Εισαγωγή στα Στοχαστικά Χρηματοοικονομικά

Α. Ν. Γιαννακόπουλος,
Τμήμα Στατιστικής
ΟΠΑ

10 Νοεμβρίου 2011

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά

1.1 Εισαγωγή

Μία οικονομία μπορεί να αποτελείται από μία σειρά αγορών οι οποίες είναι αλληλοσυνδεόμενες. Από όλες τις πιθανές αγορές που μπορεί να εμφανίζονται σε ένα οικονομικό σύστημα οι χρηματαγορές εμφανίζουν ίσως το μεγαλύτερο ενδιαφέρον. Αυτό γιατί συνδέονται με οποιαδήποτε άλλη αγορά αλλά και με το κάθε άτομο. Οι χρηματαγορές αποτελούν το μέσο που χρησιμοποιούν οι επιχειρήσεις για να μαζέψουν τα απαραίτητα κεφάλαια για να εξασφαλίσουν την λειτουργία τους, το μέσο που χρησιμοποιούν οι μεμονωμένοι επενδυτές για να αυξήσουν την ευημερία τους και το μέσο που χρησιμοποιούμε για να αποθηκεύσουμε τον πλεονάζοντα πλούτο.

Τα Χρηματοοικονομικά είναι το κομμάτι της Οικονομικής Επιστήμης που ασχολείται με την λειτουργία των χρηματοοικονομικών αγορών. Τα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά είναι το κομμάτι των Μαθηματικών που ασχολείται με την παραγωγή μαθηματικών μοντέλων (υποδειγμάτων, προτύπων) σχετικά με την λειτουργία των χρηματοοικονομικών αγορών, την αποτίμηση των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων, την επιλογή επενδύσεων κλπ. Τα μοντέλλα αυτά όπως άλλωστε και σε οποιαδήποτε άλλη επιστήμη (π.χ. Φυσική ή Βιολογία όπου τα μαθηματικά παίζουν πρωτεύοντα ρόλο στην μεθοδολογία τους) αποσκοπούν στο να αποκτήσουμε καλύτερη κατανόηση των διαδικασιών που παίζουν σημαντικό ρόλο σε ορισμένα φαινόμενα και εν τέλει στην δυνατότητα πρόβλεψης.

Είναι ενδιαφέρον να δούμε ποιά κομμάτια των Μαθηματικών είναι χρήσιμα στην μελέτη και την μοντελλοποίηση των χρηματαγορών. Μία απλή ματιά στις οικονομικές σελίδες των εφημερίδων θα μας πείσει για το ότι οι μεταβολές των τιμών των διαφόρων χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων είναι ακανόνιστες και φαίνονται (ή είναι τυχαίες). Αυτή η τυχαιότητα μας οδηγεί στο να καταλάβουμε ότι τα βασικά μαθηματικά εργαλεία των Χρηματοοικονομικών Μαθηματικών θα είναι τεχνικές της θεωρίας πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών. Έτσι η έννοια της πιθανότητας, της μέσης τιμής και της διακύμανσης θα είναι σε καθημερινή χρήση στα Χρηματοοικονομικά Μαθηματικά. Φυσικά αυτό δεν είναι αρκετό οπότε θα χρησιμοποιήσουμε συχνά και πιο προχωρημένες έννοιες όπως π.χ. τις διαδικασίες Markov, τις διαδικασίες martingale, την κίνηση Brown, το στοχαστικό ολοκλήρωμα και τις διαδικασίες Itô, τις στοχαστικές διαφορικές εξισώσεις κ.α. Οι αφηρημένες αυτές μαθηματικές έννοιες αποκτούν συγκεκριμένες ερμηνείες στα χρηματοοικονομικά π.χ όπως θα δούμε παρακάτω η έννοια των martingales σχετίζεται με την αποτελεσματικότητα των αγορών κ.α.

Θα θέλαμε να σημειώσουμε εδώ την αμφίδρομη σχέση των Μαθηματικών και των Χρηματοοικονομικών. Οι αυστηρές μαθηματικές τεχνικές της θεωρίας πιθανοτήτων και των στοχαστικών διαδικασιών μπορεί να παρέχουν ιδιαίτερα ικανοποιητικούς τρόπους για την ποιοτική και ποσοτική αντιμετώπιση σημαντικών πρακτικών προβλημάτων όπως π.χ. την βέλτιστη επιλογή χαρτοφυλακίου ή την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων. Από την άλλη όμως η εμφάνιση καινούργιων πρακτικών προβλημάτων από τον οικονομικό κόσμο δημιουργεί την ανάγκη καινούριων μαθηματικών τεχνικών για την αντιμετώπιση τους οπότε και οδηγεί στην εξέλιξη της μαθηματικής επιστήμης. Υπάρχουν αρκετά παραδείγματα όπου καινούργια μαθηματικά δημιουργήθηκαν για να αντιμετωπιστούν συγκεκριμένα προβλήματα των Χρηματοοικονομικών ή γενικότερα των Οικονομικών. Ένα τέτοιο παράδειγμα ειναι η ανάπτυξη της θεωρίας των viscosity solutions στην θεωρία ελέγχου, ή η ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων οι οποίες εξελίσσονται οπισθοδρομικά στον χρόνο (backward stochastic differential equations).

Εμείς βέβαια στο μάθημα αυτό δεν έχουμε σαν σκοπό να παράγουμε καινούργια μαθηματικά. Αυτό γίνεται από μία αρκετά μικρή μερίδα μαθηματικών οι οποίοι είναι προσανατολισμένοι στην έρευνα και έχουν την τεχνική κατάρτιση να το κάνουν αυτό. Όμως οι τεχνικές που αυτοί δημιουργούν μέσα σε λίγο καιρό υίοθετούνται από την αγορά και περνάνε στο καθημερινό 'οπλοστάσιο' που χρησιμοποιούν για την πραγματοποίηση των συναλλαγών τους οι διάφορες τράπεζες, οικονομικοί οργανισμοί, ασφαλιστικές εταιρείες κ.α. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε το διάσημο μοντέλο των Black και Scholes για την αποτίμηση των παραγώγων συμβολαίων το οποίο μέσα σε λιγότερο απο 10 χρόνια από διατύπωση του έγινε μέρος της καθημερινής ρουτίνας του κάθε υπαλλήλου μίας χρηματιστηριακής εταιρείας. Είναι λοιπόν απαραίτητο από τον καθένα ο οποίος ζητάει μία θέση στην αγορά εργασίας στον τομέα αυτό, η έστω και βασική κατανόηση των τεχνικών αυτών. Αυτός είναι και ο σκοπός του μαθήματος αυτού, δηλαδή να προσφέρει τις βασικές αρχές των χρηματοοικονομικών μαθηματικών και να παρουσιάσει ορισμένα από τα μοντέλα που έχουν γίνει πλέον κλασικά τόσο ώστε να είναι αδύνατο να ενσωματωθεί κανείς στην αγορά εργασίας στον τομέα αυτό αν δεν γνωρίζει έστω και τα βασικά σημεία της λειτουργίας τους. Παράλληλα όμως φιλοδοξεί να το κάνει αυτό με τέτοιο τρόπο ώστε να προσφέρει τις απαραίτητες βάσεις σε όποιον από εσάς επιθυμεί να προχωρήσει λίγο παραπέρα από τα κεκτημένα και να παράγει μαθηματικά μοντέλα ή να επιλύσει προβλήματα πέραν των γνωστών που πιθανόν να εμφανιστούν στην πορεία της επαγγελματικής του σταδιοδρομίας.

1.2 Χρηματαγορές, περιουσιακά στοιχεία και ο ρόλος τους

1.2.1 Περιουσιακά στοιχεία – Τίτλοι

Ορισμός 1.2.1 *Ένα χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο ή τίτλος (financial asset) είναι μία αξίωση σε κάποιο μελοντικό εισόδημα (απολαβή). Οι απολαβές δεν είναι γνωστές από πριν. Το συμβόλαιο αυτό πωλείται ή αγοράζεται σήμερα, (δηλαδή πριν γίνει γνωστό το ποιές θα είναι οι απολαβές απο αυτό) και χρησιμοποιείται για την μεταφορά πλούτου σε μελλοντικες χρονικές στιγμές και σε διαφορετικές καταστάσεις του κόσμου.*

Η χρήση ενός τίτλου είναι λοιπόν η εξής: Την χρονική στιγμή $t = 0$ αγοράζουμε (επενδύουμε) σε συμβόλαια τα οποία πουλιούνται στην αγορά αλλά θα μας αποφέρουν κάποιο χρηματικό ποσό ή κάποιο φυσικό αγαθό την χρονική στιγμή $t = 1$. Με τον τρόπο αυτό μεταφέρουμε αξία (πλούτο) από την χρονική στιγμή $t = 0$ στην χρονικη στιγμή $t = 1$ για να ικανοποιήσουμε τις ανάγκες μας την χρονική στιγμή αυτή.

Αναφέρουμε ορισμένα παραδείγματα τίτλων.

Παράδειγμα 1.2.1 *(***Ομόλογα***)* Τα ομόλογα είναι τίτλοι που σχετίζονται τον δανεισμό και το χρέος. Με τον όρο χρέος εννοούμε μία αξίωση σε ένα προκαθορισμένο μέρος της ροής των εισοδημάτων που σχετίζονται με κάποιο περιουσιακό στοιχείο. Οι αξιώσεις που σχετίζονται με την έννοια του χρέους ονομάζονται **ομόλογα** (bonds) ή **χρεώγραφα σταθερού εισοδήματος** (fixed income securities). Οι πληρωμές στις οποίες έχει δικαίωμα ο κάτοχος ενός τέτοιου συμβολαίου μπορεί να γίνονται με οποιαδήποτε μορφή αρκεί να τηρείται ο τρόπος αυτός κατά την διάρκεια του συμβολαίου. Ένα συμβόλαιο τέτοιου τύπου συνεχίζει να περιέχει κίνδυνο, εφόσον πάντοτε ενυπάρχει ο κίνδυνος να μην είναι δυνατόν να τηρηθούν οι όροι του συμβολαίου. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε ένα ομόλογο επάνω σε ένα δείκτη (indexed bond) δηλαδή ένα ομόλογο για το οποίο η σειρά των πληρωμών που αποφέρει σχετίζονται με το συνολικό ύψος ορισμένων τιμών. Κατά συνέπεια το ομόλογο αυτό θα είναι συνδεδεμένο με κάποιο περιουσιακό στοιχείο και και αν το εισόδημα από το στοιχείο αυτό δεν φτάσει στα αναμενόμενα όρια τότε το ομόλογο δεν θα μπορέσει να δώσει το αναμενόμενο ύψος πληρωμών.

Παράδειγμα 1.2.2 (Μετοχές) Οι μετοχές (equities) είναι αξιώσεις στην σειρά πληρωμών από την παραγωγή μιας εταιρείας αφού αφαιρεθούν πρώτα όλες οι υπόλοιπες αξιώσεις επάνω σε αυτό (π.χ. πληρωμές για έξοδα της εταιρείας, φόροι κλπ). Ο μετοχές είναι ένα περιουσιακό τέτοιο ώστε αυτός που το φέρει έχει περιορισμένη ευθύνη. Ο φέρων μία μετοχή στην χειρότερη περίπτωση μπορεί αν χάσει την τιμή που πλήρωσε για να αποκτήσει την μετοχή, και δεν φέρει την οποιαδήποτε ευθύνη για τις πράξεις της εταιρείας. Οι μετοχές είναι ένα περιουσιακό στοιχείο που είναι μεταβιβάσιμο σε μεγάλο βαθμό. Μια εταιρεία με την σειρά της εκδίδει μετοχές για να συγκεντρώσει τα απαραίτητα κεφάλαια απο το επενδυτικό κοινό έτσι ώστε να μπορέσει να πραγματοποιήσει τις επενδύσεις της. Επίσης, με τον τρόπο αυτό διασπείρει τον κίνδυνο ζημιάς απο πιθανή αποτυχία της επένδυσης σε όλους τους επενδυτές που θα αγοράζουν την μετοχή της.

Παράδειγμα 1.2.3 (Παράγωγα προιόντα) Τα παράγωγα προϊόντα (derivative assets) είναι ένα πολύ ενδιαφέρον είδος περιουσιακών στοιχείων. Τα παράγωγα προιόντα είναι συμβόλαια η αξία των οποίων εξαρτάται απο την αξία ενός ή περισσοτέρων άλλων τίτλων ή εμπορευμάτων. Παραδείγματα παραγώγων προιόντων είναι τα δικαιώματα αγοράς και πώλησης μετοχών ή μονάδων του δείκτη (call and put options), τα συμβόλαια μελλοντικής εκπλήρωσης (futures), είτε επάνω σε μετοχές είτε επάνω σε εμπορεύματα, τα συμβόλαια ανταλλαγής (swaps) κ.α. Τα παράγωγα προϊόντα είναι συμβόλαια τα οποία χρησιμοποιούνται ευρύτατα για κερδοσκοπία σε συνδυασμό με θέσεις σε μετοχές ή για διαχείριση του κινδύνου θέσεων απο μετοχές.

Παράδειγμα 1.2.4 (Χρήμα) Το χρήμα είναι το περιουσιακό στοιχείο που αποτελεί το μέσο συναλλαγής.

Βέβαια στα περιουσιακά στοιχεία μπορεί να καταταγούν και ένα πλήθος άλλων συμβολαίων, όπως δείχνουν τα ακόλουθα παραδείγματα.

Παράδειγμα 1.2.5 (Συνταξιοδοτικά σχήματα) Αν την χρονική στιγμή $t = 0$ κατά την οποία είμαστε νέοι έχουμε πλεόνασμα πλούτου το οποίο θέλουμε να μεταφέουμε στην χρονική στιγμή $t = 1$ (κατά την οποία θα είμαστε πλέον στην σύνταξη) για να ικανοποιήσουμε τις ανάγκες μας κατά την περίοδο αυτή. Ο τρόπος να το κάνουμε αυτό είναι μέσω ενός κατάλληλου συμβολαίου, ενός συνταξιοδοτικού σχήματος.

Παράδειγμα 1.2.6 (Συμβόλαια σχετικά με το συνάλλαγμα) Ας υποθέσουμε ότι μία ελληνική επιχείρηση έχει συναλλαγές με την Ιαπωνία και γνωρίζει ότι σε ένα έτος απο σήμερα θα πρέπει να αγοράσει κάποια μηχανήματα απο την Ιαπωνία και για να το κάνει αυτό θα χρειαστεί ορισμένη ποσοτητα γιέν. Η επιχείρηση αυτή μπορεί την σημερινή χρονική στιγμή $t = 0$ να αγοράσει ένα συμβόλαιο απο μία τράπεζα το οποίο θα εξασφαλίζει ότι η τράπεζα θα της παρέχει την χρονική στιγμή $t = 1$, κατά την οποία πρέπει να γίνει η συναλλαγή με την Ιαπωνία, την απαραίτητη ποσότητα γιέν και μάλιστα σε προκαθορισμένη τιμή. Ένα τέτοιο συμβόλαιο είναι ένα προθεσμιακό συμβόλαιο συναλλάγματος.

Όπως οι ανάγκες των διαφόρων επενδυτών (άτομα, επιχειρήσεις διαφόρων ειδών, κράτη) ποικίλουν ύπαρχει μία τεράστια ποικιλία απο συμβόλαια, μετοχές, προθεσμιακά συμβόλαια, ομόλογα, παράγωγα συμβόλαια κλπ.

1.2.2 Ο ρόλος των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων

Είναι σημαντικό να ξεκαθαρίσουμε τον ρόλο των χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων.

Τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία έχουν δύο πολύ σημαντικούς ρόλους:

- Εξασφαλίζουν ένα τρόπο μέσω του οποίου περιουσιακά στοιχεία μπορεί να μεταφερθούν από αυτούς που έχουν πλεόνασμα προς αυτούς που τα χρειάζονται για πιθανές μελλοντικές επενδύσεις (που προφανώς θεωρούν ότι θα τους επιφέρουν κέρδος

- Αποτελούν ένα τρόπο μεταφοράς του κινδύνου εν γένει και πιο συγκεκριμένα από αυτούς που θα αναλάβουν την επένδυση σε αυτούς που θα την χρηματοδοτήσουν μέσω των επενδύσεων τους.

1.2.3 Χρηματοοικονομικές αγορές

Τα περιουσιακά στοιχεία μπορεί να αλλάζουν μορφή και κατόχους.

Ορισμός 1.2.2 *Η χρηματαγορά είναι ο 'τόπος ' στον οποίο γίνονται οι συναλλαγές σε χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία.*

Ο ρόλος των χρηματαγορών είναι επίσης διπλός.

- Προσφέρουν **ρευστότητα** εφόσον είναι ο χώρος στον οποίο τα χρηματοοικονομικά περιουσιακά στοιχεία μπορεί να μεταπωληθούν ή να ρευστοποιηθούν. Αυτός είναι ιδιαίτερα σημαντικός ρόλος γιατί ένα περιουσιακό στοιχείο το οποίο δεν παρέχει ρευστότητα δεν είναι ιδιαίτερα ελκυστικό στους επενδυτές. Φανταστείτε να έχετε π.χ. να διαλέξετε μεταξύ ενός κλειστού τραπεζικού λογαριασμού ο οποίος σας επιτρέπει να χρησιμοποιήσετε τα χρήματα σας κάποια δεδομένη χρονική στιγμή στο μέλλον και ένα επενδυτικό πακέτο την φύση του οποίου μποείτε να μεταβάλλετε οποτε θέλετε ή ακόμα και να πάρετε το αρχικό σας κεφάλαιο πίσω. Τι θα διαλέγατε;

- Μειώνουν το κόστος των συναλλαγών. Φανταστείτε π.χ. αν θέλατε να ανταλλάξετε ένα συγκεκριμένο χρηματοοικονομικό περιουσιακό στοιχείο με κάποιο άλλο. Αν δεν υπήρχε η χρηματαγορά τότε θα έπρεπε να ψάξετε να βρείτε μόνοι σας τον κάτοχο του περιουσιακού στοιχείου που σας ενδιαφέρει και να κανονίσετε την ανταλλαγή. Αντίθετα όταν η χρηματαγορά λειτουργεί σαν μεσάζοντας στην συναλλαγή αυτή, η συναλλαγή διευκολύνεται και συνεπώς και το κόστος της συναλλαγής μειώνεται.

Οι αγορές αυτές με την σειρά τους χωρίζονται σε διαφορετικές αγορές όπως π.χ. εναι η αγορά των ομολόγων, η αγορά των μετοχών, η αγορά των παραγώγων συμβολαίων (π.χ. futures, options) , η αγορά συναλλάγματος κλπ.

1.2.4 Χαρτοφυλάκια τίτλων

Ορισμός 1.2.3 *Ένα χαρτοφυλάκιο είναι μία συλλογή απο τίτλους. Ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο μπορεί να αποτελείται απο N τίτλους μπορεί να εκφραστεί μαθηματικά απο ένα διάνυσμα $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$. Το x_i εκφράζει την ποσότητα του τίτλου i που κρατάμε στην κατοχή μας. Ο αριθμός αυτός μπορεί να είναι θετικός ή αρνητικός. Ο θετικός αριθμός εκφράζει μία θέση αγοράς (long position) ενώ ο αρνητικός αριθμός εκφράζει μία θέση πώλησης ή θέση δανεισμού (short position).*

Παράδειγμα 1.2.7 Ας υποθέσουμε οτι ένα επενδυτής μπορεί να τοποθετηθεί σε μετοχές των εταιρειών X, Y και Z. Ας υποθέσουμε λοιπόν οτι αγοράζει (έχει στην κατοχή του) 10 κομμάτια της μετοχής X, 4 κομμάτια της μετοχής Z και ότι δανείζεται 5 κομμάτια της μετοχής Y (τα οποία φυσικά θα πρέπει να τα επιστρέψει). Στην περίπτωση αυτή $N = 3$ και το χαρτοφυλάκιο του θα μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά απο το διάνυσμα $(10, -5, 4)$.

