\sqrt{2\lambda}b} - e^{\sqrt{2\lambda}b}e^{-\sqrt{2\lambda}a}} = 2 \frac{e^{\sqrt{2\lambda}b} - e^{\sqrt{2\lambda}a}}{\sinh(\sqrt{2\lambda}(a-b))} \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση λοιπόν δίνει τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου χρόνου εξόδου της κίνησης Brown που ξεκίνησε από το σημείο x από το διάστημα $[a, b]$. Αντιστροφή του μετασχηματισμού Laplace μπορεί να μας δώσει την κατανομή του πρώτου χρόνου εξόδου.

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση $x = 0$ και $a \rightarrow -\infty$. Η εφαρμογή του τύπου για τις τιμές αυτές θα μας δώσει τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου χρόνου εξόδου της κίνησης Brown που ξεκίνησε από το 0 από το διάστημα $(-\infty, b)$ ή αλλιώς τον μετασχηματισμό Laplace του πρώτου χρόνου που η τυπική κίνηση Brown χτυπάει το σημείο $x = b$. Μπορούμε να δούμε ότι στο όριο $a \rightarrow -\infty$,

$$C_1 \rightarrow e^{-\sqrt{2\lambda}b}, \quad C_2 \rightarrow 0$$

Συνεπώς, $E[e^{-\lambda T_b}] = e^{-\sqrt{2\lambda}b}$, που φυσικά συμπίπτει με το αποτέλεσμα που είχαμε βρεί στο Παράδειγμα 3.3.2 χρησιμοποιώντας διαφορετικές μεθόδους.

Πιθανότητα να είναι ο χρόνος εξόδου μεγαλύτερος του t

Θα εργαστούμε τώρα με την αναπαράσταση Feynman-Kac της λύσης του παραβολικού προβλήματος (βλ. θεώρημα 5.6.6). Ας θέσουμε $g = 0, f = 1, c = 0$. Τότε η λύση του προβλήματος

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Au, \quad x \in \Omega \\ u(0, x) &= 1, \\ u(t, x) &= 0, \quad x \in \partial\Omega \end{aligned}$$

δίνεται από την αναπαράσταση $u(t, x) = E[\mathbf{1}_{\tau=t}] = P\{\tau > t\}$. Η λύση της διαφορικής εξίσωσης λοιπόν θα μας δώσει την πιθανότητα ο πρώτος χρόνος εξόδου από το χωρίο Ω , τ , να είναι μεγαλύτερος του t . Προβλήματα τέτοιου τύπου είναι ιδιαίτερα χρήσιμα στα αναλογιστικά μαθηματικά.

Παράδειγμα 5.6.14. Θεωρείστε την μονοδιάστατη κίνηση Brown που ξεκινάει στο σημείο x . Βρείτε την πιθανότητα ο χρόνος εξόδου από το διάστημα $[a, b]$ να είναι μεγαλύτερος από t .

ΑΣ συμβολίσουμε με $p(t, x)$ την πιθανότητα αυτή. Η συνάρτηση $p(t, x)$ είναι η λύση της διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial}{\partial t} p(t, x) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} p(t, x)$$

με αρχική συνθήκη

$$p(0, x) = 1,$$

και συνοριακή συνθήκη

$$p(t, a) = 0, \quad p(t, b) = 0.$$

Το πρόβλημα αυτό είναι μία διαφορική εξίσωση με μερικές παραγώγους, η λύση της οποίας μπορεί να γίνει με διάφορες μεθόδους όπως π.χ. η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών ή η μέθοδος των εικόνων. Δεν θα επεκταθούμε στον τρόπο λύσης αλλά θα δώσουμε την τελική έκφραση η οποία είναι

$$u(t, x) = \int_a^b p_{a,b}(x, t; y, 0) dy$$

$$p_{a,b}(x, t; y, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(x+2nd-y)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(2b-x+2nd+y)^2}{2t}\right) \right\}$$

όπου $d = b - a$. Η λύση αυτή έχει βρεθεί με την βοήθεια της μεθόδου των εικόνων. Ισοδύναμη μορφή της λύσης μπορεί να βρεθεί με την χρήση της μεθόδου του χωρισμού των μεταβλητών οπότε η λύση θα είναι εκφρασμένη με την μορφή μίας σειράς Fourier. Η ισοδύναμη αυτή έκφραση είναι

$$u(t, x) = \int_a^b p_{a,b}(x, t; y, 0) dy$$

$$p_{a,b}(x, t; y, 0) = \frac{2}{d} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{d}\right) \sin\left(\frac{n\pi(y-a)}{d}\right) \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{2d^2t}\right)$$

Οι δύο αυτές αναπαραστάσεις είναι ισοδύναμες. Στην μία περίπτωση η λύση για την πιθανότητα ο χρόνος εξόδου να είναι μεγαλύτερος του t θα δοθεί σαν μία άπειρη σειρά από συναρτήσεις σφάλματος, ενώ στην δεύτερη σαν μία σειρά Fourier.