Φυσικά τα χαρτοφυλάκια **δεν** είναι απαραίτητο να αποτελούνται απο ομοειδείς τίτλους, μπορεί και όπως θα δούμε κάτι τέτοιο επιβάλλεται απο την ποσοτική θεωρία χαρτοφυλακίου, να αποτελούνται απο διαφορετικούς τίτλους, π.χ. μπορέι να έχουμε χαρτοφυλάκια τα οποία αποτελούνται απο μετοχές, δικαιώματα επάνω σε μετοχές ή δείκτες, ομόλογα, εταιρικά ομόλογα, συμβόλαια μελοντικής εκπλήρωσης (futures) κ.α. Στην χρήση ανόμοιων, με βάσει διαφόρα χαρακτηριστικά που θα αναπτύξουμε στην συνέχεια, βασίζεται η θεωρία του **διαφοροποιημένου** χαρτοφυλακίου που αποτελεί ένα απο τα θεμέλια της μοντέρνας θεωρίας χαρτοφυλακίου. Θα επανέλθουμε στο θέμα αυτό εκτενώς στην συνέχεια.

1.3 Η μεθοδολογία των Χρηματοοικονομικών

Τα χρηματοοικονομικά σαν οποιαδήποτε επιστημονική θεωρία μπορεί να έχουν δύο μορφές.

- Κανονιστικό πλαισιο (normative framework) Μία κανονιστική θεωρία είναι μία θεωρία που ουσιαστικά δίνει μία διαδικασία ή ένα σύνολο κανόνων για την επίτευξη κάποιου σκοπού.
  Τα χρηματοοικονομικά μπορεί να έχουν κανονιστική μορφή. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε προβλήματα βελτιστοποίησης χαρτοφυλακίου, αξιολόγησης επενδύσεων κλπ.
- Το θετικό πλαίσιο (positive framework) . Μία θετική θεωρία είναι μία θεωρία η οποία περιγράφει το πως θα έπρεπε να ήταν ο κόσμος. Μία θετική θεωρία είναι μία περιγραφή του πως λειτουργεί κάποιο κομμάτι του κόσμου. Μία θετική θεωρία δεν δίνει απαραίτητα το τρόπο του πως μπορεί να γίνει κάτι αλλά αποσκοπεί περισσότερο στην κατανόηση του κόσμου. Οι υποθέσεις μίας θετικής θεωρίας μπορεί να είναι αρκετά απλοικές αλλά η επιτυχία της σχετίζεται περισσότερο με το πόσο επιτυχημένες είναι οι απλοποιήσεις που έχουμε κάνει. Ορισμένα από τα μοντέλα των χρηματοοικονομικών μπορεί να έχουν τέτοια μορφή. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε μοντέλα για την αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων κάτω από την υπόθεση της απουσίας arbitrage

1.4 Η έννοια της αξίας

Στα χρηματοοικονομικά (όπως άλλωστε και γενικότερα στην Οικονομική επιστήμη) μία συνεχώς εμφανιζόμενη έννοια είναι η έννοια της αξίας. Σχετική με την έννοια αυτή είναι η έννοια της τιμής ενός αγαθού (π.χ. πολλές φορές ακούγεται η έννοια 'δίκαιη τιμή' ενός αγαθού).

Ορισμός 1.4.1 *Η αξία ενός χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου είναι η τιμή που η αγορά είναι πρόθυμη να δώσει για τις απολαβές που θα παρέχει στον κάτοχο του αυτός ο τίτλος. Πολλές φορές η αξία αυτή ονομάζεται και η αξία στην άγορα του περιουσιακού αυτού στοιχείου.*

Ο καθορισμός της αξίας ενός χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου είναι και ένα από τα βασικά προβλήματα των χρηματοοικονομικών μαθηματικών.

Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα την αποτίμηση μίας μετοχής. Η κατοχή της μετοχής αυτής εξασφαλίζει στον φέροντα μία μελλοντική σειρά από πληρωμές. Δύο είναι τα βασικά στοιχεία που πρέπει να κρατήσουμε υπόψην μας εδώ. Το πρώτο είναι ότι οι απολαβές από το περιουσιακό στοιχείο έρχονται στο μέλλον και όχι την σημερινή στιγμή. Το δεύτερο είναι ότι οι απολαβές αυτές δεν είναι σίγουρες αλλά εμπεριέχουν το στοιχείο του κινδύνου. Μια εκτίμηση για την τιμή της μετοχής θα είναι η κεφαλαιοποιημένη αξία των 'πληρωμών' που θα μαζέψει ο κάτοχος της μετοχής στο μέλλον. Θα πρέπει τις πληρωμές αυτές να τις θεωρήσουμε περισσότερο με την έννοια του αποθέματος παρά με την έννοια της ροής. Η κεφαλαιοποιημένη αξία είναι η αξία της συνολικής ροής των πληρωμών κάποια συγκεκριμένη χρονική στιγμή.

Το ότι οι πληρωμές γίνονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές από την στιγμή που μας ζητείται να ορίσουμε την αξία της μετοχής φέρνει στο προσκήνιο την έννοια της προεξόφλησης (discounting). Η έννοια αυτή ουσιαστικά ανάγει την μία μελλοντική σειρά πληρωμών στην σημερινή τους αξία. Πολλές φορές στην μετατροπή αυτή πρέπει να ληφθεί υπόψη όχι μόνο το ότι οι πληρωμές θα γίνουν στο μέλλον αλλά και ότι οι πληρωμές αυτές εμπεριέχουν και την έννοια του κινδύνου (π.χ. στην περίπτωση των μερισμάτων μετοχών). Σαν απλό βασικό κανόνα πρίν εμπλακούμε στον μαθηματικό φορμαλισμό των παραπάνω εννοιών μπορούμε να δώσουμε το εξής:

> Όταν κάποιο εισόδημα πρόκειται να ληφθεί στο μέλλον και όταν το εισόδημα αυτό είναι αβέβαιο, τότε η αξία του εισοδήματος αυτού σήμερα θα είναι γενικά μικρότερη από το ποσό που αναμένουμε να λάβουμε στο μέλλον.

Φυσικά με τον απλό αυτό ορισμό της έννοιας της αξίας ερχόμαστε γρήγορα σε αδιέξοδο όταν θέλουμε να μελετήσουμε πιο περίπλοκα περιουσιακά στοιχεία. Τα περιουσιακά στοιχεία για τα οποία αντιμετωπίζουμε πρόβλημα με την λογική αυτή είναι τα περιουσιακά στοιχεία για τα οποία δεν υπάρχει μία αγορά στην οποία μπορούν να μεταπωληθούν. Σαν παράδειγμα τέτοιων περιουσιακών στοιχείων μπορούμε να αναφέρουμε το ανθρώπινο κεφάλαιο (ανθρώπινο δυναμικό, human capital). Οι αγορές που σχετίζονται με τέτοια περιουσιακά στοιχεία ονομάζονται λεπτές αγορές (thin markets) και εν γένει η αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων που σχετίζονται με τις αγορές αυτές είναι αρκετά δύσκολο εγχείρημα. Η αποτίμηση τέτοιων περιουσιακών στοιχείων και πάλι θα βασιστεί στην έννοια της προεξόφλησης (discounting) αλλά το ακριβές ύψος της αξίας είναι δύσκολο να προσδιοριστεί λόγω του γεγονότος ότι το περιουσιακό αυτό στοιχείο δεν συναλλάσεται σε κάποια αγορά. Στα μαθήματα αυτά θα περιοριστούμε στην αποτίμηση χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων τα οποία δεν αντιμετωπίζουν τέτοια προβλήματα.

1.5 Η έννοια του χρόνου και η σχέση της με την αξία των περιουσιακών στοιχείων

Δύο στοιχεία παίζουν σημαντικό ρόλο στην αποτίμηση κάποιων περιουσιακών στοιχείων: ο χρόνος και η αβεβαιότητα. Η βασική στρατηγική για την αποτίμηση κάποιου περιουσιακού στοιχείου, η οποια μπορεί να ενσωματώσει αυτά τα δύο βασικά στοιχεία είναι η μετατροπή όλων των μελλοντικών πληρωμών στην σημερινή χρονική στιγμή. Αυτό χρειάζεται αφού οι συντελεστές της αγοράς **δεν** είναι αδιάφοροι ως προς τις χρονικές στιγμές στις οποίες λαμβάνονται ίδιες πληρωμές.

Αν δεν υπήρχε ούτε αβεβαιότητα και οι συντελεστές της αγοράς ήταν αδιάφοροι ως προς την έννοια του χρόνου τότε η αξία ενός περιουσιακού στοιχείου θα δίνονταν από την σχέση

$$V = \sum_{t=1}^{N} I_t$$

όπου I_t είναι το εισόδημα που συσσωρεύεται λόγω της κατοχής του περιουσιακού στοιχείου την χρονική περίοδο t.

Στην πραγματικότητα όμως αυτό δεν ισχύει εφόσον υπάρχει η έννοια του επιτοκίου που πηγάζει ότι το η αγορά δεν είναι αδιάφορη ως προς την διαφορά μεταξύ ισοδύναμων ποσών που όμως λαμβάνονται σε διαφορετικές χρονικές περιόδους.

Η έννοια του τόκου που θα χρησιμοποιήσουμε στα πλαίσια του μαθήματος αυτού είναι σχετικα απλή. Το επιτόκιο θα θεωρείται σαν μία τιμή ενός αγαθού που στην συγκεκριμένη περίπτωση είναι το χρήμα (ρευστό). Για μία χρονική περίοδο το επιτόκιο είναι η τιμή που πρέπει κάποιος να πληρώσει για την αργοπορία της πληρωμής ενός ποσού για την περίοδο αυτή.

Παράδειγμα 1.5.1 Αν υποθέσουμε ότι το επιτόκιο είναι 8% το έτος και πρέπει να πληρώσουμε 100 ευρώ σήμερα το κόστος της καθυστέρησης της πληρωμής κατά ένα χρόνο θα είναι 8 ευρώ και το ποσό που θα καλεστούμε να πληρώσουμε το επόμενο έτος θα είναι 108 ευρώ.

Συνεπώς, εν γένει το κόστος της καθυστέρησης της πληρωμής θα μπορεί να γραφεί ως

$$C = r\,A$$

όπου r είναι το επιτόκιο και A το ποσό της πληρωμής. Το ποσό που θα οφείλουμε το επόμενο έτος θα είναι

$$D = (1 + r)\,A$$

Το επιτόκιο μπορεί συνεπώς να θεωρηθεί σαν την τιμή ενός συγκεκριμένου αγαθού στην αγορά μόνο που το αγαθό αυτό είναι πιο ασαφές από τα άλλα αγαθά που έχουμε συναντήσει ως τώρα. Το αγαθό αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η καθυστέρηση της πληρωμής κάποιου χρέους, και η αξία αυτού καθορίζεται από το πόσο χρήσιμο είναι το ποσό αυτό για το συγκεκριμένο άτομο την συγκεκριμένη χρονική στιγμή. Η χρησιμότητα αυτή δεν σχετίζεται με το ποσό αυτό καθεαυτό αλλά με το τι μπορεί να αντιπροσωπεύει το ποσό αυτό όσον αφορά την κατανάλωση αγαθών.

Ας δούμε το πως μπορούμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο σε απλές καταστάσεις όπου έχουμε αμελήσει την έννοια της τυχαιότητας.

- Το απλό επιτόκιο: Ας θεωρήσουμε ότι το ποσό ενός δανείου ή ένος ομολόγου αντιπροσωπεύεται από το P_1 και μετά από μία περίοδο αντιπροσωπεύεται από το P_2 (σε κάποιο νόμισμα). Το επιτόκιο μπορεί να οριστεί από την σχέση

$$1 + r = \frac{P_2}{P_1}$$

- Το σύνθετο επιτόκιο (compound interest) όταν χρειαστεί να ασχοληθούμε με δάνεια ή ομόλογα τα οποία δεν είναι μονάχα μίας περιόδου θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί στο να διαχωρίζουμε μεταξύ του απλού επιτοκίου και του σύνθετου επιτοκίου. Ας θεωρήσουμε για παράδειγμα ένα ομόλογο το οποίο έχει αξία P_1 σήμερα και αξία P_N μετά από $N-1$ χρονικές περιόδους. Με απλές αλγεβρικές πράξεις μπορούμε να δούμε ότι η αξία την περίοδο N θα είναι

$$P_N = P_1(r+1)^{N-1}$$

και από την σχέση αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε το επιτόκιο.

- Συνεχής ανατοκισμός: Ας υποθέσουμε ότι ο ανατοκισμός του ποσού γίνεται συνεχώς στον χρόνο, δηλαδή ότι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι χωρίσαμε το χρονικό διάστημα $[0,T]$ σε απειροστά χρονικά διαστήματα μήκους dt και ότι κατά την διάρκεια του διαστήματος αυτού το ποσό αυξάνεται κατά το $r\,dt$. Κατά συνέπεια, το r μπορεί να θεωρηθεί σαν ο **ρυθμός** αύξησης του ποσού. Αν $P(t)$ είναι η αξία του ποσού την χρονική στιγμή t τότε ισχύει ότι

$$\frac{dP}{dt}(t) = r\,P(t)$$

συνεπώς $P(t) = P(0)\,\exp(r\,t)$ όπου $P(0)$ είναι το αρχικό ποσό που τοποθετήσαμε στην τράπεζα.

Θα αρκεστούμε εδώ στο πλαίσιο αυτό και θα επανέλθουμε σε προβήματα όπως τον ορισμό του επιτοκίου για πιο σύνθετα συμβόλαια, όπως π.χ. ομόλογα με κουπόνια αργότερα.

1.6 Εισαγωγή στις έννοιες της παρούσης και της μελλοντικής αξίας

Θα ξεκινήσουμε με μερικά παραδείγματα:

Παράδειγμα 1.6.1 Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε $1\,Euro$ στην τράπεζα σήμερα με επιτόκιο r και το αφήνουμε εκεί για N έτη. Ποια θα είναι η αξία του ποσού αυτού το τέλος των N ετών; Απλή άλγεβρα μπορεί να μας δώσει ότι

$$FV = 1(1+r)^N$$

Για παράδειγμα, $1\,Euro$ με επιτόκιο 10% θα αποκτήσει στην τράπεζα μελλοντική αξία σε 10 έτη ίση με $2.59\,Euro$.

Παράδειγμα 1.6.2 Ας αντιστρέψουμε το ερώτημα του παραπάνω παραδείγματος. Ποια είναι η αξία σήμερα $1\,Euro$ το οποίο θα λάβουμε N χρονικές περιόδους απο σήμερα; Σχετικά απλά μπορούμε να δούμε ότι

$$PV = \frac{1}{(1+r)^N}$$

Με διαφορετικά λόγια μπορούμενα πούμε ότι PV είναι το ποσό που θα πρέπει να τοποθετήσουμε σήμερα στην τράπεζα με επιτόκιο r για να έχουμε σε N έτη το ποσό του $1\,Euro$.

Παράδειγμα 1.6.3 Ας υποθέσουμε ότι τοποθετούμε κάθε χρονο $1\,Euro$ στην τράπεζα επί 10 έτη. Στο τέλος μίας περιόδου N η μελλοντική αξία της επένδυσης αυτής θα είναι ίση προς

$$FV = 1(1+r) + 1(1+r)^2 + ... + 1(1+r)^N = \sum_{t=1}^{N} 1(1+r)^t$$

Παράδειγμα 1.6.4 Το αντίστροφο στο παραπάνω ερώτημα είναι το ακόλουθο: Ποιά η αξία σήμερα μίας ροής εισοδήματος $1\,Euro$ που λαμβάνεται στο τέλος κάθε περιόδου για N περιόδους; Είναι σημαντικό να κάνουμε την διάκριση του αν το $1\,Euro$ λαμβάνεται στην αρχή ή το τέλος της περιόδου. Εφόσον ξεκαθαρίζεται ότι το ποσό λαμβάνεται στο τέλος της περιόδου η αξία του πρώτου $Euro$ που λαμβάνεται είναι $1/(1+r)$ η αξία του δεύτερου $Euro$ που λαμβάνεται είναι $1/(1+r)^2$ και ούτω καθεξής ώσπου η αξία του τελευταίου $Euro$ που λαμβάνεται θα είναι $1/(1+r)^N$. Η σημερινή λοιπόν αξία της ροής εισοδήματος που παράγεται από το παραπάνω θα είναι

$$PV = \frac{1}{(1+r)^1} + \frac{1}{(1+r)^2} + ... \frac{1}{(1+r)^N} = \sum_{t=1}^{N} \frac{1}{(1+r)^t}$$

Το παραπάνω μπορεί και να γενικευθεί και στην περίπτωση που οι πληρωμές δεν είναι σταθερές στο τέλος της κάθε περιόδου αλλά λαμβάνουμε ένα ποσό A_t . Η παρούσα αξία στην περίπτωση αυτή θα είναι

$$PV = \sum_{t=1}^{N} \frac{A_t}{(1+r)^t}$$

Η έννοια της παρούσης αξίας είναι καίρια για τα χρηματοοικονομικά γιατί αποτελεί την βάση για την αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων. Όπως έχει ήδη γίνει σαφές, η τιμή ενός χρηματοοικονομικού περιουσιακού στοιχείου θα είναι η παρουσα αξία των σειρών πληρωμών που αυτό θα αποφέρει κατάλληλα αλλαγμένες ώστε να λαμβάνεται υπόψη και η έννοια του κινδύνου. Όμως η έννοια της παρούσας αξίας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για παράδειγμα και για την αποτίμηση κάποιας επένδυσης.

Παράδειγμα 1.6.5 Ας θεωρήσουμε ότι μία εταιρεία σκέπτεται να επενδύσει σε κάποιο περιουσιακό στοιχείο το οποίο θα της παρέχει το ποσό των $10,000\,Euro$ ανα έτος για τα επόμενα 10 έτη. Ας υποθέσουμε οτι το επιτόκιο είναι 12% και το κόστος της επένδυσης είναι $30,000\,Euro$. Η μεικτή παρούσα αξία της επένδυσης θα είναι ίση προς

$$GPV = \sum_{t=1}^{10} \frac{10,000}{1.12^t} = 56,502$$

ενώ η καθαρή παρούσα αξία θα είναι ίση προς

$$NPV = GPV - C = 56,502 - 30,000 = 26,502\ Euro$$

Το παράδειγμα αυτό μας δίνει ένα απλό τρόπο για την αξιολόγηση επενδύσεων.

Παράδειγμα 1.6.6 Αν θεωρήσουμε ότι η συχνότητα του ανατοκισμού είναι πολύ μεγάλη τότε ο τύπος του ανατοκισμού για N περιόδους μπορεί να πάρει την εξής εναλλακτική μορφή.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο ανατοκισμός λαμβάνει χώρα m φορές ανα έτος με ετήσιο επιτόκιο r ή διαφορετικά με επιτόκιο $\frac{r}{m}$ ανά ανατοκισμό. Η παρούσα αξία των $A\,Euro$ που θα ληφθεί N περιόδους από σήμερα θα είναι

$$PV = \frac{A}{(1+\frac{r}{m})^{mN}}$$

Στο όριο όπου $m \to \infty$ η σχέση αυτή γίνεται

$$PV = A\exp(-rN)$$

Θα δώσουμε τώρα εφαρμογές της έννοιας της παρούσας αξίας στην αποτίμηση ορισμένων απλών χρηματοοικονομικών περιουσιακών στοιχείων.