5.6.6 Άλλα προβλήματα συνοριακών τιμών.

Και τα άλλα προβλήματα συνοριακών τιμών μπορούν να έχουν κάποια πιθανοθεωρητική ερμηνεία. Η πιθανοθεωρητική ερμηνεία των άλλων προβλημάτων συνοριακών τιμών απαιτεί την χρήση πιο περίπλοκων διαχύσεων από αυτές που χρησιμοποιούνται για την μελέτη του προβλήματος Dirichlet. Θα αρκεστούμε εδώ να παραθέσουμε μερικές βασικές ιδέες. Για περισσότερες λεπτομέρειες παραπέμπουμε π.χ. στο [10].

Ας υποθέσουμε πως ενδιαφερόμαστε για την λύση του ακόλουθου προβλήματος Neumann.

$$(5.-230) \quad \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= Au - cu, \quad x \in \Omega \\ u(x, 0) &= f(x), \\ (\nabla u, \gamma(x)) - \lambda(x)u &= h(x), \quad x \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

Τότε, και αυτό είναι φανερό διαισθητικά, μπορούμε να περιμένουμε ότι χρειαζόμαστε μία διαδικασία διάχυσης που σχετίζεται με τον τελεστή A , αλλά αφού η συνοριακή συνθήκη σχετίζεται με τον προσδιορισμό κάποιας ροής, η διάχυση που θα χρησιμοποιήσουμε θα πρέπει να είναι (μερικώς) ανακλώμενη στο σύνορο του χωρίου που μας ενδιαφέρει κατά την διεύθυνση $\gamma(x)$ (γ είναι ένα διανυσματικό πεδίο).

Η παραπάνω διαισθητική αντιμετώπιση του θέματος μπορεί να γίνει πιο αυστηρή ως εξής: Η διαδικασία διάχυσης που μας ενδιαφέρει μπορεί να δοθεί από την λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t^x = \sigma(X_t^x)dB_t + b(X_t^x)dt + \mathbf{1}_{\partial\Omega}(X_t^x)\gamma(X_t^x)d\xi_t^x,$$

$$X_0^x = x, \quad \xi_0^x = 0$$

όπου $\mathbf{1}_{\partial\Omega}$ είναι η δείκτηρα συνάρτηση του συνόρου του χωρίου Ω και ξ_t^x είναι μία μη-φθίνουσα διαδικασία που αυξάνει μόνο όταν $t \in \Lambda = \{t : X_t^x \in \partial\Omega\}$. Με άλλα λόγια, τα σωματίδια διαχέονται χωρίς καμία παρέμβαση έως ότου φτάσουν στο σύνορο του χωρίου όπου η στοχαστική διαδικασία x_i^x τα ανακλά κατά την διεύθυνση του διανυσματικού πεδίου $\gamma(x)$. Η απόδειξη της ύπαρξης μίας τέτοιας διαδικασίας διάχυσης είναι μη τετριμένο θέμα, και παραπέμπουμε στην σχετική βιβλιογραφία. Εδώ θα ακολουθήσουμε την τακτική της ακρίδας και θα θεωρήσουμε δεδομένη την ύπαρξη μίας τέτοιας διαδικασίας διάχυσης και θα παραθέσουμε (χωρίς απόδειξη) το παρακάτω θεώρημα:

Θεώρημα 5.6.10. Μία λύση του προβλήματος (5.-230) που είναι $C^{1,2}$ έχει την αναπαράσταση

$$u(t, x) = E \left[f(X_t^x) \exp \left\{ - \int_0^t c(X_s^x) ds - \int_0^t \lambda(X_s^x) d\xi_s^x \right\} \right] - \\ E \left[\int_0^t h(X_s^x) \exp \left\{ \int_0^s c(X_{s'}^x) ds' - \int_0^s \lambda(X_{s'}^x) d\xi_{s'}^x \right\} d\xi_s^x \right]$$

Με τον όρο $C^{1,2}$ εννοούμε ότι η λύση έχει συνεχείς και φραγμένες δεύτερες παραγώγους στις χωρικές μεταβλητές και συνεχείς και φραγμένες πρώτες παραγώγους στον χρόνο.

Παρόμοιες αναπαραστάσεις μπορεί να δοθούν και για ελλειπτικά προβλήματα.

5.7 Αποδείξεις των θεωρημάτων

5.7.1 Χώροι Banach και το θεώρημα σταθερού σημείου

Ορισμός 5.7.1. Ένας χώρος Banach είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος με νόρμα.

Υπενθυμίζουμε την έννοια της πληρότητας: Ένας χώρος X ονομάζεται πλήρης αν κάθε ακολουθία Cauchy u_n συγχλίνει σε ένα στοιχείο u για το οποίο ισχύει $u \in X$.