Παράδειγμα 1.6.7 (Διηνεκή –Perpetuities) Υπάρχουν ορισμένα ομόλογα τα οποία δεν έχουν ουσιαστικά ημερομηνία λήξης. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε το ομόλογο Consol το οποίο εξέδιδε το Βρετανικό Δημόσιο Ταμείο και το οποίο εξασφάλιζε στον φέροντα ένα σταθερό εισόδημα ουσιαστικά για πάντα. Αν A είναι το ποσό αυτό τότε η παρούσα αξία του ομολόγου αυτού που μπορεί να θεωρηθεί και ότι είναι η τιμή του στην αγορά θα είναι ίση προς

$$PV = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{A}{(1+r)^t}$$

Μία απλή εφαρμογή της θεωρίας των γεωμετρικών σειρών μας δείχνει ότι

$$PV = A\frac{1}{1-\frac{1}{1+r}} - 1 = \frac{1}{r}$$

Παράδειγμα 1.6.8 (Η αξία μίας μετοχής) Η ροή των αποδοχών από μία μετοχή μπορούμε να θεωρήσουμε ότι προέρχεται από τα μερίσματα και από το κέρδος ή την απώλεια κεφαλαίου από την τιμή της μετοχής. Η τιμή της μετοχής σήμερα θα εξαρτάται από τα κεφαλαιοποιημένα μελλοντικά εισοδήματα αρκεί φυσικά να συνεχίσει να υπάρχει η εταιρεία η οποία εξέδωσε την μετοχή. Αν D_t είναι το αναμενόμενο μέρισμα από την μετοχή την χρονική περίοδο t, και αν η εταιρεία συνεχίσει να υπάρχει για N χρονικές περιόδους, η παρούσα αξία της μετοχής θα είναι

$$PV = \sum_{t=1}^{N} \frac{D_t}{(1+r)^t}$$

Δεν έχουμε λάβει υπόψη την έννοια της αβεβαιότητας.

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να απλοποιηθεί σημαντικά αν θεωρήσουμε ότι τα μερίσματα αυξάνονται με κάποιο σταθερό ρυθμό. Τότε έχουμε ότι

$$D_t = D_0(1+g)^t$$

και η παρούσα αξία της μετοχής θα είναι

$$PV = \sum_{t=1}^{t} \frac{D_0(1+g)^t}{(1+r)^t}$$

1.7 Αβεβαιότητα και αξία

Η έννοια της αβεβαιότητας, που σχετίζεται με την έννοια του κινδύνου είναι θεμελιώδης για την αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων. Για παράδειγμα αν ένας επενδυτής αποστρέφεται τον κίνδυνο, θα ζητήσει μεγαλύτερητιμή για ένα περιουσιακό στοιχείο που περιέχει υψηλό βαθμό κινδύνου. Ένα περιουσιακό στοιχείο που περιέχει κίνδυνο θα πρέπει να έχει μεγαλύτερη απόδοση από κάποιο άλλο έτσι ώστε να προτιμηθεί.

Για την σωστή μελέτη της αποτίμησης λοιπόν είναι αναγκαίο να βρούμε κάποιο τρόπο ώστε να μπορούμε να ποσοτικοποιήσουμε την έννοια του κινδύνου.

Για να μοντελοποιήσουμε την έννοια της αβεβαιότητας αρκεί αν θεωρήσουμε ότι υπάρχουν ορισμένες καταστάσεις της οικονομίας και δεν είναι γνωστό από την αρχή ποιά κατάσταση από αυτές θα πραγματοποιηθεί. Οι αποδόσεις των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων σχετίζονται από την κατάσταση της οικονομίας που θα πραγματοποιηθεί. Για την μαθηματική μοντελοποίηση αυτής της κατάστασης θα πρέπει να ορίσουμε έναν κατάλληλα επιλεγμένο χώρο πιθανοτήτων και επάνω σε αυτό μία κατανομή πιθανοτήτων η οποία θα μας καθορίζει πόσο πιθανή είναι κάποια από τις καταστάσεις της οικονομίας. Εναλλακτικά μπορεί κανείς να παράγει (είτε εμπειρικά είτε με θεωρητικά μοντέλα) τις κατανομές πιθανότητας των αποδόσεων των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων.

Έχοντας αυτή την κατανομή πιθανότητας μπορούμε να βρούμε την αναμενόμενη απόδοση ως την μέση τιμή των αποδόσεων επάνω στην κατανομή πιθανότητας που αυτές ακολουθούνε. Όταν αναφερόμαστε στην αναμενόμενη απόδοση εννοούμε κατά την ex ante έννοια δηλαδή βάσει της γνώσης που έχουμε πριν το γεγονός συμβεί.

Παράδειγμα 1.7.1 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε έναν μικροπωλητή που εμπορεύεται 4 διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία, ομπρέλες, γυαλιά ηλίου, ζεστά ποτά και αναψυκτικά. Ας ονομάσουμε τα περιουσιακά στοιχεία αυτά A, B,

C και D. Οι καταστάσεις του κόσμου στην παρούσα περίπτωση σχετίζονται με τον καιρό ο οποίος μπορεί να είναι ηλιόλουστος, συνεφιασμένος ή βροχερός. Ας συμβολίσουμε τις καταστάσεις αυτές με ω_1,ω_2,ω_3 αντιστοιχως. Η μετεωρολογική υπηρεσία δίνει πιθανότητα 20% να είναι ο καιρός ηλιόλουστος, 30% να είναι ο καιρός συννεφιασμένος και 50% να είναι ο καιρός βροχερός. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται ο αποδόσεις για το κάθε περιουσιακό στοιχείο σε κάθε κατάσταση του κόσμου

ΚΑΤ/ΣΗ	ΠΙΘ/ΤΗΤΑ	R_A	R_B	R_C	R_D
ω_1	0.2	0	1000	30	150
ω_2	0.3	0	0	50	50
ω_3	0.5	400	0	150	10

Η μέση απόδοση του A θα είναι

$$E[R_A] = \sum_{\omega} P(\omega)R_A(\omega) = 0 \times 0.2 + 0 \times 0.3 + 400 \times 0.5 = 200$$

Όμοια με τις αποδόσεις των άλλων περιουσιακών στοιχείων.

Η αναμενόμενη απόδοση θεωρείται ότι είναι η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη σχετικά με το ποιά θα είναι η μελλοντική πραγματική απόδοση.

Θα πάμε τώρα στο θέμα της μέτρησης του κινδύνου. Η βασική ιδέα πίσω από την μέτρηση του κινδύνου είναι το πόσο μπορεί να μεταβάλλεται η πραγματική απόδοση από την αναμενόμενη απόδοση. Από την στοιχειώδη στατιστική γνωρίζουμε ότι η πληροφορία αυτή μας δίνεται από την ποσότητα της διακύμανσης και της τυπικής απόκλισης.

Η διακύμανση θα δίνεται από την σχέση

$$Var(R) = \sigma^2 = E[(R - E[R])^2]$$

όπου σ είναι η τυπική απόκλιση.

Παράδειγμα 1.7.2 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία οικονομία που μπορεί να έχει 5 καταστάσεις τις οποίες θα συμβολίσουμε ω_i, $i = 1, 2, 3, 4, 5$ και τρία διαφορετικά περιουσιακά στοιχεία τα οποία θα συμβολίζουμε A, B, και C. Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι αποδόσεις τους

ΚΑΤ/ΣΗ	ΠΙΘ/ΤΗΤΑ	R_A	R_B	R_C
ω_1	0.1	5,500	3,000	13,000
ω_2	0.2	6,000	5,000	11,000
ω_3	0.4	7,000	7,000	9,000
ω_4	0.2	8,000	9,000	7,000
ω_5	0.1	8,500	11,000	5,000

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι αναμενόμενες αποδόσεις, οι διακυμάνσεις και η τυπική απόκλιση των περιουσιακών αυτών στοιχείων.

Π.Σ.	$E[R]$	$Var[R]$	σ
A	7,000	850,000	922
B	7,000	4,800,000	2,191
C	9,000	4,800,000	2,191

Με βάση τον συνδυασμό της μέσης απόδοσης και της διακύμανσης μπορεί ένας επενδυτής ανάλογα με τις προτιμήσεις του ως προς την απόδοση και τον κίνδυνο να επιλέξει τα περιουσιακά στοιχεία ή την επιλογή περιουσιακών στοιχείων (χαρτοφυλάκιο) που τον ικανοποιεί. Η έννοια της προσωπικής προτίμησης εκφράζεται στα οικονομικά με την έννοια της συνάρτησης ωφελιμότητας και των καμπύλων αδιαφορίας που εδώ θα είναι καμπύλες στον χώρο που παράγεται από την μέση απόδοση και την διακύμανση.

Μπορούμε επίσης να ασχοληθούμε και με την σχέση μεταξύ περιουσιακών στοιχείων που θα μας δώσει μία ιδέα πως οι μεταβολές των αποδόσεων των περιουσιακών αυτών στοιχείων σχετίζονται. Αυτό δίνεται από τον συντελεστή συσχέτισης των αποδόσεων ο οποίος με την σειρά του σχετίζετια με την συνδιακύμανση.

Η συνδιακύμανση των αποδόσεων των περιουσιακών στοιχείων A και B δίνεται από τον τύπο

$$\sigma_{A,B}^2 = E[(R_A - E[R_A])(R_B - E[R_B])]$$

Σε αντίθεση με την διακύμανση, η συνδιακύμανση μπορεί να είναι και αρνητική. Ο συντελεστής συσχετίσεως των περιουσιακών στοιχείων ορίζεται από την σχέση

$$\rho_{A,B} = \frac{\sigma^2_{A,B}}{\sigma_A \sigma_B}$$

Ο συντελεστής συσχετίσεως παίρνει τιμές από -1 εως $+1$ Μεγάλος συντελεστής συσχέτισης και θετικός δείχνει ισχυρή και θετική συσχέτιση μεταξύ των αποδόσεων των δύο περιουσιακών στοιχείων κλπ.

Πολλές φορές θα χρειαστεί να έχουμε μία συλλογή από περιουσιακά στοιχεία τα οποία ονομάζονται χαρτοφυλάκιο. Μπορούμε να ορίσουμε με παρόμοιο τρόπο την απόδοση και τον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου. Σαν παράδειγμα φέρονουμε την περίπτωση όπου έχουμε $q\%$ του ολικού πλούτου στο περιουσιακό στοιχείο A και $(1-q)\%$ του συνολικού πλούτου στο περιουσιακό στοιχείο B. Η απόδοση του χαρτοφυλακίου αυτού θα είναι

$$R_p = xR_A + (1-x)R_B$$

Η αναμενόμενη λοιπόν απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$E[R_p] = xE[R_A] + (1-x)E[R_B]$$

ενώ η διακύμανση που θα μας δίνει μία ιδέα για τον κίνδυνο θα δίνεται από την σχέση

$$\sigma^2_{R_p} = E[(R_p - E[R_p])^2] = x^2\sigma^2_{R_A} + (1-x)^2\sigma^2_{R_B} + 2x(1-x)\rho_{A,B}\sigma_{R_A}\sigma_{R_B}$$

Ανάλογα με το πως θα επιλεγεί το x μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκια με διαφορετικές σχέσεις απόδοσης και κινδύνου. Ένα μεγάλο μέρος της θεωρία χαρτοφυλακίου σχετίζεται με τις ιδέες αυτές.

1.8 Εισαγωγή στην έννοια του κινδύνου και την τυπολογία του

Μία επένδυση δεν είναι ποτέ απολύτως βέβαιη, με την έννοια ότι δεν μπορεί ποτέ κανένας να εγγυηθεί τις αποδόσεις της. Ακόμη και οι πιο βέβαιοι τίτλοι, π.χ. τα κρατικά ομόλογα, ή οι τραπεζικοί λογαριασμοί ενέχουν κινδύνων, οι οποίοι μπορεί να μειώσουν δραστικά τις αποδόσεις τους.

Η έννοια του κινδύνου είναι πολύ γενική, συνεπώς για να μπορέσουμε να κάνουμε κάποια βήματα ως προς την μέτρηση και την διαχείριση του θα πρέπει να είμαστε λίγο πιο συγκεκριμένοι. Στο μάθημα αυτό θα επικεντρώσουμε στις έννοια του κινδύνου όπως αυτή μπορεί να εμφανιστεί στις οικονομικές συναλλαγές και η οποία μπορεί να μετρηθεί στις μεταβολές των αποδόσεων των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων (τίτλων).

Η έννοια του κινδύνου όπως θα την συναντήσουμε στο μάθημα αυτό σχετίζεται με το ότι οι απολαβές και οι αποδόσεις των τίτλων δεν είναι βέβαιες αλλά δεν γνωρίζουμε απο πριν την ακριβή τους τιμή. Οι πιθανές τους αποκλίσεις μπορεί να οφείλονται σε μία σειρά από διαφορετικές αιτίες οι οποίες με την σειρά τους σχετίζονται με τις ιδιαιτερότητες των συγκεκριμένων τίτλων. Οι διαφορετικές αυτές αιτίες ονομάζονται παράγοντες κινδύνου (risk factors).

Αναφέρουμε εν συντομία ορισμένους πιθανόύς παράγοντες κινδύνου.

- **Επιχειρηματικός κίνδυνος** είναι ο κίνδυνος των χρηματοροών που σχετίζονται με φύση της επιχείρησης. Ο κίνδυνος αυτός μπορεί να επηρεάσει τις αποδόσεις των μετοχών ή των εταιρικών ομολόγων της επιχείρησης αυτής. Για παράδειγμα ορισμένες επιχειρήσεις αντιμετωπίζουν μεγαλύτερους κινδύνους απο άλλες, π.χ. μία εταιρεία υπολογιστών αντιμετωπίζει μεγάλο κίνδυνο να ξεπεραστεί η τεχνολογία της σε αντίθεση με μία εταιρία συσκευασίας αγροτικών προιόντων.

- **Χρηματοοικονομικός κίνδυνος** Αυτό είναι ο κίνδυνος που σχετίζεται με τον τρόπο που μία επιχείρηση χρηματοδοτεί τις δραστηριότητες της. Για παράδειγμα μία ασφαλιστική εταιρία που έχει τοποθετήσει το αποθεματικό της σε επενδύσεις στο χρηματιστήριο αντιμετωπίζει χρηματοοικονομικό κίνδυνο γιατί το ύψος του χαρτοφυλακίου της εξαρτάται από την κατάσταση της χρηματοοικονομικής αγοράς. Ο χρηματοοικονομικός κίνδυνος είναι από τις πιο καλά μελετημένες μορφές κινδύνου, εφόσον είναι και ο ευκολότερος να ποσοτικοποιηθεί.

- **Συναλλαγματικός κίνδυνος** είναι ο κίνδυνος που σχετίζεται με τις διακυμάνσεις της τιμής του συναλλάγματος. Τέτοιους κινδύνους π.χ. μπορεί να αντιμετωπίζουν εταιρίες και οργανισμοί που δραστηροποιούνται σε διεθνές επίπεδο και έχουν συναλλαγές σε ξένο νόμισμα.

- **Πολιτικός κίνδυνος** είναι ο κίνδυνος ο οποίος σχετίζεται με την πολιτική κατάσταση της χώρας ή των χωρών σχετίζονται με τις δραστηριότητες της εταιρίας ή του οργανισμού. Τα κρατικά ομόλογα είναι πολύ ευαίσθητα στον πολιτικό κίνδυνο.

- **Ασφαλιστικός κίνδυνος** Οι ασφαλιστικές εταιρίες έρχονται αντιμέτωπες με μία σειρά κινδύνων οι οποίοι σχετίζονται με τις δραστηριότητες τους. Η έννοια του κινδύνου γι αυτές μπορεί να ακούγεται παράδοξη για εμάς. Για παράδειγμα, αν ο μέσος όρος ζωής ανέβαινε αισθητά, οι ασφαλιστικές εταιρίες που δραστηριοποιούνται στην διαχείριση ασφαλιστικών και συνταξιοδοτικών ταμείων θα οδηγούνταν σε οικονομική καταστροφή. Ο κίνδυνος αυτός ακούει στο παράδοξο όνομα, κίνδυνος μακροβιότητας.

- **Τεχνολογικός κίνδυνος** Ο κίνδυνος που προέρχεται από την προηγμένη τεχνολογία π.χ. hacking κλπ.

Η λίστα αυτή είναι απλά ενδεικτική και αν βάζαμε την φαντασία μας να δουλέψει θα μπορούσε να μην τελειώνει ποτέ! Αλλά ένα σημαντικό θέμα στην ανάλυση και την διαχείριση του κινδύνου είναι να ξεχωρίσει κανείς και να μοντελοποιήσει τους βασικότερους παράγοντες κινδύνου που απειλούν μία συγκεκριμένη δραστηριότητα.

Η αντιμετώπιση των παραγόντων αυτών μπορεί να γίνει είτε με μέτρα περιορισμού τους ή με την χρήση κατάλληλα σχεδιασμένων χρηματοοικονομικών συμβολαίων τα οποία μπορεί να μετριάσουν τις επιπτώσεις κάποιου συγκεκριμένου παράγοντα κινδύνου. Τα συμβόλαια αυτά είναι τα λεγόμενα παράγωγα συμβόλαια, οι απολαβές των οποίων σχετίζονται με τις απολαβές ορισμένων βασικών τίτλων.

Θα συζητήσουμε το θέμα αυτό λεπτομερώς στην συνέχεια, αλλά σαν ένα απλό παράδειγμα στο θέμα αυτό μπορούμε να δώσουμε το ακόλουθο.

Παράδειγμα 1.8.1 Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής έχει στην κατοχή του μία μετοχή μιάς εταιρίας η οποία πιστεύει ότι πρόκειται να υποτιμηθεί αλλά δεν είναι σε θέση να την πουλήσει σήμερα. Αν η τιμή της μετοχής σήμερα ειναι π.χ. 100 και ο συγκεκριμένος επενδυτής πιστεύέι ότι η τιμή πρόκειται να πέσει στα 80 ο επενδυτής αυτός αντιμετωπίζει τον κίνδυνο απώλειας 20 μονάδων. Για να αντμετωπίσει το κίνδυνο αυτό μπορεί να αγοράσει ένα δικαίωμα πώλησης (put option) της μετοχής αυτής στην προκαθορισμένη τιμή των π.χ. 100. Αυτό είναι ένα συμβόλαιο το οποίο θα αγοράσει ο κάτοχος της μετοχής από οποιονδήποτε άλλο επενδυτή και έχοντας το στα χέρια του έχει το δικαίωμα να πουλήσει την μετοχή (σε αυτόν που του πούλησε το παράγωγο αυτό) την προκαθοριμένη τιμή των 100. Συνεπώς αν η τιμή της μετοχής πέσει στα 80 ο κάτοχος της θα χρησιμοποιήσει το παράγωγο συμβόλαιο για να την πουλήσει στην αρχική της τιμή των 100. Αν τυχόν η τιμή της μετοχής (παρά την αντίθετη ιδέα του κατόχου) ανέβει δεν θα χρησιμοποιήσει το παράγωγο και θα πουλήσει αν θέλει την μετοχή στην ελεύθερη αγορά για την τρέχουσα τιμή της.

Με την χρήση λοιπόν του παραγώγου αυτού συμβολαίου ο επενδυτής **ασφαλίζει** το χαρτοφυλάκιο του έτσι ώστε να μην πέσει ποτέ κάτω από την αξία των 100.

1.9 *Arbitrage*

Η έννοια του arbitrage παίζει κεντρικό ρόλο στην αποτίμηση των περιουσιακών στοιχείων. Το arbitrage είναι μία στρατηγική επενδυτή ο οποίος συναλλάσεται κατά τρόπο ώστε να εκμεταλευτεί τις αποκλίσεις από τις τιμές ισορρόπιας[1] των διαφόρων περιουσιακών στοιχείων με σκοπό την απόκτηση κέρδους χωρίς κίνδυνο. Αν και το arbitrage είναι το όνειρο του κάθε επενδυτή, η θεωρία των χρηματοοικονομικών κατά μεγάλο μέρος της βασίζεται στην αποδοχή ότι δεν μπορεί να υπάρχει ευκαιρία arbitrage.