Για τους χώρους Banach ισχύει το θεώρημα σταθερού σημείου.

Θεώρημα 5.7.1. (Το θεώρημα σταθερού σημείου) Έστω X ένας χώρος Banach και $\| \cdot \|_X$ μία νόρμα σε αυτόν. Έστω μία απεικόνιση $T : X \rightarrow X$ για την οποία ισχύει $\| Tu_1 - Tu_2 \|_X \leq \| u_1 - u_2 \|_X$. Τότε υπάρχει $u \in X$ τέτοιο ώστε $Tu = u$.

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές στο βασικό αυτό θεώρημα σταθερού σημείου. Τα θεωρήματα σταθερού σημείου παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στα μαθηματικά, και ιδιαίτερα στις διαφορικές εξισώσεις, είτε στοχαστικές είτε ντετερμινιστικές.

5.7.2 Απόδειξη της ιδιότητας Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Θα αποδείξουμε στο παράρτημα αυτό την ιδιότητα Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων (θεώρημα 5.4.2)

Για την διευκόλυνση των αναγνωστών παραθέτουμε το θεώρημα

Θεώρημα 5.4.2 (Η ιδιότητα Markov) Έστω X_t η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

όπου οι συντελεστές πληρούν τις συνθήκες Lipschitz και την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Τότε η X_t είναι μία διαδικασία Markov με πιθανότητα μετάβασης που ορίζεται από την σχέση

$$p(s, x; t, A) = P(X_t^{(s,x)} \in A)$$

όπου $X_t^{(s,x)}$ είναι η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$(5.-236) \quad X_t^{(s,x)} = x + \int_s^t b(r, X_r^{(s,x)})dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{(s,x)})dB_r$$

για $s \leq t$. Η $X_t^{(s,x)}$ ουσιαστικά είναι η λύση της αρχικής στοχαστικής εξίσωσης με αρχική τιμή x την χρονική στιγμή s ή αλλιώς για $X_s = x$.

Απόδειξη: Έστω $\mathcal{G}_s = \sigma(B_r - B_s : r \geq s)$ η σ -άλγεβρα που παράγεται από τις μεταβολές της κίνησης Brown μεταξύ των χρονικών στιγμών s και r . Λόγω της ανεξαρτησίας των μεταβολών της κίνησης Brown η σ -άλγεβρα αυτή είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας $\mathcal{F}_s = \sigma(B_r, r \leq s)$. Από τον ορισμό της μέσω της εξίσωσης (5.-236) η $X_t^{(s,x)}$

θα είναι \mathcal{G}_s -μετρήσιμη συνεπώς θα είναι ανεξάρτητη της \mathcal{F}_s . Η X_t όμως θα ικανοποιεί την στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$X_t = X_s + \int_s^t b(r, X_r) dr + \int_s^t \sigma(r, X_r) dB_r$$

(δηλαδή την αρχική στοχαστική διαφορική εξίσωση αλλά με αρχική τιμή την X_s όταν σαν αρχική χρονική στιγμή παίρνουμε την χρονική στιγμή s). Η εξίσωση αυτή είναι η ίδια με την (5.-236) συνεπώς λόγω της μοναδικότητας των λύσεων των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων μπορούμε να καταλήξουμε ότι $X_t = X_t^{(s, X_s)}$ για $s \leq t$.

Ας θεωρήσουμε τώρα $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ και ας θέσουμε $h(x, \omega) = \mathbf{1}_A(X_t^{(s, x)})$. Έχουμε ότι

$$P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) = E[\mathbf{1}_A(X_t) | \mathcal{F}_s] = E[\mathbf{1}_A(X_t^{(s, X_s)}) | \mathcal{F}_s]$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα την ανεξαρτησία της $X_t^{(s, X_s)}$, $s \leq t$ από την \mathcal{F}_s έτσι ώστε να μπορέσουμε να υπολογίσουμε την υπό συνθήκη μεση τιμή ως προς την σ -άλγεβρα αυτή. Πιο συγκεκριμένα θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα ότι αν $h(x, \omega)$ είναι μία φραγμένη μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση του x η οποία είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας \mathcal{F}_s και αν ζ είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι μετρήσιμη ως προς την σ -αγεβρα \mathcal{F}_s τότε $E[h(\zeta, \omega) | \mathcal{F}_s] = H(\zeta)$ όπου $H(x) := E[h(x, \omega)]$. Η απόδειξη του ισχυρισμού αυτού που μάλλον είναι διαισθητικά αναμενόμενος παρατίθεται σαν ένα ξεχωριστό λήμμα στην συνέχεια.