Η αποδοχή της απουσίας του arbitrage έχει σαφή μαθηματική περιγραφή με την χρήση των ιδιοτήτων των martingale ια κατάλληλα προεξόφλημένες τιμές των περιουσιακών στοιχείων. Επίσης σχετίζεται με τον νόμο της μοναδικής τιμής, κατά τον οποίο το ίδιο περιουσιακό στοιχείο συναλλάσσεται για μία μοναδική τιμή σε κάποια δεδομένη θέση και σε κάποιο δεδομένο χρόνο. Τέλος τα θεμελιώδη θεωρήματα σχετικά με την αποτίμηση περιουσιακών στοιχείων σχετίζονται με την απουσία arbitrage σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε το τύπο των Black και Scholes για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων ή τα θεωρήματα Modigliani-Miller την χρηματοοικονομική των επιχειρήσεων (corporate finance). Θα εξετάσουμε τον μαθηματικό φορμαλισμό της έννοιας του arbitrage και τις εφαρμογές του στα χρηματοιοικονομικά με μεγάλη λεπτομέρεια στην διάρκεια του μαθήματος αυτού.

Θα αρκεστούμε προς το παρόν να αναφέρουμε δύο παραδείγματα arbitrage.

Παράδειγμα 1.9.1 (Arbitrage στην αγορά συναλλάγματος) [1] Ας υποθέσουμε τους ακόλουθους

[1] Τις τιμές όπου η προσφορά εξισώνεται με την ζήτηση

λόγους ανταλλαγής μεταξύ του yen, της στερλίνας και του δολλαρίου

$$\begin{aligned} 1\,pound &= 1.50\,dollars \\ 150\,yen &= 1\,pound \\ 1\,dollar &= 120\,yen \end{aligned}$$

Με τους λόγους αυτούς, κάποιος θα μπορούσε να πουλήσει 1 στερλίνα για 1.50 δολλάρια, με το ποσό αυτό να αγοράσει 180 *yen*, και μετά να ξοδέψει 150 *yen* για να αγοράσει 1 στερλίνα. Συνεπώς πήρε πίσω το αρχικό ποσό που έδωσε (την 1 στερλίνα) αλλά έχει και κέρδος 30 *yen*. Αν συνεχίσει την στρατηγική αυτή θα συνεχίσει να έχει βέβαιο κέρδος 30 *yen* κάθε φορά οπότε θα καταλήξει με βέβαιο κέρδος. Αυτό είναι μία ευκαιρία arbitrage. Αν δεν υπάρχουν ατέλειες στην αγορά, οι διαφορές αυτές των τιμών που δημιουργούν το arbitrage γρήγορα θα εξαλειφθούν και η αγορά θα έλθει σε ισορροπία. Προσπαθείστε να βρείτε για ποιό λόγο ανταλλαγής θα εξαλείφονταν αυτή η ευκαιρία για arbitrage.

Παράδειγμα 1.9.2 (Απουσία arbitrage και τιμολόγηση ομολόγων) [1] Ας θεωρήσουμε ένα ομόλογο που υπόσχεται να πληρώσει ένα ποσό u μία χρονική περίοδο από σήμερα. Αν το επιτόκιο είναι r ποιά θα είναι η τιμή του ομολόγου σήμερα;

Η απουσία arbirtage επιβάλλει να ισχύει ότι ο ρυθμός απόδοσης του ομολόγου θα πρέπει να είναι ίσος με το τραπεζικό επιτόκιο r. Αν δεν συνέβαινε αυτό, και για παράδειγμα ο ρυθμός απόδοσης του ομολόγου ήταν μεγαλύτερος από το τραπεζικό επιτόκιο r, ένας επενδυτής θα μπορούσε να δανείζεται από την τράπεζα, να επενδύει σε ομόλογα, να χρησιμοποιεί τις αποδόσεις του ομολόγου για να αποπληρώνει το δάνειο και να του περισσεύει και βέβαιο κέρδος. Αυτό θα μπορούσε να το επαναλαμβάνει κάθε χρονική περίοδο. Έτσι θα υπάρχει μία ευκαιρία arbitrage. Όμοια και αν ισχύει το αντίθετο.

Συνεπώς η απουσία arbitrage επιβάλλει

$$r = \frac{u-p}{p}$$

όπου p είναι η τιμή του ομολόγου. Συνεπώς, η 'δίκαιη' τιμή του ομολόγου είναι

$$p = \frac{1}{1+r}u$$

Η απλή αυτή λογική μπορεί να γενικευθεί και στις περιπτώσεις όπου έχουμε πολλές χρονικές περιόδους και αβεβαιότητα. Η γενίκευσή αυτή αποτελεί ένα από τα αντικείμενα που θα παρουσιαστούν σε αυτό το βιβλίο.

1.10 Ατέλειες των αγορών

Στις πραγματικές αγορές υπάρχουν μία σειρά από ατέλειες. Οι κυριότερες από αυτές είναι

- **Το κόστος των συναλλαγών:** Στο κόστος των συναλλαγών μπορούμε να συμπεριλάβουμε τα διάφορα μεσιτικά έξοδα, τους φόρους κ.α. Ένα φαινόμενο που μπορεί να συμπεριληφθεί στο κόστος των συναλλαγών είναι η διαφορά της τιμής στην οποία πωλούνται μετοχές σε ένα χρηματιστηριακό γραφείο (bid price) και της τιμής πώλησης των μετοχών στους επενδυτές (ask price) .

- **Διάφοροι περιορισμοί** Οι περιορισμοί αυτοί μπορεί να έχουν την μορφή θεσμοθετημένων κανονισμών, ή συνθηκών που θα πρέπει να τηρούνται. Ένα παράδειγμα μπορεί να είναι ο περιορισμός του short selling κλπ.

Η παρουσία τριβών μας αναγκάζει να αναθεωρήσουμε ορισμένα από τα επιχειρήματα των κλασσικών χρηματοοικονομικών μαθηματικών αλλά σήμερα αναπτύσσονται ταχύτατα καινούργια μαθηματικά μοντέλλα τα οποία λαμβάνουν υπόψη τους περιορισμούς αυτούς.

1.11 Αποτελεσματικότητα ($efficiency$)

Θα κλείσουμε την εισαγωγή αυτή με την προκαταρκτική συζήτηση της έννοιας της αποτελεσματικότητας της αγοράς (market efficiency). Υπαρχουν διάφορες έννοιες της αποτελεσματικότητας στα χρηματοοικονομικά που αναφέρονται σε διαφορετικά πράγματα.

1. Αποτελεσματικότητα ως προς την διανομή των πόρων (αποτελεσματικότητα κατά Pareto) Αυτή είναι βασική έννοια των οικονομικών γενικότερα. Μια διανομή είναι αποτελεσματική κατά Pareto αν οποιαδήποτε άλλη επαναδιανομή των πόρων κάνει κάποιον να βρίσκεται σε καλύτερη θέση από προηγουμένως θα κάνει κάποιον άλλον να βρίσκεται σε χειρότερη θέση από προηγουμένως. Όπως θα δούμε σύντομα παρακάτω, η έννοια της αποτελεσματικότητα κατά Pareto σχετίζεται με την θεωρία της γενικής ισορροπιας στην μικροοικονομική και την έννοια της πληρότητας ή όχι των αγορών.

2. Πληροφοριακή αποτελεσματικότητα. Η έννοια αυτή αναφέρεται στο πόσο οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων αντικατοπτρίζουν την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους επενδυτές. Μία αγορά θα λέγεται αποτελεσματική αν οι τιμές των περιουσιακών στοιχείων πλήρως αντικατοπτρίζουν την πληροφορία που είναι διαθέσιμη στους επενδυτές. Θα δούμε παρακάτω τον μαθηματικό φορμαλισμό της υπόθεσης της αποτελεσματικότητας των αγορών, χρησιμοποιώντας την γλώσσα των στοχαστικών διαδικασιών και συγκεκριμένα την έννοια της υπό συνθήκη μέσης τιμής και της έννοια των martingale.

3. Αποτελεσματικότητα χαρτοφυλακίου. Η έννοια αυτή αναφέρεται στην επιλογή του χαρτοφυλακίου κατά τρόπο ώστε να πληρεί κάποιες συνθήκες όπως π.χ. την ελαχιστοποίηση του κινδύνου και την μεγιστοποίηση της απόδοσης.

1.12 Σύνοψη και σχόλια

Στην εισαγωγή αυτή προσπαθήσαμε να δώσουμε μερικές βασικές πληροφορίες για την επιστήμη των χρηματοοικονομικών, όσον αφορά τα προβλήματα με τα οποία ασχολούνται και τα βασικά πλαίσια στα οποία κινούνται. Έτσι συζητήθηκαν βασικές έννοιες όπως π.χ. η έννοια του επιτοκίου, η έννοια της παρούσης και της μελοντικής τιμής κάποιου περιουσιακού στοιχείου, η έννοια του arbitrage και η έννοια της αποτελεσματικότητας κλπ.

Ο σκοπός του βιβλίου αυτού απο εδώ και πέρα είναι να μεταφράσει τις έννοιες αυτές σε μαθηματικές έννοιες και χρησιμοποιώντας αυτές να κατασκευάσει μοντέλλα τα οποία μπορεί να δώσουν λύσεις στα πρακτικά προβλήματα που απασχολούν τα χρηματοοικονομικά.

Για την εισαγωγή αυτή χρησιμοποιήθηκαν σαν πηγές τα [2] και [1].

Κεφάλαιο 2

Στοχαστικά μοντέλα για τις μετοχές

2.1 Εισαγωγή

Στην ενότητα αυτή θα ασχοληθούμε με ένα πρώτο μοντέλο για την εξέλιξη των τιμών των μετοχών, το διωνυμικό μοντέλο. Αυτό είναι ένα μοντέλο σε διακριτό χρονο και σε διακριτό χώρο καταστάσεων.

2.2 Τα βασικά για τις μετοχές

Μία άλλη βασική κατηγορία χρηματοοικονομικών τίτλων είναι οι μετοχές. Οι μετοχές εν γένει αποτελούν αξιώσεις επί των μελλοντικών κερδών μιας επιχείρησης. Ο λόγος που μία εταιρεία εκδίδει μετοχές είναι για να χρηματοδοτήσει τα επενδυτικά της σχέδια, εισπράττοντας απο τους επενδυτές το αναγκαίο ποσό που χρειάζεται σήμερα για τις επενδύσεις της και υποσχόμενη να τους αποδώσει στο μέλλον μέρος των κερδών της σε μερίσματα. Οι μετοχές εν γένει δεν είναι προσωπικές και ανταλλάσονται στο χρηματιστήριο αξιών σε τιμές που θεωρούμε ότι καθορίζονται απο την προσφορά και την ζήτηση τους. Κατά συνέπεια, η τιμή των μετοχών αντικατοπτρίζει την 'ιδέα' που έχουν οι διαφορετικοί επενδυτές σχετικά με την πορεία και την βιωσιμότητα της κάθε εταιρείας. Οι μετοχές είναι τίτλοι οι οποίοι γενικά θεωρούνται ότι εμπεριέχουν μεγαλύτερο κίνδυνο ως προς τις αποδόσεις τους σε σχέση με τα ομόλογα. Σε αντίθεση με τα ομόλογα τα οποία εγγυόνται, αν υποθέσουμε μηδενική πιθανότητα αθέτησης, μία ονομαστικη αξία και τα κουπόνια τα οποία πληρώνουν στους κατόχους τους, οι μετοχές δίνουν μερίσματα τα οποία όμως δεν είναι προσυμφωνημένα και εξαρτώνται απο την κερδοφορία της συγκεκριμένης εταιρείας η οποία δεν είναι βέβαιη. Αν λοιπόν κάποιος επενδυτής αποφασίσει να κρατήσει ένα ομόλογο και να μην το μεταπωλήσει έχει σε κάθε περίπτωση να λαμβάνει τις ονομαστικές πληρωμές του ομολόγου οι οποίες είναι δεδομένες. Δεν μπορεί να πει κανείς το ίδιο για μια μετοχή. Επίσης, αν υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής αποφασίσει να μεταπωλήσει μια μετοχή ή ένα ομόλογο αυτό η τιμή που θα πάρει είναι η τρέχουσα αξία τους στην αντίστοιχη αγορά η οποία δεν είναι προκαθορισμένη αλλά εξαρτάται απο τις συνθήκες της οικονομίας. Μία μόνο ματιά στις στήλες των οικονομικών εφημερίδων σε διαφορετικές ημέρες σχετικά με τις τιμές στις οποίες διαπραγματεύονται οι μετοχές στο χρηματιστήριο αξιών θα μας πείσει για αυτό. Οι τιμές των μετοχών παρουσιάζουν συνεχείς αυξομειώσεις, οι οποίες μας δείχνουν ξεκάθαρα τον κίνδυνο που εμπεριέχουν οι μετοχές.

Οι μετοχές λοιπόν είναι ένα εντελώς διαφορετικό χρηματοοικονομικό εργαλείο σε σχέση με τα ομόλογα. Δεν εγγυόνται ένα συγκεκριμένο ποσό σε δεδομένες χρονικές στιγμές και εν γένει περιέχουν περισσότερο κίνδυνο σε σχέση με τα ομόλογα. Βέβαια, οι αυξομειώσεις στις τιμές των μετοχών μπορεί να οδηγήσουν και σε υψηλότερες τιμές σε σχέση με αυτές που τις αγοράσαμε. Συνεπώς, υπάρχει περίπτωση η αβεβαιότητα στις τιμές των μετοχών να οδηγήσει και σε υψηλές αποδόσεις, πολύ υψηλότερες σε σχέση με αυτές των ομολόγων, και φυσικά αυτός είναι ένας λόγος που θα μας ενδιέφερε να τοποθέτηθούμε σε μετοχές. Επειδή όμως οι υψηλές τιμές μπορεί να οδηγήσουν τις επόμενες χρονικές στιγμές σε χαμηλές τιμές, θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί. Αυτό που ειναι απαραίτητο, είναι να έχουμε ένα καλό μαθηματικό μόντέλο, πιθανοθεωρητικής φύσεως το οποίο να είναι ικανό να προβλέψει με σχετική ακρίβεια τις αυξομειώσεις των τιμών των μετοχών και να μας δώσει τις πιθανότητες να έχουμε τις διαφορετικές πιθανές αποδόσεις.

2.3 Το διωνυμικό μοντέλο για τις τιμές των μετοχών

Θα ξεκινήσουμε με την περιγραφή του απλούστερου μοντέλου σχετικά με την εξέλιξη των τιμών των μετοχών, το διωνυμικό μοντέλο. Το μοντέλο αυτό χρησιμοποιείται ευρύτατα στην πράξη και αποτελεί ισώς το πρώτο μοντέλο απο το οποίο κάποιος θα ξεκινήσει για να μελετήσει την τιμολόγηση των παραγώγων συμβολαίων.

Οι υποθέσεις του μοντέλου αυτού είναι οι ακόλουθες:

1. Οι διάφορες πράξεις στην αγορά στην οποία ανταλλάσσονται οι μετοχές αυτές γίνονται σε διακριτές χρονικές στιγμές $n = 0, 1, \cdots$.
2. Σε κάθε χρονική στιγμή n ακολουθούν την χρονική στιγμή $n+1$ δύο πιθανές καταστάσεις της οικονομίας, η ανοδική κατάσταση και η καθοδική κατάσταση, με πιθανότητα p και $1-p$ αντιστοίχως.
3. Στην ανοδική κατάσταση η τιμή της μετοχής γίνεται απο $S_n \to u\,S_n$
4. Στην καθοδική κατάσταση η τιμή της μετοχής $S_n \to d\,S_n$.
5. Το τι συμβαίνει στην κατάσταση της αγοράς μεταξύ των χρονικών στιγμών $n, n+1$ και $n+1, n+2$ είναι ανεξάρτητο για κάθε n.

Το μοντέλο αυτό μπορεί να γραφεί ως εξής

$$S_{n+1} = H_{n+1}\,S_n$$

όπου $\{H_n\}$ είναι μια ακολουθία απο ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές για τις οποίες ισχύει

$$P(H_n = u) = p, \quad P(H_n = d) = 1 - p, \quad n = 1, 2, \cdots$$

2.4 Ιδιότητες του διωνυμικού μοντέλου

2.4.1 Δομές πληροφορίας στο διωνυμικό μοντέλο

Ας κατασκευάσουμε ένα δέντρο το οποίο μπορεί να περιεχει όλα τα σενάρια σχετικά με την εξέλιξη της οικονομίας μέχρι και την χρονική περίοδο n. Οι κορυφές αυτού του δέντρου θα μας δίνουν όλες τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει η μετοχή μέχρι και την χρονική στιγμή n. Ένα απλό επιχείρημα βασισμενο στην επαγωγή μας δείχνει ότι την χρονικη στιγμή n οι πιθανές τιμές της μετοχής θα είναι $m = 2^n - 1$ το πλήθος, και συγκεκριμένα οι

$$\{u^m S_0, u^{m-1}\,d\,S_0, \cdots, u\,d^{m-1}\,S_0, d^m S_0\}$$

Ας υποθέσουμε ότι ο χρονικός ορίζοντας είναι N. Μπορεί κανείς να θεωρήσει ότι η οικονομία μπορεί να έχει τα $M = 2^N - 1$ διακριτά γεγονότα που σχετίζονται με τις διαφορετικές πιθανές τιμές της μετοχής την χρονική στιγμή αυτή. Αν λοιπόν το σύνολο των ενδεχόμενων είναι το

$$\Omega = \{u^M S_0, u^{M-1}\,d\,S_0, \cdots, u\,d^{M-1}\,S_0, d^M S_0\}$$

είναι λογικό να θέσουμε την ερώτηση

> Τι είμαστε σε θέση να γνωρίζουμε σχετικά με τις τιμές της μετοχής την χρονική στιγμή n για $n = 1, 2, \cdots, N$;

Την χρονική στιγμή N ειμαστε σε θέση να γνωρίζουμε επακριβως αν η τιμή της μετοχή είναι $u^M S_0$ ή $u_{M-1}\,d\,S_0$ ή $\cdots$ $u\,d^{M-1}\,S_0$ ή $d^M S_0$. Με άλλα λόγια μπορούμε να θεωρήσουμε οτι το Ω έχει χωριστει στα ξένα μεταξύ τους σύνολα $\Omega_{N,i} = \{u^{M-i}\,d^i\}$, $i = 1, \cdots, M = 2^N - 1$ τέτοια ώστε

$$\Omega = \cup_{i=1}\Omega_{N,i}$$

Δηλαδή την χρονική στιγμή N το Ω είναι διαχωρισμένο σε $2^N - 1$ σύνολα, ξένα μεταξύ τους τα οποία και συνθέτουν όλο το Ω. Θέλουμε τώρα να φτιάξουμε ένα σύνολο το οποίο να περιέχει όλες τις πιθανές ερωτήσεις τις οποίες μπορούμε να κάνουμε για την αγορά μέχρι **και** την χρονική στιγμή αυτή. Μπορούμε π.χ. να ρωτήσουμε την ερώτηση αν θα πάρει η μετοχή την τιμή $u^{M-j}\,d^j\,S_0$ για κάποιο j. Η ερώτηση αυτή αντιστοιχεί στο σύνολο $\{u^{M-j}\,d^j\,S_0\}$ το οποίο είναι υποσύνολο του Ω. Μπορούμε όμως να κάνουμε και πιο σύνθετες ερωτήσεις. Για παράδειγμα μπορούμε να κάνουμε την ερώτηση σχετικά με το να μην πάρει η μετοχή την τιμή $u^{M-j}\, d^j\, S_0$ για κάποιο j. Η ερώτηση αυτή αντιστοιχεί στο σύνολο $\Omega \setminus \{u^{M-j}\, d^j\, S_0\} = \{u^{M-j}\, d^j\, S_0\}^c$ το οποίο είναι υποσύνολο του Ω. Μπορούμε επίσης να κάνουμε την ερώτηση σχετικά με το να πάρει η μετοχή τις τιμές $u^{M-j_1}\, d^{j_1}\, S_0$, ή $u^{M-j_2}\, d^{j_2}\, S_0$, για κάποια $j_1 \neq j_2$. Η ερώτηση αυτή σχετίζεται με το σύνολο $\{u^{M-j_1}\, d^{j_1}\, S_0\} \cup \{u^{M-j_2}\, d^{j_2}\, S_0\}$ το οποίο είναι υποσύνολο του Ω. Όμοια και με πιο σύνθετες ερωτήσεις οι οποίες μπορεί να σχετίζονται με την ερώτηση ή για περισσότερα των δύο j, δηλαδή σύνολα που σχετίζονται με ενώσεις παραπάνω των δύο υποσυνόλων $\Omega_{N,j}$.

Στο σημείο αυτό μπορούμε να πούμε ότι όλες οι πιθανές ερωτήσεις σχετικά με την κατάσταση της αγοράς την χρονική στιγμή N μπορούν να μαζευτούν σε ένα σύνολο υποσυνόλων του Ω, ας το ονομάσουμε σ, το οποίο έχει τις ιδιότητες να είναι **κλειστό** ως προς τις ενώσεις και την πράξη της συμπλήρωσης. Με άλλα λόγια έχει τις ιδιότητες

- Αν $A \in \sigma$ τότε και $A^c = \Omega \setminus A \in \sigma$
- Αν $A_1, A_2, \cdots, A_m \in \sigma$ τότε και $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m \in \sigma$.

Το σύνολο αυτό αποτελεί μια άλγεβρα (εφόσον έχουμε περιοριστεί σε πεπερασμένο χώρο καταστάσεων δεν χρειάζεται να μιλήσουμε ακόμα για σ-άλγεβρες).

Θα συμβολίζουμε με $\sigma(\{\Omega_{N,1}, \cdots, \Omega_{N,M}\})$ το μικρότερο σύνολο το οποίο έχει τις ιδιότητες αυτές και περιέχει τα $\Omega_{N,1}, \cdots \Omega_{N,N}$. Εναλλακτικά, το σύνολο αυτό θα το συμβολίζουμε με $\mathcal{F}_N$ και θα αντιστοιχεί στην γνώση που έχουμε σχετικά με τις καταστάσεις τις αγοράς απο τις παρατηρήσεις μας μέχρι και την χρονική στιγμή N.

Παράδειγμα 2.4.1 *Αν $n = 2$ τότε το $\Omega = \{u^2, u\, d, d^2\}$ (θεωρήσαμε ότι $S_0 = 1$ για πιο απλά) και $\Omega_{2,1} = \{u^2\}, \Omega_{2,2} = \{u\, d\}$ και $\Omega_{2,3} = \{d^2\}$. Το $\sigma(\{\Omega_{2,1}, \Omega_{2,2}, \Omega_{2,2}\})$ θα είναι το*

$$\sigma(\{\Omega_{2,1}, \Omega_{2,2}, \Omega_{2,2}\}) = \{\{u^2\}, \{u\, d\}, \{d^2\}, \{u^2, u\, d\}, \{u^2, d^2\}, \{u\, d, d^2\}, \Omega, \emptyset\}$$

Τι θα μπορεί να πει για την κατάσταση της αγοράς την χρονική στιγμή N το ίδιο άτομο αν ρωτηθεί γι΄ αυτή την χρονική στιγμή $N-1$; Αυτό εξαρτάται απο τον κόμβο του δέντρου στον οποίο θα βρίσκεται. Για παράδειγμα, αν βρίσκεται την χρονική στιγμή $N-1$ στον κόμβο που οδηγεί στα u^M ή $u^{M-1}\, d$, όπου $M = 2^N - 1$, τότε ξέρει ότι θα πραγματοποιηθεί κάποια απο τις δύο αυτές καταστάσεις της αγοράς μόνο αλλά δεν ξέρει με βεβαιότητα ποιά απο τις δύο. Συνεπώς την χρονική στιγμή $N-1$ μπορεί να απαντήσει σχετικά με την ερώτηση 'u^M ή $u^{M-1}\, d$' δηλαδή το γεγονός $\{u^M, u^{M-1}\, d\}$ αλλά όχι για τα γεγονότα $\{u^M\}$ και $\{u^{M-1}\, d\}$ χωριστά. Όμοια και για τους άλλους κόμβους του δέντρου. Εν γένει την χρονική στιγμή $N-1$ το άτομο αυτό θα μπορεί να απαντήσει σχετικά με τα γεγονότα

$$\{u^M, u^{M-1}\, d\}, \{u^{M-1}\, d\, u^{M-2}\, d^2\}, \cdots, \{u^2\, d^{M-2}, u\, d^{M-1}\}, \{u\, d^{M-1}, d^M\}$$

Αν $\mathcal{F}_{N-1}$ είναι το μικρότερο σύνολο το οποίο περιέχει τα υποσύνολα αυτά μπορούμε να δούμε ότι $\mathcal{F}_{N-1} \subset \mathcal{F}_N$. Μπορούμε να θεωρήσουμε την $\mathcal{F}_{N-1}$ σαν την δομή πληροφορίας που περιέχει την ιστορία της αγοράς μέχρι και την χρονική στιγμή $N-1$.

Παράδειγμα 2.4.2 *Η υπο συνθήκη μέση τιμή της αξίας της μετοχής την χρονική στιγμή N δεδομένης της ιστορίας της αγοράς μέχρι και την χρονική στιγμή $N-1$, δηλαδή δεδομένης της δομής πληροφορίας $\mathcal{F}_{N-1}$ εξαρτάται απο την κατάσταση της αγοράς την χρονική στιγμή $N-1$. Για παράδειγμα αν η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $N-1$ είναι u^{M_1}, όπου $M_1 = 2^{N-1} - 1$ τότε η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_{N-1}]$ θα παίρνει την τιμή $\mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_{N-1}] = p\, u^M + (1-p) u^{M-1}\, d$, όπου $M = 2^N - 1$. Αν η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $N-1$ είναι $u^{M_1 - 1}\, d$, όπου $M_1 = 2^{N-1} - 1$ τότε η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_{N-1}]$ θα παίρνει την τιμή $\mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_{N-1}] = p\, u^{M-1}\, d + (1-p) u^{M-2}\, d^2$, όπου $M = 2^N - 1$, κ.ο.κ.*

Μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_N] \mid \mathcal{F}_{N-1}] = \mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_{N-1}]$$
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_{N-1}] \mid \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[S_N \mid \mathcal{F}_{N-1}]$$

δηλαδή ότι όταν παίρνουμε την υπο συνθήκη μέση τιμή κερδίζει πάντοτε η μικρότερη δομή πληροφορίας!

2.4.2 Ιδιότητα *Markov*

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος θέλει να κάνει την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη σχετικά με την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $n+1$ έχοντας παρατηρήσει τις κινήσεις της αγοράς μέχρι και την χρονική στιγμή n. Η ιστορία της αγοράς μέχρι και την χρονική στιγμή n θα συμβολίζεται με $\mathcal{F}_n$ και στην ουσία θα περιέχει την πληροφορία που χρειάζεται κανείς για να περιγράψει τις τυχαίες μεταβλητές $\{H_1, H_2, \cdots, H_n\}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n\, H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = S_n\, \mathbb{E}[H_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = \\ S_n\, \mathbb{E}[H_{n+1}] = S_n\, (p\, u + (1-p)\, d)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή $n+1$ δεδομένης της ιστορίας της διαδικασίας μέχρι και την χρονική στιγμή n, είναι μια τυχαία μεταβλητή που για να την περιγράψουμε πλήρως αρκεί να γνωρίζουμε μόνο την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή n, S_n, και όχι όλη την ιστορία της αγοράς άπο την χρονική στιγμή 0 ως και την χρονική στιγμή n. Λέμε ότι η S_n έχει την ιδιότητα Markov .

2.4.3 Εξέλιξη των αναμενόμενων τιμών της μετοχής

Απο τον νόμο της ολικής πιθανότητας έχουμε επίσης ότι

$$\mathbb{E}[S_{n+1}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n]] = (p\, u + (1-p)\, d)\, \mathbb{E}[S_n]$$

Ένα επιχείρημα επαγωγής μας δείχνει πολύ εύκολα ότι

$$\mathbb{E}[S_n] = (p\, u + (1-p)\, d)^n\, S_0$$

Αν ορίσουμε ως $S_n^* = (1+r)^{-n}\, S_n$, την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής μπορεί κανείς να δείξει με παρόμοια επιχειρήματα ότι

$$\mathbb{E}[S_n^*] = \left(\frac{p\, u + (1-p)\, d}{1+r}\right)^n S_0$$

Αν $\frac{p\, u+(1-p)\, d}{1+r} > 1$ τότε κατά μέση τιμή θα αυξάνει η τιμή της μετοχής στον χρόνο. Αν $\frac{p\, u+(1-p)\, d}{1+r} < 1$ τότε κατά μέση τιμή θα ελαττώνεται η τιμή της μετοχής στον χρόνο.

2.4.4 Διαδικασίες *martingale* και η εξέλιξη της τιμής των μετοχών

Επίσης παρατηρούμε ότι αν $\frac{p\, u+(1-p)\, d}{1+r} > 1$ τότε

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^* \mid \mathcal{F}_n] = \frac{p\, u + (1-p)\, d}{1+r}\, S_n^* \geq S_n^*$$

αν $\frac{p\, u+(1-p)\, d}{1+r} < 1$ τότε

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^* \mid \mathcal{F}_n] = \frac{p\, u + (1-p)\, d}{1+r}\, S_n^* \leq S_n^*$$

και αν $\frac{p\, u+(1-p)\, d}{1+r} = 1$ τότε

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^* \mid \mathcal{F}_n] = \frac{p\, u + (1-p)\, d}{1+r}\, S_n^* = S_n^*$$

Στοχαστικές διαδικασίες με τις ιδιότητες αυτές έχουν μελετηθεί ανεξάρτητα απο τα χρηματοοικονομικά και ονομάζονται διαδικασίες supermartingale , submartingale και martingale αντίστοιχα.

Ορισμός 2.4.1 *Έστω μια στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$ και μια αυξανόμενη δομή πληροφορίας $\{\mathcal{F}_n\}$ (δηλαδή μια ακολουθία τέτοια ώστε $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$) η οποία ονομάζεται διήθηση.*

Η στοχαστική διαδικασία $\{X_n\}$ ονομάζεται martingale αν ικανοποιεί τις παρακάτω 3 συνθήκες

1. *Η τυχαία μεταβλητή X_n είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_n$ για κάθε n.*

2. *Για την τυχαία μεταβλητή X_n ισχύει ότι $\mathbb{E}[\,|X_n|] < \infty$.*

3. *$\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = X_n$.*

Η συνθήκη (1) μας λέει ότι για να απαντήσουμε την ερώτηση τι τιμές μπορεί να πάρει η τυχαία μεταβλητή X_n αρκεί να έχουμε πρόσβαση στην πληροφορία που περιέχεται στην $\mathcal{F}_n$, δηλαδή η πληροφορία για την αγορά μέχρι την χρονική στιγμή n.

Η συνθήκη (3) μας λέει ότι η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την τιμή της X_{n+1} δεδομένης της πληροφορίας μέχρι και την χρονική στιγμή n είναι η τιμή της διαδικασία την χρονική στιγμή n, X_n.

Ορισμός 2.4.2 *Εστω μια στοχαστικη διαδικασία $\{X_n\}$ και μια διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}$. Η $\{X_n\}$ ονομάζεται submartingale αν*

1. *Η τυχαία μεταβλητή X_n είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_n$ για κάθε n.*
2. *Για την τυχαία μεταβλητή X_n ισχύει ότι $\mathbb{E}[\,|X_n|] < \infty$.*
3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \geq X_n$.

Ορισμός 2.4.3 *Εστω μια στοχαστικη διαδικασία $\{X_n\}$ και μια διήθηση $\{\mathcal{F}_n\}$. Η $\{X_n\}$ ονομάζεται supermartingale αν*

1. *Η τυχαία μεταβλητή X_n είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}_n$ για κάθε n.*
2. *Για την τυχαία μεταβλητή X_n ισχύει ότι $\mathbb{E}[\,|X_n|] < \infty$.*
3. $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] \leq X_n$.

Πρόταση 2.4.1 *Αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} = 1$ η προεξοφλημένη διαδικασία των τιμών της μετοχής είναι martingale.*

Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύεται ότι

Πρόταση 2.4.2 *(1) Αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} \geq 1$ η προεξοφλημένη διαδικασία των τιμών της μετοχής είναι submartingale. (1) Αν $\frac{p\,u+(1-p)\,d}{1+r} \leq 1$ η προεξοφλημένη διαδικασία των τιμών της μετοχής είναι supermartingale.*

2.4.5 Το ισοδύναμο μέτρο *martingale*

Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάποιος που θέλει να δραστηριοποιηθεί στην αγορά των μετοχών, γνωρίζει μεν ότι σε κάθε χρονική περίοδο η τιμή της μετοχής μπορεί είτε να είναι ανοδική με απόδοση u είτε καθοδική με απόδοση d αλλά δεν γνωρίζει την πιθανότητα με την οποία αυτό μπορεί να συμβεί. Ας υποθέσουμε ότι q είναι η πιθανότητα την οποία θα δώσει στην ανοδική κατάσταση και $1-q$ αντίστοιχα η πιθανότητα της καθοδικής κατάστασης.

Αν η q επιλεγεί κατά τέτοιο τρόπο ώστε

$$\frac{q\,u+(1-q)\,d}{1+r} = 1 \implies q = \frac{1+r-d}{u-d}$$

τότε η προεξόφλημένη διαδικασία τιμών S_n^* γίνεται μια διαδικασία martingale.

Θέτωντας την πιθανότητα q στην ανοδική κατάσταση της οικονομίας και την πιθανότητα $1-q$ στην καθοδική κατάσταση της οικονομίας μπορεί λοιπόν κανείς να πει ότι η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη για την προεξοφλημένη τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $n+1$ λαμβάνοντας υπόψιν την ιστορία της αγοράς μέχρι και την χρονική στιγμή n, δηλαδή την $\mathcal{F}_n$ είναι η προεξοφλημένη τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή n,

$$\mathbb{E}_Q[S_{n+1}^* \mid \mathcal{F}_n] = S_n^*$$

όπου με $\mathbb{E}_Q[X]$ συμβολίζουμε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X αν θεωρήσουμε ότι η πιθανότητα των δύο καταστάσεων του κόσμου είναι q και $1-q$ αντίστοιχα. Με μαθηματικούς όρους, έχουμε **αλλάξει το μέτρο πιθανότητας κάτω απο το οποίο παρατηρούμε την οικονομία**. Η διαδικασία αυτή ονομάζεται αλλαγή μέτρου, και όπως θα δούμε στην συνέχεια των διαλέξεων αυτών παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην τιμολόγηση συγκυριακών συμβολαίων.

Αν όλοι οι επενδυτές έχουν αυτή την άποψη για την οικονομία, δηλαδή ότι η πιθανότητα ανοδικής πορείας της μετοχής είναι q και η πιθανότητα καθοδικής πορείας της μετοχής είναι $1-q$ τότε με απλή άλγεβρα παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}_Q[S_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = (1+r)\,S_n$$

ή ισοδύναμα ότι

$$\mathbb{E}_Q\left[\frac{S_{n+1}}{S_n} \mid \mathcal{F}_n\right] = (1+r)$$

Η αναμενόμενη τιμή της απόδοσης της μετοχής κάτω απο το μέτρο Q είναι ίση με την απόδοση του βέβαιου τίτλου.

Το μέτρο Q δίνει την πιθανότητα q στην κατάσταση 1, ανοδική πορεία της οικονομίας, και την πιθανότητα $1-q$ στην κατάσταση 2, καθοδική πορεία της οικονομίας. Αν κατάνοήσουμε το νέο μέτρο σαν μια εναλλακτική θεώρηση του κόσμου, δηλαδή σαν ένα εναλλακτικό σενάριο για την οικονομία, θα πρέπει το εναλλακτικό σενάριο αυτό, Q, να είναι **συμβατό** με το αρχικό σενάριο P. Η έννοια της συμβατότητας είναι να είμαστε σίγουροι ότι το νεό σενάριο Q, συνεχίζει να δίνει 2 πιθανές καταστάσεις για την οικονομία, δηλάδή ότι $q > 0$ και $1-q > 0$. Αυτό είναι ισοδύναμο με την συνθήκη

$$0 < q < 1$$

και απο τον ορισμό του q αυτό μας δίνει ότι

$$d < 1 + r < u \tag{2.1}$$

Η συνθήκη αυτή είναι πολύ λογική. Αν δεν συνέβαινε π.χ. αν είχαμε ότι $d < u < 1+r$ τότε η μετοχή δεν θα είχε λογο ύπαρξης ως τίτλος. Προσπαθείστε να δείτε και τις άλλες δυνατότητες παραβίασης της συνθήκης αυτής.

Η συνθήκη $q > 0$, $1-q > 0$ αν (και μόνο αν) $p > 0$, $1-p > 0$ μπορεί να ερμηνευθεί ως το ότι τα δύο μέτρα Q και P δίνουν θετική (αλλά όχι την ίδια) πιθανοτητα στα ίδια γεγονότα. Λέμε ότι τα μέτρα P και Q είναι **ισοδύναμα**.

Ορισμός 2.4.4 *Το μέτρο Q, που ορίστηκε παραπάνω, ονομάζεται* **ισοδύναμο μέτρο martingale**.

2.4.6 *Arbitrage* και ισοδύναμο μέτρο *martingale*

Ας υποθέσουμε ότι η συνθήκη (2.1) δεν ισχύει. Τότε είναι δυνατόν κάποιος επενδυτής χρησιμοποιώντας τον βέβαιο τίτλο και την μετοχή να κατασκευάσει μια επενδυτική στρατηγική η οποία παρέχει βέβαιο κέρδος. Μια τέτοια στρατηγική ονομάζεται arbitrage.

Ας υποθέσουμε π.χ. ότι $1 + r < d < u$. Στην περίπτωση αυτή οι αποδόσεις της μετοχής είναι και στις δύο πιθανές καταστάσεις του κόσμου μεγαλύτερες απο την απόδοση του βέβαιου τίτλου. Μπορεί λοιπόν κανείς να δανειστεί απο την τράπεζα ένα ποσό, π.χ. 1 ευρώ, και με το ποσό αυτό να αγοράσει $1/S_0$ κομμάτια της μετοχής. Το ποσό που θα χρωστάει στην τράπεζα την επόμενη χρονική στιγμή θα είναι το ποσό $(1 + r)$. Αν η οικονομία πάει καλά (κατάσταση 1) η μετοχή του θα έχει αξία $u > 1 + r$. Συνεπώς, επιστρέφει το δάνειο των $1 + r$ στην τράπεζα και του μένει $u - (1 + r) > 0$ καθαρό κέρδος. Αν η οικονομία δεν πάεικαλά (κατάσταση 2) η μετοχή του θα έχει αξία $d > 1 + r$. Επιστρέφει λοιπόν το δάνειο των $1 + r$ στην τράπεζα και του μένει $d - (1 + r) > 0$ καθαρό κέρδος. Σε κάθε πιθανή περίπτωση λοιπόν ο επενδυτής αυτός μπορεί να κατασκευάσει μια στρατηγική που θα του επιφέρει καθαρό κέρδος, δηλαδή μπορεί να κατασκευάσει ένα arbitrage. Με όμοιο τρόπο μπορεί να εργαστεί κανείς στην περίπτωση $d < u < 1 + r$.

Η μόνη περίπτωση να μην μπορεί να κατασκευάσει κάποιος μια στρατηγική arbitrage στο διωνυμικό μοντέλο είναι το να ισχύει $d < 1 + r < u$ δηλαδή το να υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale.

Πρόταση 2.4.3 *Δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage στο διωνυμικό μοντέλο αν και μόνο αν υπάρχει ένα ισοδύναμο μέτρο martingale.*

2.4.7 Το όριο του διωνυμικού μοντέλου για μεγάλο αριθμό περιόδων

Τη χρονική στιγμή n η πιθανές τιμές της μετοχής θα είναι οι $\{S_0u^n, S_0d\,u^{n-1}, \cdots, S_0d^j\,u^{n-j}, \cdots, d^n\}$. Η πιθανότητα η τιμή της μετοχής την χρονικη στιγμή n να είναι $S_0u^j\,d^{n-j}$ είναι

$$P(S_n = S_0\,u^j\,d^{n-j}) = \begin{pmatrix} n \\ j \end{pmatrix} p^j\,(1-p)^{n-j}$$

δηλαδή η S_n ακολουθεί την διωνυμική κατανομή. Είναι γνωστό οτι σε συγκεκριμένα όρια η διωνυμική κατανομή μπορεί να προσεγγιστεί απο την κανονική κατανομή.