Καταλήγουμε λοιπόν στο ότι

$$\begin{aligned} P(X_t \in A | \mathcal{F}_s) &= E[\mathbf{1}_A(X_t^{(s, X_s)}) | \mathcal{F}_s] = E[\mathbf{1}_A(X_t^{(s, x)})] \Big|_{x=X_s} \\ &= p(s, x; t, A) \Big|_{x=X_s} = p(s, X_s; t, A) \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. \square

Λήμμα 5.7.1. Έστω $h(x, \omega)$ μία φραγμένη μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση του x η οποία είναι ανεξάρτητη της σ -άλγεβρας \mathcal{F}_s . Έστω ζ μία \mathcal{F}_s -μετρήσιμη τυχαία μεταβλητή. Τότε,

$$E[h(\zeta, \omega) | \mathcal{F}_s] = H(\zeta)$$

όπου $H(x) = E[h(x, \omega)]$.

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε ότι η $h(x, \omega)$ είναι μία απλή συναρτηση της μορφής

$$h(x, \omega) = \sum_{i=1}^k u_i(x) v_i(\omega)$$

όπου $u_i(x)$ είναι ντετερμινιστικές συναρτήσεις του x και οι $v_i(\omega)$ είναι τυχαίες μεταβλητές ανεξάρτητες της \mathcal{F}_s . Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε την συνάρτηση $H(x)$ η οποία και θα πάρει την μορφή

$$H(x) = \sum_{i=1}^k u_i(x) E[v_i(\omega)]$$

Για κάθε σύνολο $A \in \mathcal{F}_s$ ισχύει

$$\begin{aligned} E[h(\zeta, \omega) \mathbf{1}_A] &= E\left[\sum_{i=1}^k u_i(\zeta) v_i(\omega) \mathbf{1}_A\right] = \sum_{i=1}^k E[u_i(\zeta) \mathbf{1}_A] E[v_i(\omega)] \\ &= E\left[\sum_{i=1}^k u_i(\zeta) E[v_i(\omega)] \mathbf{1}_A\right] = E[H(\zeta) \mathbf{1}_A] \end{aligned}$$

Συνεπώς, η σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε ισχύει για h οι οποίες είναι απλές συναρτήσεις. Όμως, κάθε φραγμένη, μετρήσιμη τυχαία συνάρτηση $h(x, \omega)$ μπορεί να προσεγγιστεί από μία ακολουθία τυχαίων συναρτήσεων απλής μορφής. Παίρνοντας το όριο των ακολουθιών αυτών και χρησιμοποιώντας τα θεωρήματα της σύγκλισης καταλήγουμε στο ζητούμενο. \square

5.7.3 Απόδειξη της ισχυρής ιδιότητας Markov για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων

Θα αποδείξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, δηλαδή το θεώρημα 5.4.3. Για την διευκόλυνση των αναγνώστων παραθέτουμε ξανά την εκφώνηση του θεωρήματος.

Θεώρημα 5.4.3 (Η ισχυρή ιδιότητα Markov) Έστω X_t η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t$$

Ας θεωρήσουμε ότι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν τις γραμμικές συνθήκες αύξησης δηλαδή ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις

$$\begin{aligned} |b(t, x) - b(t, y)|^2 \vee |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)|^2 &\leq \bar{K} |x - y|^2 \\ |b(t, x)|^2 \vee |\sigma(t, x)|^2 &\leq K(1 + |x|^2) \end{aligned}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$. Τότε, η στοχαστική διαδικασία X_t έχει την ισχυρή ιδιότητα Markov.

Απόδειξη: Έχοντας ήδη αποδείξει την ιδιότητα Markov για τις λύσεις στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων, για να δείξουμε την ισχυρή ιδιότητα Markov θα πρέπει να δείξουμε επίσης και ότι οι λύσεις ικανοποιούν και την ιδιότητα Feller καθώς και την συνέχεια των τροχιών. Η συνέχεια των τροχιών μπορεί να αποδειχθεί κάνοντας χρήση τις ιδιότητες συνέχειας των στοχαστικών ολοκληρωμάτων. Περισσότερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η απόδειξη της ιδιότητας του Feller για τις λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων. Η απόδειξη ότι η ιδιότητα Feller εξασφαλίζει την ισχυρή ιδιότητα Markov είναι πέρα των πλαισίων του παρόντος. Για την απόδειξη του σημείου αυτού παραπέμπουμε π.χ. στο [8]. Για να δείξουμε ότι οι λύσεις της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης έχουν την ιδιότητα Feller θα πρέπει να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$(x, s) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y)p(s, x; s + \lambda, dy) := E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)})]$$

είναι συνεχής για κάθε φραγμένη συνεχή συνάρτηση $\phi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ και για κάθε δεδομένο $\lambda > 0$.

Αυτό μπορεί να δειχθεί ως εξής. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)})] - E[\phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] &= E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] = \\ &= E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(s,x)}) + \phi(X_{u+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] \end{aligned}$$

Λόγω όμως της συνέχειας των λύσεων των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουμε ότι

$$\begin{aligned} E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] &\rightarrow 0, \quad (u, y) \rightarrow (s, x) \\ E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)}) - \phi(X_{u+\lambda}^{(s,x)})] &\rightarrow 0, \quad u \rightarrow s \end{aligned}$$

Η απόδειξη των ισχυρισμών αυτών σαν ένα ξεχωριστό λήμμα στο τέλος της παραγράφου.

Συνεπώς,

$$E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)})] - E[\phi(X_{u+\lambda}^{(u,y)})] \rightarrow 0, \quad (u, y) \rightarrow (s, x)$$

άρα η μέση τιμή $E[\phi(X_{s+\lambda}^{(s,x)})]$ είναι μία συνεχής συνάρτηση των (s, x) για κάθε λ . Έτσι αποδεικνύεται η ιδιότητα Feller και από αυτή καταλήγουμε στην ισχυρή ιδιότητα Markov. \square

Θα δώσουμε τώρα και το λήμμα που σχετίζεται με την συνέχεια.

Λήμμα 5.7.2. Ας υποθέσουμε ότι οι συντελεστές της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης b, σ είναι ομοιόμορφα Lipschitz συνεχείς και ότι ικανοποιούν την συνθήκη γραμμικής αύξησης. Για κάθε $(x, s) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}_+$ ας συμβολίσουμε με $X_t^{(s,x)}$ την λύση της εξίσωσης

$$X_t^{(s,x)} = x + \int_s^t b(r, X_r^{(s,x)})dr + \int_s^t \sigma(r, X_r^{(s,x)})dB_r, \quad t \geq s$$

Τότε, για κάθε $T > 0$ και $\delta > 0$ ισχύει ότι

$$E\left[\sup_{u \leq t \leq T} |X_t^{(s,x)} - X_t^{(u,y)}|^2\right] \leq C(|x - y|^2 + |u - s|), \quad 0 \leq s, u \leq T, |x| \vee |y| \leq \delta$$

Απόδειξη: Ας θεωρήσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $s \leq u$. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned} X_t^{(s,x)} - X_t^{(u,y)} &= X_u^{(s,x)} - y + \int_u^t [b(r, X_r^{(s,x)}) - b(r, X_r^{(u,y)})] dr \\ &\quad + \int_u^t [\sigma(r, X_r^{(s,x)}) - \sigma(r, X_r^{(u,y)})] dB_r \end{aligned}$$

Όμως, χρησιμοποιώντας τις συνθήκες που ικανοποιούν οι συντελεστές παίρνουμε

$$\begin{aligned} E[|X_u^{(s,x)} - y|^2] &\leq 2E[|X_u^{(s,x)} - x|^2 + 2|x - y|^2] \\ &\leq C_1 |u - s| + 2|x - y|^2 \end{aligned}$$

Αν $u \leq v \leq T$ τότε

$$\begin{aligned} E[\sup_{u \leq t \leq v} |X_t^{(s,x)} - X_t^{(u,y)}|^2] &\leq 3C_1 |u - s| + 6|x - y|^2 \\ &\quad + 3K(T + t) \int_u^v E[\sup_{u \leq t \leq r} |X_t^{(s,x)} - X_t^{(u,y)}|^2] dr \end{aligned}$$

Από την σχέση αυτή μπορεί να καταλήξουμε στο ζητούμενο κάνοντας χρήση της ανισότητας του Gronwall (βλ. Λήμμα 5.7.3). \square

Λήμμα 5.7.3. (Ανισότητα του Gronwall) Έστω $f(t)$ μία μη αρνητική, φραγμένη και μετρήσιμη κατά Borel συνάρτηση στο διάστημα $[0, T]$ και $g(t)$ μία μη αρνητική ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο $[0, T]$. Αν ισχύει

$$f(t) \leq c + \int_0^t g(s)f(s)ds, \quad \forall 0 \leq t \leq T,$$

τότε

$$f(t) \leq c \exp\left(\int_0^t g(s)ds\right), \quad \forall 0 \leq t \leq T.$$

Απόδειξη: Για την απόδειξη του κλασσικού αυτού λήμματος αρκεί να θέσουμε $z(t)$ ίσο με το ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της πρώτης ανισότητας και να χρησιμοποιήσουμε τον κανόνα της αλυσίδας για να βρούμε μία ανισότητα για το $\log(z(t))$. \square

5.7.4 Απόδειξη του θεωρήματος του Girsanov

Θα δώσουμε τώρα την απόδειξη του θεωρήματος του Girsanov. Για ευκολία παραθέτουμε ξανά την εκφώνηση του θεωρήματος.