Ας υποθέσουμε ότι $n \to \infty$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε $n\,\delta t = T$.

Θεώρημα 2.4.1 *Ας υποθέσουμε ότι $X_1, X_2, \cdots$ ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ και $\mathbb{E}[(X_i - \mu)^2] = \sigma^2 < \infty$. Τότε για αρκετά μεγάλα n η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $T = X_1 + \sum X_n$ μπορεί να προσεγγιστεί απο την κανονική κατανομή με μέσο $\mu\, n$ και διασπορά $\sigma^2 n$.*

Σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο έχουμε ότι $S_{n+1} = H_{n+1}\, S_n$. Παίρνουμε λογαρίθμους και καταλήγουμε στο ότι

$$\ln(S_{n+1}) - \ln(S_n) = \ln(H_{n+1})$$

Οι τυχαίες μεταβλητές $X_n := \ln(H_{n+1})$ είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες. Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[X_n] = p\, \ln(u) + (1-p)\, \ln(d) := \mu < \infty$$

και

$$\mathbb{E}[(X_n - \mu)^2] = p\,(\ln(u)^2 - \ln(u)) + (1-p)\,(\ln(d)^2 - \ln(d)) := \sigma^2 < \infty$$

Παρατηρούμε ότι ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή n μπορεί να γραφεί ως το τηλεσκοπικό άθροισμα

$$\begin{aligned} \ln(S_n) &= (\ln(S_n) - \ln(S_{n-1})) + \cdots + (\ln(S_1) - \ln(S_0)) \\ &= \ln(H_n) + \cdots + \ln(H_1) = \sum_{i=1}^{n} X_i \end{aligned}$$

Συνεπώς απο το κεντρικό οριακό θεώρημα, για αρκετά μεγάλο n ο λογάριθμος της τιμής της μετοχής, σύμφωνα με το διωνυμικό μοντέλο θα ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο $\mu\, n$ και διασπορά $\sigma^2\, n$. Κατά συνέπεια η ασυμπτωτική κατανομή της τιμής της μετοχής θα είναι η λογαριθμικοκανονική κατανομή.

2.4.8 Βαθμονόμηση του διωνυμικού μοντέλου

Στην πράξη παρατηρούμε χρονοσειρές απο τις αποδόσεις των μετοχών. Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε ένα χρονικό ορίζοντα $[0, T]$, να χωρίσουμε τον χρονικό αυτό ορίζοντα σε N διακριτές χρονικές στιγμές $t_i = i/N$, $i = 0, 1, , N$ οι οποίες απέχουν μεταξύ τους κατά $\delta t = T/N$. Χρησιμοποιώντας την κατάλληλη χρονική κλίμακα η χρονική στιγμή n θα αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή $\delta t\, n \in [0, T]$.

Απο ιστορικά δεδομένα της αγοράς μπορούμε να υπολογίσουμε τις ποσότητες

$$\begin{aligned} \mu &:= \frac{1}{T}\, \mathbb{E}_P\left[\ln \frac{S(T)}{S(0)}\right], \\ \sigma^2 &:= \frac{1}{T}\, Var_P\left[\ln \frac{S(T)}{S(0)}\right] \end{aligned}$$

όπου με $S(T)$ συμβολίζουμε την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή T ή με την παραμετροποίηση του χρόνου στην S_N.

Αν το διωνυμικό μοντέλο αποτελεί πιστή αναπαράσταση της πραγματικότητας οι ποσότητες μ και σ^2 θα έπρεπε να παίρναν την μορφή

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_P\left[\ln \frac{S(T)}{S(0)}\right] &= N\, p\, \ln u + N\,(1-p)\, \ln d \\ Var_P\left[\ln \frac{S(T)}{S(0)}\right] &= N\, p\,(1-p)\,(\ln u - \ln d)^2 \end{aligned}$$

Μπορούμε λοιπόν να επιλέξουμε τα u, d, p κατά τρόπο ώστε οι δύο αυτές διαφορετικές εκφράσεις να δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα. Αυτό μας δίνει ένα σύστημα εξισώσεων με 3 αγνώστους οπότε εν γένει η λύση δεν αναμένεται να είναι μοναδική. Δηλαδή, μπορούμε να προσεγγίσουμε την εξέλιξη μιας μετοχής με παραπάνω του ενός διωνυμικά μοντέλα.

Για να επιλεξουμε ένα απο αυτά θέτουμε την εξτρα συνθήκη

$$u\, d = 1$$

σύμφωνα με την οποία αν μια ανοδική κίνηση ακολουθηθεί απο μια καθοδική κίνηση η τιμή της μετοχής θα παραμείνει αμετάβλητη. Με την έξτρα αυτή συνθήκη οι εξισώσεις ... παίρνουν την μορφή

$$\begin{aligned}(2p-1)\ln u &= \frac{T}{N}\mu,\\ 4\,p\,(1-p)(\ln u)^2 &= \frac{T}{N}\,\sigma^2\end{aligned}$$

οι οποίες δίνουν ότι

$$\begin{aligned}\ln u &= \sqrt{\frac{T}{N}\,\sigma^2+\frac{T^2}{N^2}\,\mu^2}\\ \ln d &= -\sqrt{\frac{T}{N}\,\sigma^2+\frac{T^2}{N^2}\,\mu^2}\end{aligned}$$

Μετά μπορούμε να υπολογίσουμε και το p ως

$$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\frac{\mu}{\sigma}\,\left(\frac{N}{T}+\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2\right)^{-1/2}$$

Για N αρκετά μεγάλο μπορούμε να παραλείψουμε τους όρους $1/N^2$ σε σχέση με τους όρους $1/N$, και έτσι να πάρουμε τις προσεγγίσεις

$$\begin{aligned}u &\simeq \exp(\sqrt{\frac{T}{N}}\,\sigma),\\ d &\simeq \exp(-\sqrt{\frac{T}{N}}\,\sigma),\end{aligned}$$

και

$$p=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,\frac{\mu}{\sigma}\,\sqrt{\frac{T}{N}}$$

2.4.9 Το όριο του διωνυμικού μοντέλου για μεγάλο αριθμό περιόδων II

Με την παραμετροποίηση αυτή για το διωνυμικό μοντέλο μπορούμε να ξαναδούμε το όριο του διωνυμικού μοντέλου για μεγάλο αριθμό περιόδων.

Θεωρούμε λοιπόν ότι ο χρόνος μετριέται σε ακέραια πολλαπλάσια της χρονικής κλίμακας δt, δηλαδή ότι η χρονική στιγμή $t=\delta\,n$ για κάποιο $n\in\mathbb{N}$ και οποιοδήποτε $t\in[0,T]$. Θα θεωρήσουμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}u &= exp(\sigma\,\sqrt{\delta t}),\\ d &= exp(-\sigma\,\sqrt{\delta t}),\\ p &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{\mu}{\sigma}\sqrt{\delta t}\right)\end{aligned}$$

σύμφωνα με την παραμετροποίηση του μοντέλου που προτείναμε.

Ορίζουμε τώρα τις τυχαίες μεταβλητές $X_i=\mathbf{1}_{\{H_i=u\}}$ ως εξής

$$X_i=\mathbf{1}_{\{H_i=u\}}=\begin{cases}1 & H_i=u,\\ 0 & H_i=d\end{cases}$$

Η τυχαία μεταβλητή $\sum_i^n X_i$ μας δίνει τον συνολικό αριθμό των ανοδικών κινήσεων της οικονομίας εως και την χρονική στιγμή n (που σε πραγματικό χρόνο αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή $t=n\,\delta t$). Αν πάρουμε τώρα την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $U_n:=\sum_i^n X_i$ για $n=1,2,\cdots$ αυτή είναι μια στοχαστική διαδικασία η οποία μας δίνει (μετράει) τον συνολικό αριθμό ανοδικών κινήσεων της οικονομίας σε n επαναλήψεις του μοντέλου. Είναι προφανές απο τον ορισμό της διαδικασίας αυτής ότι $0\le U_n\le n$ για κάθε n. Επίσης η στοχαστική διαδικασία $D(n)=n-U(n)$ μετράει τον συνολικό αριθμό καθοδικών κινήσεων της οικονομίας σε n επαναλήψεις του μοντέλου.

Απο την κατασκευή του διωνυμικού μοντέλου η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t=n\delta t$ θα είναι ίση προς

$$S(n\delta t)=S_n=S(0)\,u^{U_n}\,d^{D_n}$$

Αυτό μπορεί να γραφεί με καλύτερο τρόπο ως

$$S(n\delta t) = S(0)\, d^n \left(\frac{u}{d}\right)^{U_n}$$

και αν θυμηθούμε τον ορισμό του $\delta t = t/n$ θέτουμε όπου $n = t/\delta t$ και παίρνοντας λογαρίθμους

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = \frac{t}{\delta t}\ln(d) + \ln\left(\frac{u}{d}\right)\sum_{i=1}^{t/\delta t} X_i$$

το οποίο αν θυμηθούμε την παραμετροποίηση που έχουμε υιοθετήσει για τα u, d, παίρνει την μορφή

$$\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) = -\frac{\sigma\, t}{\sqrt{\delta t}} + 2\sigma\sqrt{\delta t}\sum_{i=1}^{t/\delta t} X_i$$

Μας ενδιαφέρει το συνεχές όριο του μοντέλου δηλαδή το όριο καθώς το $\delta t \to 0$. Επειδή $n = t/\delta t$ εφόσον το t είναι φραγμένο, το όριο αυτό θα αντιστοιχεί στο όριο $n \to \infty$ οπότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κεντρικό οριακό θεώρημα για την μελέτη της συμπεριφοράς της οικογένειας τυχαίων μεταβλητών (στοχαστικής διαδικασίας) $Y(t) := -\frac{\sigma t}{\sqrt{\Delta}} + \sum_{i=1}^{t/\delta t} X_i$ στο όριο αυτό. Παρατηρούμε ότι η μεταβλητή αυτή αποτελείται απο 2 όρους, και ο πρώτος και ο δεύτερος τείνουν στο άπειρο στο όριο $\delta t \to 0$ ($n \to \infty$) αλλά όπως θα δούμε λόγω της κατάλληλης παραμετροποίησης του μοντέλου ο ρυθμός με τον οποίο οι δύο αυτοί όροι τείνουν στο άπειρο είναι τέτοιος ώστε τελικά οι πρώτες 2 ροπές της μεταβλητής αυτής να είναι πεπερασμένες.

Πράγματι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}P[Y(t)] = & \frac{-\sigma t}{\sqrt{\delta t}} + 2\sigma\sqrt{\delta t}\sum_{i=1}^{t\delta t}\mathbb{E}[X_i] \\ & \frac{-\sigma t}{\sqrt{\delta t}} + 2\sigma\sqrt{\delta t}\,\frac{t}{\delta t}\, p = \mu\, t\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}Var_P[Y(t)] &= 4\sigma^2\,\delta t\sum_{i=1}^{t/\delta t} Var_P(X_i) \\ &= 4\,\sigma^2\, t\, p(1-p)\end{aligned}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι με την παραμετροποίηση αυτή οι δύο πρώτες ροπές είναι πεπερασμένες και μάλιστα ανάλογες της χρονικής περιόδου που έχει περάσει δηλαδή του t. Αν θεωρήσουμε το δt πάρα πολύ μικρό τότε $p \simeq \frac{1}{2}$ συνεπώς $Var_P[Y(t)] \simeq \sigma^2\, t$.

Άρα στο όριο όπου $\delta t \to 0$ ($n \to \infty$) και εφόσον $t = \delta t\, n$ πεπερασμένο το διωνυμικό μοντέλο μας δίνει

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_P\left[\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right] &= \mu\, t \\ Var_P\left(\ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right) &= \sigma^2 t\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το κεντρικό οριακό θεώρημα μπορούμε να δούμε ότι στο όριο καθώς $\delta t \to 0$ η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Y(t)$ θα συγκλίνει σε κατανομή στην ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Z(t) \sim N(\mu t, \sigma^2\, t)$.

2.5 Παράρτημα

2.5.1 Η υπο συνθήκη μέση τιμή ως τυχαία μεταβλητή

Ας θυμηθούμε τον ορισμό της υπο συνθήκη μέσης τιμής ως προς ένα γεγονός.

Ορισμός 2.5.1 *Έστω A ένα γεγονός σε ένα διακριτό χώρο πιθανοτήτων $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και X μια τυχαία μεταβλητή. Η υπο συνθήκη μέση τιμή της X ως προς το γεγονός A ορίζεται ως*

$$\mathbb{E}_P[X \mid A] = \frac{1}{P(A)}\sum_{\omega\in A} X(\omega)\, P(\omega)$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι πως έχουμε μια διακριτή τυχαία μεταβλητή Y στον χώρο πιθανοτήτων αυτό. Η τυχαία αυτή μεταβλητή παίρνει τις τιμές $Y = Y_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ και ορίζουμε ως $A_i = \{\omega, Y(\omega) = Y_i\} \subset \Omega$ αυτά τα γεγονότα για τα οποία η τυχαία μεταβλητή Y παίρνει την τιμή Y_i.

Ορισμός 2.5.2 *Η υπο συνθήκη μέση τιμή της X δεδομένης της Y είναι η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}_P[X \mid Y]$ η οποία ορίζεται ως*

$$\mathbb{E}_P[X \mid Y](\omega) = \mathbb{E}_P[X \mid A_i] \ \text{αν} \ \omega \in A_i$$

Η τυχαία αυτή μεταβλητή έχει την ιδιότητα

$$\mathbb{E}_P[\mathbb{E}_P[X \mid Y]] = \mathbb{E}_P[X]$$

Επίσης η τιμή της τυχαίας μεταβλητή $\mathbb{E}_P[X \mid Y]$ μπορεί να θεωρηθεί σαν η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη, με την έννοια της ελαχιστοποίησης του μέσου τετραγωνικού σφάλματος, της τυχαίας μεταβλητής X, δεδομένης της τιμής που έχει πάρει η τυχαία μεταβλητή Y.

Παρατηρούμε ότι η τυχαία μεταβλητή $\mathbb{E}_P[X \mid Y]$ απο τον ορισμό της δεν εξαρτάται απο τις τιμές που παίρνει η Y αυτές καθαυτές αλλά περισσότερο απο τα γεγονότα A_i τα οποία και καθορίζουν τις τιμές της. Για παράδειγμα αν πάρουμε την τυχαία μεταβλητή Y

$$Y(\omega) = Y_i \ \text{ αν } \ \omega \in A_i, \ i = 1, \cdots, n$$

και Z

$$Z(\omega) = Z_i \ \text{ αν } \ \omega \in A_i, \ i = 1, \cdots, n$$

όπου τα A_i είναι τα ίδια και στις δύο περιπτώσεις και τέτοια ώστε $A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega$ αλλά εν γένει $Y_i \neq Z_i$ τότε

$$\mathbb{E}_P[X \mid Y] = \mathbb{E}_P[X \mid Z]$$

Κατά συνέπεια η υπο συνθήκη μέση τιμή εξαρτάται μόνο απο την δομή των γεγονότων $\{A_i\}$ τα οποία είναι απαραίτητα για να καθορίσουν τις τιμές που παίρνει η τυχαία μεταβλητή και όχι απο την ίδια την τιμή της τυχαίας μεταβλητής.

Θα χρειαστούμε να χρησιμοποιήσουμε σύνολα γεγονότων τα οποία έχουν την ιδιότητα να είναι κλειστά κάτω απο τις τομές και τις ενώσεις και τα συμπληρωματικά. Αποφεύγοντας την περίπτωση $n = \infty$ που απαιτεί προσοχή σε τεχνικά ζητήματα και έννοιες απο την θεωρία μέτρου (αλλά όμως είναι ιδιαίτερα χρήσιμη σε πολλές εφαρμογές!) μπορούμε να ορίσουμε ένα τέτοιο σύνολο γεγονότων καταχρηστικά ως μια σ-άλγεβρα. Το μικρότερο τέτοιο σύνολο το οποίο περιέχει όλα τα A_i και είναι κλειστό ως προς τις ενώσεις, τις τομές και τα συμπληρώματα θα το συμβολίζουμε με $\sigma(A_1, \cdots, A_n)$. Προσέξετε ότι το $\sigma(A_1, \cdots, A_n)$ δεν περιέχει μόνο τα $\{A_1\}, \cdots \{A_n\}$ αλλά και τα $\{A_1, A_2\}$ καθώς και όλες τις ενώσεις, κ.ο.κ.

Επίσης αν Y είναι μια τυχαία μεταβλητή, μπορούμε να ορίσουμε σαν $\sigma(Y)$ το μικρότερο σύνολο με τις παραπάνω ιδιότητες που περιέχει όλα τα γεγονότα τα οποία είναι απαραίτητα για να περιγράφουμε πλήρως την τυχαία μεταβλητή Y. Στο παραπάνω παράδειγμα $\sigma(Y) = \sigma(A_1, \cdots, A_n)$ αλλα και $\sigma(Z) = \sigma(A_1, \cdots, A_n)$ δηλαδή $\sigma(Y) = \sigma(Z)$.

Η παραπάνω συζήτηση μας οδηγεί στο να ορίσουμε τελικά την έννοια της υπο συνθήκη μέσης τιμής μιας τυχαίας μεταβλητής X ως προς ένα τέτοιο σύνολο γεγονότων, μια σ -άλγεβρα.

Ορισμός 2.5.3 *Έστω $\sigma(F)$ μια σ-άλγεβρα που περιεχει τα γεγονότα $F = (F_1, \cdots, F_n)$. Η υπο συνθήκη μέση τιμή της X ως προς την $\sigma(F)$, ειναι μια τυχαία μεταβλητή $G = \mathbb{E}[X \mid \sigma(F)]$ τέτοια ώστε*

1. *Να μπορούμε να περιγράψουμε πλήρως τις τιμές που παίρνει η G γνωρίζοντας μόνο τα γεγονότα στο F*

2. *Για κάθε $A \in \sigma(F)$ να ισχύει*

$$\sum_{\omega \in A} G\, P(\omega) = \sum_{\omega \in A} X\, P(\omega)$$

Αν ορίσουμε ως $G(\omega) = \mathbb{E}_P[X \mid F_i]$ αν $\omega \in F_i$ μπορεί κανείς να δεί οτι

$$\sum_{\omega \in F_i} G\, P(\omega) = \sum_{\omega \in F_i} X\, P(\omega)$$

Τα υποσύνολα που βρίσκονται στο $\sigma(F)$ θα είναι πεπερασμένεσωενώσεις των διαφόρων F_i. Έστω π.χ ένα οποιοδήποτε $A \in \sigma(F)$ το οποίο έχει την μορφή $A = F_1 \cup F_2$. Τότε

$$\begin{aligned}\sum_{\omega \in F_1 \cup F_2} G\,P(\omega) &= \sum_{\omega \in F_1} G\,P(\omega) + \sum_{\omega \in F_2} G\,P(\omega) \\ = \sum_{\omega \in F_1} X\,P(\omega) + \sum_{\omega \in F_2} X\,P(\omega) &= \sum_{\omega \in F_1 \cup F_2} G\,P(\omega)\end{aligned}$$

Η υπο συνθήκη μέση τιμή έχει τις εξής πολύ χρήσιμες ιδιότητες:

- Αν $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_N$ τότε $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_M] \mid \mathcal{F}_N] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_M]$.
- Αν $\mathcal{F}_M \subset \mathcal{F}_N$ τότε $\mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_N] \mid \mathcal{F}_M] = \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_M]$.
- Αν η τυχαία μεταβλητή X καθορίζεται πλήρως απο τα γεγονότα που περιλαμβάνονται στην $\mathcal{F}$, δηλαδή η X είναι μετρήσιμη ως προς την $\mathcal{F}$ τότε $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = X$.
- Αν η X είναι ανεξάρτητη της $\mathcal{F}$ τότε $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}] = \mathbb{E}[X]$

2.5.2 Το κεντρικό οριακό θεώρημα

Έστω μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών X_n, $n = 1, 2, \cdots$. Θα λέμε ότι η ακολουθία X_n συγκλίνει στην τυχαία μεταβλητή X ($X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$) σε κατανομή αν για κάθε συνεχή και φραγμένη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$$

Το κεντρικό οριακό θεώρημα μας εξασφαλίζει την σύγκλιση σε κατανομη άπειρων αθροισμάτων ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών σε κατανομή σε τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την κανονική κατανομή.

Θεώρημα 2.5.1 *Έστω $\{X_i\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων και όμοια κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών τέτοιων ώστε $\mathbb{E}[X_i] = \mu < \infty$ και $Var(X_i)\sigma^2 < \infty$. Ας ορίσουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$ και την $Y_n = \frac{S_n - n\,m}{\sigma\,\sqrt{n}}$. Τότε $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} Y$ και $Y \sim N(0, 1)$.*

Κεφάλαιο 3

Μοντέλα για τις τιμές των μετοχών σε συνεχή χρόνο

3.1 Εισαγωγή

Πολλές φορές είναι πολύ πιο εύχρηστο για ορισμένες εφαρμογές να χρησιμοποιούμε μοντέλα για την εξέλιξη των τιμών των μετοχών τα οποία θεωρούν ότι η μεταβλητή του χρόνου είναι συνεχής. Τα μοντέλα αυτά βασίζονται στην βασική υπόθεση ότι οι συναλλαγές σε μια αγορά γίνονται πολυ συχνά και η χρονική αποσταση μεταξύ των διαφορετικών συναλλαγών είναι πάρα πολύ μικρή. Μια τέτοια υπόθεση κάναμε πχ στην προσέγγιση του διωνυμικού μοντέλου απο το συνεχές του όριο με την λογαριθμικοκανονική κατανομή. Η υποθεσή αυτή είναι αρκετά αληθοφανής σε αρκετές αγορές και συν τοις άλλοις μας επιτρέπει πολλές φορές να καταλήξουμε σε τύπους σχετικά με τις τιμές των διαφόρων παραγώγων συμβολαίων οι οποίοι είναι σε κλειστή μορφή και συνεπώς είναι αρκετά εύχρηστοι και μας δίνουν γρήγορα μια ιδέα σχετικά με το που πρέπει να κυμαίνονται οι τιμές.

Στο κεφάλαιο αυτό θα προσπαθήσουμε να περιγράψουμε τις τιμές των μετοχών σαν μια στοχαστική διαδικασία, δηλαδή με δυναμικό τρόπο και απλά δεν θα αρκεστούμε να καθορίσουμε την κατανομή της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή t σαν συνάρτηση των παραμέτρων του μοντέλου. Το δυναμικό μοντέλο που θα περιγράψουμε συνδέει την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t με την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t+\Delta t$ για $\Delta t \to 0$, και κατά κάποιο τρόπο αποτελεί την γενίκευση του διακριτού διωνυμικού μοντέλου σε συνεχή χρόνο και σε συνεχή χώρο καταστάσεων.

3.2 Σύντομη μαθηματική εισαγωγή

3.2.1 Ο θεμέλιος λίθος των μοντέλων σε συνεχή χρόνο: Η κίνηση *Brown*

Ο θεμέλιος λίθος των συνεχών μοντέλων είναι η κίνηση Brown . Η στοχαστική αυτή διαδικασία παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην θεωρία των στοχαστικών διαφορικών εξισώσεων και αποτελεί έναν από τους ακρογωνιαίους λίθους των χρηματοοικονομικών μαθηματικών, όσον αφορά τα μοντέλα σε συνεχή χρόνο.

Ορισμός 3.2.1 *Η κίνηση Brown είναι μία στοχαστική διαδικασία B_t η οποία παίρνει τιμές στον $\mathbb{R}$ και έχει τις ακόλουθες ιδιότητες*

(i) *Αν $t_0 < t_1 < ... < t_n$ τότε οι τυχαίες μεταβλητές $B_{t_0}, B_{t_1} - B_{t_0}, ..., B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ είναι* **ανεξάρτητες** *(ανεξάρτητες μεταβολές)*

(ii) *Αν $s, t \geq 0$, τότε $B_{t+s} - B_s \sim N(0,t)$*

(iii) *Οι τροχιές της κίνησης Brown είναι* **συνεχείς** *με πιθανότητα 1, δηλαδή η $t \to B_t$ είναι συνεχής συνάρτηση του t, σχεδόν βέβαια.*

Οι τρείς αυτές ιδιότητες ορίζουν μία και μοναδική στοχαστική διαδικασία. Μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά μαθηματικά η ύπαρξη μίας στοχαστικής διαδικασίας με τις παραπάνω ιδιότητες.

Παράδειγμα 3.2.1 Αν B_t είναι μία μονοδιάστατη κίνηση Brown τέτοια ώστε $B_0 = 0$ τότε

$$E[f(B_t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \exp\left(-\frac{y^2}{2t}\right) dx$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω δείξτε ότι $E[B_t^2] = t$.

Παράδειγμα 3.2.2 Το διωνυμικό μοντέλο στο συνεχές όριο είδαμε ότι προβλέπει $\ln(S(t)) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$. Δεδομένου ότι $B_t \sim N(0,t)$ και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των κανονικά κατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών μπορούμε να δούμε ότι $\ln(S(t)) = \mu\, t + \sigma B_t$ όπου η ισότητα μπορεί να ερμηνευτεί ως ισότητα σε κατανομή. Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$S(t) = S(0) \exp(\mu\, t + \sigma B_t)$$

όπου $S(0)$ είναι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή $t = 0$.

Χρησιμοποιώντας την κατανομή της κίνησης Brown βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} E[S_t] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} S_0 \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x\right) \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right) dx \\ &= \frac{S_0}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left((r - \frac{\sigma^2}{2})t\right) \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2t} + \sigma x\right) dx = S_0 \exp(rt) \end{aligned}$$

Η κίνηση Brown αν την θεωρήσουμε σαν μια τυχαία συνάρτηση του χρονου, είναι ένα παράδειγμα μιας αρκετά παθολογικής συνάρτησης.

- Η κίνηση Brown είναι μία συνάρτηση η οποία είναι μεν συνεχής ως προς t αλλά δεν είναι διαφορίσιμη ως προς t πουθενά, σχεδόν βέβαια.
- Η μεταβολή της κίνησης Brown στο διάστημα $[0,t]$ είναι άπειρη για κάθε t, σχεδόν βέβαια, ενώ αντίθετα η τετραγωνική μεταβολή της στο διάστημα αυτό είναι πεπερασμένη και ίση με t [1].

3.2.2 Μια μικρή παρακαμψη στήν στοχαστική ανάλυση: Το ολοκλήρωμα *Itô*

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο η κίνηση Brown είναι μία συνάρτηση παθολογική της οποίας η παράγωγος δεν ορίζεται πουθενά. Όμως μπορούμε να ολοκληρώσουμε επάνω σε αυτή. Ολοκληρώματα επάνω στην κίνηση Brown, τα οποία ορίστηκαν στα τέλη της δεκαετίας του 1940 απο τον Ιάπωνα μαθηματικο Kyoshi Itô βρίσκουν πολύ σημαντικές εφαρμογές στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά.

Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε μία τυχαία συνάρτηση $f : (0,\infty) \times \Omega \to \mathbb{R}$ η οποία εξαρτάται με κάποιο τρόπο από την έκβαση κάποιας κίνησης Brown B_t και θέλουμε να ορίσουμε το ολοκλήρωμα της επάνω στις μεταβολές της κίνησης Brown,

$$\int_a^b f(t,\omega) dB_t(\omega).$$

Με τον συμβολισμό dB_t θα κατανοούμε (σχετικά χαλαρά απο την μαθηματική άποψη) την διαφορά $B_{t+dt} - B_t$, για πολύ μικρό dt. Το ολοκλήρωμα αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν το όριο των αθροισμάτων των γινομένων των τιμών της τυχαίας συνάρτησης f σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, επι την μεταβολή της κίνησης Brown μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + dt$.

Παράδειγμα 3.2.3 Αν $f = 1$ τότε $\int_a^b dB_t = B(b) - B(a)$.

[1] Θυμίζουμε ότι η μεταβολή ορίζεται ως $\lim_{\Delta\to 0}\sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|$ ενώ η τετραγωνική μεταβολή ως $\lim_{\Delta\to 0}\sum_i |B_{t_{i+1}} - B_{t_i}|^2$, όπου με το όριο $\Delta \to 0$, εννοούμε το όριο της πιο λεπτής διαμέρισης.

Παράδειγμα 3.2.4 Ας υποθέσουμε ότι $f(t)$ είναι η τοποθέτηση μας σε ένα τίτλο η εξέλιξη της τιμής του οποίου μπορεί να περιγραφεί απο την κίνηση Brown $S(t) = B_t$. Στην περίπτωση αυτή το $dB_t = dS(t)$ μας δίνει την μεταβολή της τιμής του τίτλου μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t+dt$. Αν έχουμε στην διάθεση μας $f(t)$ κομμάτια απο τον τίτλο αυτό, τότε η συνολική μας ζημιά ή κέρδος απο την θέση αυτή θα είναι $f(t)\,dS(t) = f(t)\,dB_t$. Αν 'αθροίσουμε' όλες τις μεταβολές μεταξύ $t = a$ και $t = b$ θα έχουμε την συνολική μεταβολή της αξίας της θέσης αυτής (την οποία φυσικά θεωρούμε ότι μεταβάλλουμε απο χρονική στιγμή σε χρονική στιγμή ανάλογα με τις κινήσεις της αγοράς), την οποία και στο όριο καθώς το $dt \to 0$ θα συμβολίζουμε ως $\int_a^b f\,dB_t$. Αν υποθέσουμε ότι στο χαρτοφυλάκιο αυτό τοποθετήσαμε αρχικά την χρονικη στιγμή $t = a$ το ποσό $V(a) = x$ και μετά απλά το αναδιαρθρώνουμε στις διάφορες χρονικές στιγμές αφήνοντας το να μεταβάλλει την αξία του μόνο λόγω των διακυμάνσεων της τιμής του τίτλου και όχι τοποθετώντας νέα ποσά σε αυτό (αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο) θα έχουμε ότι η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή b θα είναι ίση προς

$$V(b) = V(a) + \int_a^b f\,dB_t.$$

Το στοχαστικό λοιπόν ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να εκφράσει την αξία χαρτοφυλακίων που η μεταβολή της αξίας τους οφείλεται αποκλειστικά στην τυχαία μεταβολή της αξίας των τίτλων που το απαρτίζουν.

Κατά κάποιο τρόπο το ολοκλήρωμα δίνει την συνολική μεταβολή επάνω στο διάστημα $[a, b]$ και μας θυμίζει λίγο το ολοκλήρωμα Stieltjes απο την πραγματική ανάλυση. Η σημαντική διαφορά και δυσκολία όμως είναι ότι, το ολοκλήρωμα Stieltjes ορίζεται οταν η συνάρτηση επάνω στην οποία ολοκληρώνουμε είναι πεπερασμένης μεταβολής, και γνωρίζουμε ότι η κίνηση Brown έχει άπειρη μεταβολή! Κατά συνέπεια για να οριστεί το ολοκλήρωμα αυτό θα πρέπει να εκμεταλλευτούμε τις παθολογικές ιδιότητες της κίνησης Brown και να κατασκευάσουμε ένα νέο ολοκλήρωμα, διαφορετικό απο το ολοκλήρωμα Stieltjes το οποίο να βασίζεται στην τετραγωνική μεταβολή αντί για την μεταβολή. Αυτή είναι και η συμβολή του Itô.

Ας δώσουμε τώρα τον ορισμό του παραπάνω ολοκληρώματος:

Ορισμός 3.2.2 *Ας θεωρήσουμε την διαμέριση $a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$ του διαστήματος $[a, b]$, όπου $t_i = a + \frac{(b-a)i}{n}$, $i = 0, 1, \cdots, n$ και προσεγγίζουμε την συνάρτηση $f(t, \omega)$ ως*

$$f(t, \omega) \simeq \sum_{i=0}^{n-1} f(t_i, \omega)\mathbf{1}_{[t_i, t_{i+1})}(t).$$

Το **ολοκλήρωμα Itô** *μπορεί να οριστεί σαν το όριο στον L^2* [2] *της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων $\xi_n := \sum_{i=1}^n f(t_i, \omega)[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega)$, δηλαδή*

$$\int_a^b f(t, \omega) dB_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n f(t_i, \omega)[B_{t_{i+1}} - B_{t_i}](\omega)$$

Τα ακόλουθα σημεία είναι πολύ σημαντικά για τον καλό ορισμό του ολοκληρώματος Itô.

- Η τιμή της συνάρτησης f την χρονική στιγμή t θα πρέπει να εξαρτάται από τις τιμές του B_s για $s \leq t$ **αλλά όχι για** $s \geq t$, δηλαδή η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι προσαρμοσμένη στην δομή πληροφορίας που σχετίζεται με την κίνηση Brown.

- Για να ορίζεται το όριο της ακολουθίας μερικών αθροισμάτων, και κατά συνέπεια και το ολοκλήρωμα του Itô για μια προσαρμοσμένη διαδικασία f η διαδικασία αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί και την έξτρα ιδιότητα $\mathbb{E}[\int_a^b |f(t, \omega)|^2 dt] < \infty$. Οι διαδικασίες που ικανοποιούν αυτή την συνθήκη θα λέμε οτι απαρτίζουν το σύνολο $M^2([a, b])$.

- Το όριο λαμβάνεται κατά την L^2 έννοια και όχι σημειακά δηλαδή για κάθε ω.

Τα παραπάνω σημεία διαφοροποιούν το ολοκλήρωμα του Itô από άλλους πιθανούς ορισμούς στοχαστικών ή και ντετερμινιστικών ολοκληρωμάτων. Επίσης, με παρόμοιο τρόπο μπορεί να οριστεί το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_a^b f(t, \omega) dX_t$ επάνω σε πιο γενικές στοχαστικές διαδικασίες X_t. Μία ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα περίπτωση είναι η περίπτωση όπου η X_t είναι martingale.

[2] Θυμίζουμε ότι το οριο στον L^2 μιας ακολουθίας τυχαίων μεταβλητών ξ_n, είναι η τυχαία μεταβλητή Ξ αν ισχύει ότι $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[(\xi_n - \Xi)^2] = 0$ όπου τώρα το όριο θεωρείται υπό την έννοια του ορίου στο $\mathbb{R}$

3.2.3 Ιδιότητες του ολοκλήρώματος

Πρόταση 3.2.1 *Το ολοκλήρωμα Itô έχει τις ακόλουθες σημαντικές ιδιότητες*

(1) Είναι γραμμικό, δηλαδή για δύο στοχαστικές διαδικασίες f_1 και f_2 ισχύει

$$\int_a^b (\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)\, dB_t = \lambda_1 \int_a^b f_1\, dB_t + \lambda_2 \int_a^b f_2\, dB_t,$$

όπου $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

(2) Οι δύο πρώτες ροπές της τυχαίας μεταβλητής $Y = \int_a^b f\, dB_t$ ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\mathbb{E}\left[\int_a^b f dB_t\right] = 0, \quad \mathbb{E}\left[\left|\int_a^b f(t,\omega) dB_t\right|^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_a^b \mid f(t,\omega) \mid^2 dt\right].$$

Σε όλα τα παραπάνω θεωρούμε ότι η συνάρτηση την οποία ολοκληρώνουμε ανήκει στον κατάλληλο χώρο $M^2([a,b])$.

Θα θεωρήσουμε τώρα ότι ενώ το κάτω όριο της ολοκλήρωσης παραμένει σταθερό, και χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να το θέσουμε $a = 0$, επιτρέπουμε το επάνω όριο της ολοκλήρωσης να μεταβάλλεται και να είναι $b = t$. Μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε το στοχαστικό ολοκλήρωμα $\int_0^t f(t) dB_t$ όπου $0 \le t \le T$. Για κάθε τιμή του t το ολοκλήρωμα αυτό ορίζεται όπως και παραπάνω αρκεί η στοχαστική διαδικασία $f \in M^2([0,T])$. Συνεπώς με την παραπάνω κατασκευή, για κάθε τιμή του t παίρνουμε μία τυχαία μεταβλητή η οποία είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη και η τιμή της είναι ίση με το ολοκλήρωμα $\int_0^t f(t) dB_t$. Άρα κατασκευάζουμε μία στοχαστική διαδικασία

$$I_t := \int_0^t f(t) dB_t,$$

που ονομάζεται το **αόριστο ολοκλήρωμα του Itô** [3].

Με βάση τις ιδιότητες του στοχαστικού ολοκληρώματος μπορούμε να δείξουμε τις παρακάτω ιδιότητες για την στοχαστική διαδικασία I_t.

Πρόταση 3.2.2 *Αν $f \in M^2([0,T])$, $0 \le t \le T$ και $I_t = \int_0^t f(s) dB_s$. τότε:*
(i) Η στοχαστική διαδικασία I_t είναι μία (τετραγωνικά ολοκληρώσιμη) martingale.
(ii) Η διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής[4] της I_t είναι $< I >_t = \int_0^t \mid f(s) \mid^2 ds$.

3.2.4 Διαδικασίες *Itô*

Κάνοντας χρήση του στοχαστικού ολοκληρώματος του Itô μπορούμε να ορίσουμε μία νέα κατηγορία γενικότερων στοχαστικών διαδικασιών από την κίνηση Brown, τις διαδικασίες του Itô.

Ορισμός 3.2.3 *Μία διαδικασία Itô είναι μία στοχαστική διαδικασία X_t της μορφής*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega) ds + \int_0^t v(s,\omega) dB_s$$

όπου οι u και v ικανοποιούν τις συνθήκες $\int_0^t v^2(s,\omega) ds < \infty$ και $\int_0^t u(s,\omega) ds < \infty$, ς.β.
Η διαδικασία αυτή μπορεί να γραφεί σε διαφορική μορφή ως

$$dX_t = u dt + v dB_t$$

Παράδειγμα 3.2.5 Η στοχαστική διαδικασία $X_t = ln(S(t)) = \mu t + \sigma B_t$ του παραδείγματος 3.2.2 είναι μια διαδικασία Itô. Πράγματι, η διαδικασία αυτή μπορεί να γραφεί ως

$$X_t = ln(S_0) + \mu \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dB_s = X_0 + \int_0^t \mu ds + \int_0^t \sigma dB_s$$

η σε διαφορική μορφή $dX_t = d(ln(S_t)) \mu\, dt + \sigma\, dB_t$.

[3] Η παραπάνω στοχαστική διαδικασία, ισοδύναμα μπορεί να οριστεί σαν το στοχαστικό ολοκλήρωμα από 0 ως το T της $f(t)\mathbf{1}_{[0,t]}$ δηλαδή $\int_0^t f(s) dB_s = \int_0^T f(s)\mathbf{1}_{[0,t]}(s) dB_s$.

[4] Αν M_t είναι ένα martingale τότε εν γένει η διαδικασία M_t^2 δεν είναι ένα martingale αλλά ένα submartingale. Η μοναδική διαδικασία Z_t για την οποία ισχύει ότι $M_t^2 - Z_t$ είναι martingale ονομάζεται διαδικασία τετραγωνικής μεταβολής της M_t και συμβολίζεται ως $< M >_t$.

3.2.5 Ο τύπος του *Itô*

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι τι μορφή έχει μία συνάρτηση μίας διαδικασίας Itô, δηλαδή αν θα είναι και αυτή με την σειρά της μία διαδικασία Itô και αν ναι ποιά θα είναι η ακριβή της μορφή σαν το άθροισμα ενός ολοκληρώματος Riemann και ενός ολοκληρώματος Itô.