Θεώρημα 5.5.2(Girsanov) Ας θεωρήσουμε $u_t = (u_{1,t}, \dots, u_{n,t})$ ένα διάνυσμα από (τετραγωνικά ολοκληρώσιμες) στοχαστικές διαδικασίες που ικανοποιούν την συνθήκη του Novikov

$$E[\exp(\frac{1}{2} \int_0^T u_s \cdot u_s ds)] < \infty.$$

Έστω B_t μία τυπική κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P . Ας ορίσουμε την στοχαστική διαδικασία

$$M_t^u = \exp[-\int_0^t u_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t u_s \cdot u_s ds], \quad t \in [0, T].$$

Η στοχαστική αυτή διαδικασία είναι μία martingale κάτω από το μέτρο Π . Θεωρείστε τώρα το ισοδύναμο μέτρο πιθανότητας Q^u που ορίζεται από το

$$\frac{dQ^u}{dP} = M_t^u$$

Τότε η στοχαστική διαδικασία \bar{B}^u που ορίζεται από την σχέση

$$\bar{B}_t^u = B_t + \int_0^t u_s ds, \quad 0 \leq t \leq T$$

είναι μία τυπική κίνηση Brown και μία martingale κάτω από το μέτρο Q^u . Επιπλέον, η \bar{B}^u έχει την ιδιότητα αναπαράστασης martingale, δηλαδή για κάθε τοπική Q^u -martingale L_t υπάρχει κάποια ϕ η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και τέτοια ώστε

$$L_t = L_0 + \int_0^t \phi_s d\bar{B}_s^u, \quad t \leq T$$

Απόδειξη: Για να αποδείξουμε το θεώρημα του Girsanov αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα του Levy για να δείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία \bar{B}_t είναι μία κίνηση Brown. Συγκεκριμένα, αρκεί να δείξουμε ότι η \bar{B}_t και η $L_t := \bar{B}_{i,t}\bar{B}_{j,t} - \delta_{ij}t$ είναι martingales ως προς το μέτρο Q .

Για το πρώτο ισχυρισμό θα δείξουμε πρώτα ότι η στοχαστική διαδικασία $K_t = M_t B_t$ είναι martingale κάτω από το μέτρο P . Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Itô για την διαδικασία K_t . Ισχύει ότι

$$dK_{i,t} = M_t d\bar{B}_{i,t} + \bar{B}_{i,t} dM_t + d\bar{B}_{i,t} dM_t$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα ότι

$$dM_t = -M_t \sum_j u_{j,t} dB_{j,t}$$

και ότι

$$d\bar{B}_{i,t} = u_{i,t} dt + dB_{i,t}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} dK_{i,t} &= M_t(dB_{i,t} + u_{i,t}dt - \bar{B}_{i,t} \sum_j u_{j,t} dB_{j,t} - \sum_j u_{j,t} \delta_{ij} dt) \\ &= M_t(dB_{i,t} - \bar{B}_{i,t} \sum_j u_{j,t} dB_{j,t}) \end{aligned}$$

Συνεπώς, η στοχαστική διαδικασία K_t μπορεί να γραφεί σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα Itô επάνω στην στοχαστική διαδικασία B_t η οποία είναι μία κίνηση Brown κάτω από το μέτρο P . Από τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô καταλήγουμε ότι η K_t είναι μία αμ μαρτινγαλε κάτω από το μέτρο P . Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο για τον υπολογισμό των υπό συνθήκη μέσων τιμών κάτω από το καινούργιο μέτρο. Έχουμε ότι

$$E_Q[\bar{B}_{i,t} | \mathcal{F}_s] = \frac{E_P[M_t \bar{B}_{i,t} | \mathcal{F}_s]}{E_P[M_t | \mathcal{F}_s]} = \frac{E_P[K_{i,t} | \mathcal{F}_s]}{M_s} = \frac{K_{i,s}}{M_s} = \bar{B}_{i,s}$$

και συνεπώς η \bar{B}_t είναι μια martingale κάτω από το μέτρο Q . Στην παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η K_t και η M_t είναι martingales κάτω από το μέτρο Q .

Για τον δεύτερο ισχυρισμό θα αποδείξουμε ότι η στοχαστική διαδικασία $K'_t = M_t(\bar{B}_{i,t}\bar{B}_{j,t} - \delta_{ij}t)$ είναι martingale κάτω από το μέτρο P . Θα χρησιμοποιήσουμε τον τύπο του Itô για την συνάρτηση $f(x, y, z, t) = z(xy - \delta_{ij}t)$ όπου $x = \bar{B}_{i,t}$, $y = \bar{B}_{j,t}$ και $z = M_t$. Μετά από λίγη άλγεβρα καταλήγουμε στο ότι

$$\begin{aligned} dK'_t &= -\delta_{ij}M_t dt + M_t \bar{B}_{j,t} d\bar{B}_{i,t} + M_t \bar{B}_{i,t} d\bar{B}_{j,t} + \\ &\quad (\bar{B}_{i,t}\bar{B}_{j,t} - \delta_{ij}t) dM_t + M_t d\bar{B}_{i,t} d\bar{B}_{j,t} + \\ &\quad \bar{B}_{j,t} dM_t d\bar{B}_{i,t} + \bar{B}_{i,t} dM_t d\bar{B}_{j,t} \end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας και μετά από πράξεις καταλήγουμε ότι

$$dK'_t = -M_t(\bar{B}_{i,t}\bar{B}_{j,t} - \delta_{ij}t) \sum_{j'} u_{j',t} dB_{j',t} = -K'_t \sum_{j'} u_{j',t} dB_{j',t}$$

Η στοχαστική διαδικασία K'_t μπορεί λοιπόν να εκφραστεί σαν ένα ολοκλήρωμα Itô επάνω στην διαδικασία B_t η οποία είναι μία κίνηση Brown ως προς το μέτρο P . Χρησιμοποιούμε τώρα τον τύπο για τον υπολογισμό της υπό συνθήκης μέσης τιμής ως προς το μέτρο Q

$$E_Q[L_t | \mathcal{F}_s] = \frac{E_P[M_t L_t | \mathcal{F}_s]}{E_P[M_t | \mathcal{F}_s]} = \frac{E_P[K'_{i,t} | \mathcal{F}_s]}{M_s} = \frac{K'_{i,s}}{M_s} = L_s$$

και συνεπώς η L_t είναι μια martingale κάτω από το μέτρο Q . Στην παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η K_t και η M_t είναι martingales κάτω από το μέτρο Q .

Αυτό και ολοκληρώνει την απόδειξη. \square

5.8 Βασικές ιδέες του κεφαλαίου

Στο κεφάλαιο αυτό παρουσιάσαμε μερικές βασικές ιδέες σχετικά με τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις, την ύπαρξη και τις ιδιότητες των λύσεων τους και σκιαγραφήσαμε τις πιθανές τους εφαρμογές στα χρηματοοικονομικά. Ένα από τα βασικότερα σημεία του κεφαλαίου αυτού είναι η σύνδεση των πιθανόν μη γραμμικών στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων με ντετερμινιστικές γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους μέσω της αναπαράστασης των Feynman-Kac.

Σημαντικά σημεία που πρέπει να θυμόμαστε

- Οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων είναι διαδικασίες Itô
- Τις συνθήκες κάτω από τις οποίες έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων για στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις
- Την διάκριση μεταξύ ισχυρών και ασθενών λύσεων
- Οι λύσεις των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων έχουν την ιδιότητα Markov και την ισχυρή ιδιότητα Markov κάτω από ορισμένες συνθήκες
- Το θεώρημα του Girsanov σχετικά με την αλλαγή ταχύτητας σε μία στοχαστική διαφορική εξίσωση.
 - ◇ Σύμφωνα με το θεώρημα αυτό μπορούμε να μετατρέψουμε μία διαδικασία Itô σε martingale αν την ‘κοιτάξουμε’ κάτω από το κατάλληλο μέτρο πιθανότητας.
 - ◇ Το θεώρημα Girsanov μας παρέχει ένα τρόπο κατασκευής του μέτρου αυτού
 - ◇ Το θεώρημα του Girsanov είναι ένα από τα πιο απαραίτητα μαθηματικά αποτελέσματα στην χρηματοοικονομική
- Με κάθε διαδικασία Itô μπορούμε να συσχετίσουμε ένα διαφορικό τελεστή με μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης ο οποίος ονομάζεται ο γεννήτορας τελεστής της διαδικασίας.
- Με την χρήση του γεννήτορα τελεστή μπορούμε να συνδέσουμε τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις με τις γραμμικές διαφορικές εξισώσεις με μερικές παραγώγους
 - ◇ Η αναπαράσταση Feynman-Kac μας επιτρέπει να γράψουμε την λύση ντετερμινιστικών διαφορικών εξισώσεων με μερικές παραγώγους σαν την μέση τιμή κατάλληλα επιλεγμένων συναρτησοειδών επάνω στις τροχιές κατάλληλα επιλεγμένων διαδικασιών Itô
 - ◇ Με την χρήση της αναπαράστασης αυτής μπορούμε να πάρουμε ενδιαφέροντα αποτελέσματα για τις ιδιότητες διαδικασιών Itô όπως π.χ. χρονους εξόδου από περιοχές ή την πυκνότητα μετάβασης
 - ◇ Η αναπαράσταση αυτή βρίσκει ευρεία χρήση στην χρηματοοικονομική. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα είναι η εξίσωση Black-Scholes για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων

Βιβλιογραφία

- [1] R. F. Bass, *'Probabilistic Techniques in Analysis'*, Springer-Verlag, 1995
- [2] R. F. Bass, *Diffusions and Elliptic Operators*, Springer-Verlag, 1998
- [3] H. Brezis, *Συναρτησιακή Ανάλυση: Θεωρία και Εφαρμογές*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Ε.Μ.Π., Αθήνα, 1997
- [4] Z. Brzeźniak and T. Zastawniak, *Basic Stochastic Processes*, Springer, 1999
- [5] H. Bühlmann, *Mathematical Methods in Risk Theory*, Springer, 1970
- [6] Y. S. Chow and H. Robbins *'On optimal stopping rules.'* **Z. Wahr. Theorie Vol. 2** pp. 33-49 (1963)
- [7] J. Cox, S. Ross and M. Rubinstein, *Option pricing: A simplified approach*, **J. Financial Econ. 7** pp. 229-264 (1979)
- [8] S. N. Ethier and T. G. Kurtz, *Markov Processes: Characterization and Convergence*, John Wiley and Sons, 1986
- [9] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics Vol. 19, American Mathematical Society, 1998
- [10] M. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations*, Annals of Mathematics Studies, Study 109, Princeton University Press, 1985
- [11] P. M. Garber and L. E. O. Svensson, *The operation and collapse of fixed exchange rate regimes*, Institute for International Economic Studies, University of Stockholm, Seminar Paper No. 588, 1994
- [12] C. Goffman and G. Pedrick, *First Course in Functional Analysis*, Prentice-Hall, 1965
- [13] B. Fristedt and L. Gray, *A Modern Approach to Probability Theory*, Birkhäuser, 1997
- [14] J. Jacod and P. Protter, *Probability Essentials*, Springer, 2000
- [15] O. Kallenberg, *Foundations of Modern Probability*, Springer, 1997
- [16] A. N. Kolmogorov, *Foundations of the Theory of Probability* Chelsea New York, 1933-56
- [17] Σ. Καλπαζίδου, *Στοιχεία Μετροθεωρίας Πιθανοτήτων*, Εκδόσεις Ζήτη, 2002
- [18] Γ. Κουμουλλής και Σ. Νεγρεπόντης, *Θεωρία Μέτρου*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα, 1988
- [19] Κ. Ι. Κουτσόπουλος, *Αναλογιστικά Μαθηματικά, Μέρος Ι: Θεωρία των Κινδύνων*, Αθήνα 1999
- [20] P.R. Krugman, *Currencies and Crises*, The MIT Press, 1992
- [21] N. V. Krylov, *Introduction to the Theory of Diffusion Processes*, Translations of Mathematical Monographs, Volume 142, American Mathematical Society, 1995
- [22] S. F. LeRoy *'Efficient capital markets and martingales.'* **Journal of Economic Literature Vol. XXVII** 1989 pp. 1583-1621.
- [23] J. D. Logan, *Εφαρμοσμένα Μαθηματικά*, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, 2002

- [24] X. Mao *Stochastic Differential Equations and Applications* Horwood Series in Mathematics and Applications Horwood Publishing Chichester 1997
- [25] P. Malliavin, *Integration and Probability*, Springer, 1995
- [26] Σ. Νεγρεπόντης, Θ. Ζαχαριάδης, Ν. Καλαμίδας και Β. Φαρμάκη, *Γενική Τοπολογία και Συναρτησιακή Ανάλυση*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1988
- [27] J. Neveu, *Discrete-Parameter Martingales*, North-Holland Mathematical Library, Volume 10, North-Holland, 1975
- [28] L. T. Nielsen, *Pricing and Hedging of Derivative Securities*, Oxford, 1999
- [29] B. Oksendal, *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th Edition, Springer 1997
- [30] P. Protter *Stochastic Integration and Differential Equations* Springer, 1990
- [31] A. W. Phillips, 'The relation between unemployment and the rate of change of money wage rates in the United Kingdom, 1861-1957', **Economica** November 1958
- [32] M. M. Rao, *Probability Theory with Applications*, Academic Press, 1984
- [33] D. Revuz and M. Yor, *Continuous Martingales and Brownian Motion* Springer, 1999 (3rd Edition)
- [34] W. Rudin, *Αρχές Μαθηματικής Αναλύσεως*, Πανεπιστημιακά Μαθηματικά Κείμενα, Leader Books, Αθήνα, 2000
- [35] A. E. Taylor, *General Theory of Functions and Integration*, Dover Publications 1985
- [36] Σ. Α. Τερσένοβ, *Διαφορικές Εξισώσεις με Μερικές Παραγώγους*, Εκδόσεις Συμμετρία, Αθήνα 1992
- [37] D. Williams, *Probability with Martingales*, Cambridge Mathematical Textbooks, 1991
- [38] Ο. Χρυσωφίνου, *Εισαγωγή στις Στοχαστικές Ανελίξεις (Διδακτικές Σημειώσεις)* Αθήνα 2002