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνεται από το περίφημο Λήμμα του Itô, το οποίο μας προσφέρει έναν κανόνα αλλαγής μεταβλητών τροποποιημένο κατάλληλα ώστε να ισχύει για στοχαστικά ολοκληρώματα.

Πρόταση 3.2.3 (Το λήμμα του Itô) *Θεωρούμε ότι η X_t είναι μία διαδικασία Itô η οποία μπορεί να εκφραστεί ως*

$$X_t = X_0 + \int_0^t u(s,\omega)ds + \int_0^t v(s,\omega)dB_s.$$

Έστω ότι $g(t,x)$ είναι μια $C^{1,2}$ συνάρτηση[5] *και ορίζουμε την στοχαστική διαδικασία $Y_t := g(t, X_t)$. Η στοχαστική αυτή διαδικασία μπορεί να εκφραστεί επίσης σαν ένα στοχαστικό ολοκλήρωμα της μορφής*

$$g(t,X_t) = g(0,X_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial g}{\partial s} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)(s,X_s)ds + \int_0^t v\frac{\partial g}{\partial x}(s,X_s)dB_s$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα μπορεί να γραφεί και σε ισοδύναμη διαφορική μορφή:

$$dg(t,X_t) = \left(\frac{\partial g}{\partial t} + u\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{1}{2}v^2\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)(t,X_t)dt + v\frac{\partial g}{\partial x}(t,X_t)dB_t$$

Μνημονικός κανόνας για το Λήμμα του Itô: Αν $Y_t = g(t, X_t)$ τότε χρησιμοποιούμε το ανάπτυγμα Taylor μέχρι 2ης τάξης για την g,

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}dt + \frac{\partial g}{\partial x}dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(dX_t)^2$$

και υπολογίζουμε τις δυνάμεις των διαφορικών dX_t, χρησιμοποιώντας τον κανόνα

$$\begin{aligned} dt \cdot dt &= dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0 \\ dB_t \cdot dB_t &= dt. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3.2.6 Ας θεωρήσουμε ότι $g(t,x) = \frac{x^2}{2}$. Η εφαρμογή του λήμματος του Itô μας δίνει ότι αν $X_t = B_t$ και $Y_t = g(X_t)$ τότε

$$Y_t = B_t^2 = \int_0^t X_s\, dX_s + \int_0^t 1\, ds = \int_0^t B_s\, dB_s + t,$$

όπου φυσικά $g_t = 0$, $g_x = x$, $g_{xx} = 1$[6]. Η σχέση αυτή μπορεί να ξαναγραφεί ως

$$\int_0^t B_s\, dB_s = B_t^2 - t$$

η οποία και δείχνει την βασική διαφορά μεταξύ του ολοκληρώματος Riemann - Stieltjes και του ολοκληρώματος Itô.

3.3 Ένα μοντέλο για τις τιμές των μετοχών: Η γεωμετρική κίνηση *Brown*

Θα προσπαθήσουμε τώρα να δώσουμε μια δυναμική μορφή στο μοντέλο για την εξέλιξη της τιμής των μετοχών σε συνεχή χρόνο. Θα ξεκινήσουμε απο το μοντέλο όπως το υπαγορεύει το συνεχές όριο του διωνυμικού μοντέλου, και όπως το επαναεκφράσαμε με την χρήση της κίνησης Brown , ως διαδικασία Itô (βλ. παραδείγματα 3.2.2, 3.2.5),

$$dX_t = d(ln(S_t)) = \mu\, dt + \sigma\, dB_t$$

[5]Με $C^{1,2}$ συμβολίζουμε τον χώρο των συναρτήσεων $g(t,x)$ που έχουν συνεχή πρώτη παράγωγο ως προς την πρώτη μεταβλητή και συνεχή δεύτερη παράγωγο ως προς την δεύτερη μεταβλητή.

[6]Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $g_x = \frac{\partial g}{\partial x}$

Μας ενδιαφέρει να δούμε τι εξελικτική μορφή θα έχει η διαδικασία $S(t) = S_t$. Παρατηρούμε ότι $S(t) = exp(X_t)$ οπότε επειδή η συνάρτηση $g(t, x) = exp(x)$ είναι $C^{1,2}$, απο το λήμμα του Itô περιμένουμε οτι επειδή η $X(t)$ είναι διαδικασία Itô θα είναι διαδικασία Itô και η $S(t)$. Η μορφή της θα δίνεται με την εφαρμογή του λήμματος του Itô για την συνάρτηση $g(t, x) = exp(x)$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $g_t = 0$ και $g_x = g_{xx} = exp(x) = g$, οπότε η προσέγγιση Taylor μέχρι την δεύτερη τάξη για την συνάρτηση $g(t, X_t)$ δίνει

$$dg(t, X_t) = g_x(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}g_{xx}(t, X_t)\,(dX_t)^2 = g(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}g(t, X_t)\,(dX_t)^2.$$

Επίσης, παρατηρούμε ότι η διαδικασία X_t μπορεί να γραφεί στην τυπική μορφή μιας διαδικασίας Itô με $u = \mu$ και $v = \sigma$. Κατά συνέπεια χρησιμοποιώντας τον κανόνα του λογισμού του Itô έχουμε ότι

$$\begin{aligned} dX_t &= \mu dt + \sigma\, dB_t, \\ (dX_t)^2 &= \mu^2 \underbrace{dt^2} + 2\mu\sigma \underbrace{dt\, dB_t} + \sigma^2 (dB_t))^2 = \sigma^2\, dt \end{aligned}$$

εφόσον σύμφωνα με τους κανόνες του λογισμού αυτού οι όροι που είναι υπογραμμισμένοι θεωρούνται αμελητέοι. Αντικαθιστώντας τις σχέσεις αυτές στο ανάπτυγμα Taylor για την g έχουμε ότι

$$dg(t, X_t) = g(t, X_t)\mu dt + g(t, X_t)\sigma dB_t + \frac{1}{2}g(t, X_t)\,\sigma^2\, dt,$$

και παρατηρώντας ότι $g(t, X_t) = S(t)$ και μαζεύοντας τους όμοιους όρους παίρνουμε ότι

$$dS(t) = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right) S(t)\, dt + \sigma\, S(t)\, dB_t$$

ή ορίζοντας την σταθερά $\nu := \mu + \frac{\sigma^2}{2}$,

$$dS(t) = \nu\, S(t)\, dt + \sigma\, S(t)\, dB_t. \tag{3.1}$$

Η εξίσωση αυτή είναι ένας εξελικτικός νόμος ο οποίος συνδέει την μεταβολή της τιμής της μετοχής μεταξύ των χρονικών στιγμών t και $t + dt$, dS, με την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t, $S(t)$. Ο εξελικτικός αυτός νόμος ορίζει μια στοχαστική διαδικασία, η οποία ονομάζεται γεωμετρική κίνηση Brown και αποτελεί ένα απο τα βασικά μοντέλα για την εξέλιξη της τιμής των μετοχών σε συνεχή χρόνο. Όπως σχολιάσαμε και στην αρχή της παραγράφου αυτής, το μοντέλο αυτό αποτελεί την γενίκευση του διωνυμικού μοντέλου σε συνεχή χρόνο και συνεχή χώρο καταστάσεων.

Ας μείνουμε λίγο στην ποιοτική συμπεριφορά αυτού του μοντέλου. Σύμφωνα με την εξίσωση (3.1) η μεταβολή της τιμής της μετοχής στο διάστημα $[t, t + dt]$ μπορεί να σπάσει σε δύο συνιστώσες: Η πρώτη συνιστώσα, $\nu S(t)\, dt$ είναι μια μεταβολή η οποία συνολικά είναι ανάλογη της χρονικής διάρκειας dt, και επίσης ανάλογη της τιμής της μετοχής την χρονικη στιγμή t. Μία απλή εξήγηση γι' αυτό είναι ότι η μεταβολή της τιμής της μετοχής θα εξαρτάται απο τις πράξεις που γίνονται σε αυτή, δηλαδή απο την προσφορά και την ζήτηση της. Μπορεί κανείς λοιπόν, σχηματικά να θεωρήσει ότι όσο μεγαλύτερη είναι η τρέχουσα τιμή της μετοχής τόσο περισσότεροι θα ενδιαφέρονται να διαπραγματευτούν σε αυτή, θεωρώντας την σαν μια αρκετά καλή και αξιόπιστη επένδυση, και η ζήτηση ή η προσφορά σε αυτή θα οδηγήσει σε μεταβολή στην τιμή της. Αν $\nu > 0$ θα οδηγήσει σε αύξηση της τιμής ενώ αν $\nu < 0$ θα οδηγήσει σε μείωση της τιμής. Επειδή όμως η χρηματοοικονομική αγορά αποτελείται απο μεγάλο αριθμό επενδυτών, ανεξάρτητων μεταξύ τους, δεν είναι απαραίτητο όλοι να κάνουν συντεταγμένες κινήσεις, αγοράς ή πώλησης του τίτλου, οι οποίες θα οδηγήσουν σε αύξηση ή σε μείωση, αντιστοίχως, της τιμής της μετοχής με την μορφή $\nu\, S(t)\, dt$. Η συντεταγμένη αυτή μεταβολή της τιμής θα συνοδεύεται και απο στατιστικές διακυμάνσεις γύρω απο αυτή οι οποίες θα οδηγούν με την ίδια πιθανότητα σε αυξήσεις ή μειώσεις. Το εύρος των διακυμάνσεων είναι λογικό να θεωρήσουμε οτι είναι ανάλογο του μέγεθους των πράξεων συναλλαγης που γίνονται σε αυτό τον τίτλο, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι ανάλογο του $S(t)$. Ο όρος $\sigma\, S(t)\, dB_t$ μοντελοποιεί ακριβώς αυτές τις διακυμάνσεις. Ο συντελεστής αναλογίας σ είναι πολύ σημαντικός στα χρηματοοικονομικά και ονομάζεται η μεταβλητότητα της μετοχής.

Το μοντέλο (3.1) έχει την μορφή μιας εξίσωσης η οποία συνδέει την μεταβολή της τιμής μιας μετοχής σε κάποιο χρονικό διάστημα με την τρέχουσα τιμή της στην αρχή αυτού του διαστήματος. Η σχέση που εκφράζει αυτή την μεταβολή αποτελείται απο δύο μέρη: το πρώτο εκφράζει την μέση μεταβολή και το δεύτερο εκφράζει τις διακυμάνσεις γύρω απο αυτή την μέση μεταβολή και περιέχει ένα στοχαστικό παράγοντα που μοντελοποιείται με την κίνηση Brown. Αν ο στοχαστικός όρος έλειπε από την εξίσωση, η εξισωση θα έπαιρνε την μορφή $dS(t) = \nu\, S(t)dt$ η οποία μπορεί να θεωρηθεί ισοδύναμη με την συνήθη διαφορική εξίσωση $\frac{dS(t)}{dt} = \nu S(t)$, που είναι μια εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, και η λύση της ως γνωστό είναι η εκθετική συνάρτηση, $S(t) = S(0)\, e^{\nu t}$. Αν τώρα λαμβάναμε υπόψιν και τον στοχαστικό όρο, θα μπορούσαμε να γράψουμε την (3.1) στην μορφή

$$\frac{dS(t)}{dt} = \nu S(t) + \sigma \frac{dB(t)}{dt}$$

η οποία όμως είναι προβληματική γιατί όπως είδαμε στην παράγραφο 3.2.1 η παράγωγος της κίνησης Brown $B_t = B(t)$ ως προς τον χρονο δεν ορίζεται για κανένα t σχεδόν βέβαια. Συνεπώς, η εξίσωση (**;;**) δεν μπορεί να θεωρηθεί σαν μια συνήθης διαφορική εξίσωση, αλλά πρέπει να κατανοηθεί σαν μια διαφορετική μαθηματική οντότητα, η οποία ονομάζεται στοχαστική διαφορική εξίσωση. Μια στοχαστικη διαφορική εξίσωση της μορφής (**;;**) είναι στην ουσία μια ολοκληρωτική εξίσωση της μορφής

$$S(t) = S(0) + \int_0^t \nu S(r)\, dr + \int_0^t \sigma\, S(r)\, dB(r), \tag{3.2}$$

οπου το πρώτο ολοκλήρωμα ορίζεται ως ένα ολοκλήρωμα Riemann και το δεύτερο ολοκλήρωμα ορίζεται ως ένα ολοκλήρωμα Itô.

Ορισμός 3.3.1 (Στοχαστική διαφορική εξίσωση) *Μια ολοκλήρωτική εξίσωση της μορφής (3.2) ονομάζεται στοχαστική διαφορική εξίσωση και χάριν συντομογραφίας πολλές φορές εκφράζεται με την διαφορική μορφή (3.1). Η λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης, $S(t)$ είναι μια στοχαστική διαδικασία, προσαρμοσμένη στην δομή πληροφορίας που παράγεται απο την κίνηση Brown η οποία ικανοποιεί την (3.2).*

Σχόλιο 3.3.1 Η εξίσωση (3.2) (ή ισοδύναμα (3.1)) είναι μια πολύ ειδική περίπτωση στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης. Μια στοχαστική διαφορική εξίσωση μπορεί να έχει την γενικότερη μορφή $dx(t) = b(t, x(t))dt + \sigma(t, x(t))\, dB_t$ όπου b, σ είναι γενικές συναρτήσεις των t, x.

Θα δείξουμε τώρα πως μπορεί να χρησιμοποιηθεί το λήμμα του Itô για να λύσουμε την στοχαστική διαφορική εξίσωση (3.2) ή ισοδύναμα την (3.1). Ας θυμηθούμε ότι στην περίπτωση όπου ο στοχαστικός όρος δεν υπάρχει ($\sigma = 0$) η εξίσωση (3.2) είναι μια συνήθης διαφορική εξίσωση χωριζομένων μεταβλητών, η οποία λύνεται πολύ απλά με τα παρακάτω βήματα:

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \nu\, dt \implies \frac{d}{dt}(ln(S(t)) = \nu \implies$$
$$ln(S(t)) - S(0) = \int_0^t \nu\, dt = \nu\, t \implies S(t) = S(0)\, e^{\nu\, t}$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $\sigma \neq 0$, και ας γράψουμε σε αναλογία με την ντετερμινιστική περίπτωση

$$\begin{aligned} \frac{dS(t)}{S(t)} &= \nu dt + \sigma dB_t \implies \\ \int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)} &= \int_0^t \nu dt + \sigma dB_t = \mu t + \sigma B_t \end{aligned} \tag{3.3}$$

Αν στο στάδιο αυτό μπείτε στον πειρασμό να αντικαταστήσετε το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής με το $ln(S(t)) - ln(S(0))$ **μην** το κάνετε! Εφόσον η $S(t)$ είναι μία διαδικασία Itô αυτό δεν είναι ισχύει! Για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα αυτό, ας υπολογίσουμε την χρονική μεταβολή της στοχαστικής διαδικασίας $Z_t = ln(S(t))$. Με την χρήση του τύπου του Itô παίρνουμε

$$\begin{aligned} dZ_t &= \frac{dS(t)}{S(t)} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S(t)^2}\right)(dS(t))^2 \\ &= \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2S(t)^2}\sigma^2 S(t)^2 dt = \frac{dS(t)}{S(t)} - \frac{1}{2}\sigma^2 dt \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει ότι

$$\int_0^t \frac{dS(t)}{S(t)} = Z_t + \frac{1}{2}\sigma^2 t = ln(S(t)) + \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

και αντικαθιστώντας αυτό στην εξίσωση (3.3) βρίσκουμε ότι

$$S(t) = S(0)exp\left[\left(\nu - \underbrace{\frac{1}{2}\sigma^2}\right)t + \underbrace{\sigma B_t}\right]$$

όπου οι υπογραμμισμένοι όροι οφείλονται στην στοχαστικότητα. Η στοχαστική διαδικασία $S(t)$ δεν είναι άλλη απο την γεωμετρική κίνηση Brown.

3.4 Γενικεύσεις

Το μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown αν και είναι πολύ διαδεδομένο στα στοχαστικά χρηματοοικονομικά δεν αποτελεί πάντοτε την καλύτερη περιγραφή των τιμών των μετοχών. Θα σκιαγραφήσουμε σε αυτή την παράγραφο μερικές γενικεύσεις του οι οποίες μπορεί να προσφέρουν καλύτερη περιγραφή σε αρκετές περιπτώσεις, αλλά φυσικά με το κόστος ότι θυσιάζεται η απλότητα και (μερικές φορές) η δυνατότητα αναλυτικής περιγραφής.

3.4.1 Γεωμετρική κίνηση *Brown* με χρονοεξαρτώμενους συντελεστές

Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό η τιμή μιας μετοχής την χρονική στιγμή t δίνεται απο την λυση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης

$$dS(t) = \nu(t)S(t)\,dt + \sigma(t)\,S(t)\,dB(t) \tag{3.4}$$

όπου τώρα οι παράμετροι του μοντέλου ν, σ, δεν είναι πλέον σταθερές αλλά συναρτήσεις του χρόνου. Παρόμοια επιχειρήματα, βασισμένα στην χρήση του λήμματος του Itô μας δίνουν ότι η στοχαστική διαδικασία

$$S(t) = S(0)\,exp\left(\int_0^t \left(\nu(r) - \frac{\sigma^2(r)}{2}\right)dr + \int_0^t \sigma(r)\,dB(r)\right)$$

αποτελεί λύση της στοχαστικής διαφορικής εξίσωσης (3.4). Η στοχαστική αυτή διαδικασία είναι και η γενίκευση της γεωμετρικής κίνησης Brown στην περίπτωση που οι παράμετροι του μοντέλου είναι χρονοεξαρτώμενες.

Το μοντέλο αυτό προβλέπει ότι

$$ln(S(t)) = ln(S(0)) + \int_0^t \left(\nu(r) - \frac{\sigma^2(r)}{2}\right)dr + \int_0^t \sigma(r)\,dB(r)$$

και απο τις ιδιότητες του ολοκληρώματος Itô

$$X(t) = ln\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right) \sim N\left(\int_0^t \left(\nu(r) - \frac{\sigma^2(r)}{2}\right)dr, \int_0^t \sigma^2(r)\,dr\right)$$

3.4.2 Μοντέλα στοχαστικής μεταβλητότητας

Σε πολλές άγορές η υπόθεση της σταθερής μεταβλητότητας δεν είναι μια ικανοποιητική υπόθεση. Αυτό δείχνουν διάφορα φαινόμενα όπως π.χ. το volatility smile effect που προκύπτει απο την μελέτη των επαγόμενων μεταβλητοτήτων (implied volatilities) όπως αυτές μπορεί να υπολογιστούν απο δεδομένα της αγοράς.

Ένα μοντέλο το οποίο μπορεί να περιγράψει ως ένα ικανοποιητικό βαθμό τέτοια φαινόμενα είναι το μοντέλο CEV ή αλλιώς μοντέλο σταθερής ελαστικότητας της διακύμανσης (constant elasticity of variance model). Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό

$$dS(t) = \mu\,S(t)\,dt + \sigma\,S(t)^{\gamma}\,dB(t)$$

όπου $\gamma \in (0, 1)$. Αν $\gamma = 1$ καταλήγουμε στο μοντέλο της γεωμετρικής κίνησης Brown.

Ένα άλλο μοντέλο παρεμφερές είναι το μοντέλο του Hull για την στοχαστική μεταβλητότητα. Αυτό είναι ένα μοντέλο της μορφής

$$\begin{aligned} dS(t) &= \mu\,S(t)\,dt + S(t)\,\sqrt{V(t)}\,dB_1(t) \\ dV(t) &= k\,(\theta - V(t))\,dt + \sigma\,\sqrt{V(t)}\,dB_2(t) \end{aligned}$$

όπου $B_1(t)$, $B_2(t)$ είναι κινήσεις Brown όχι απαραίτητα ανεξάρτητες μεταξύ τους. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό η μεταβλητότητα της μετοχής περιγράφεται απο την στοχαστική διαδικασία $V(t)$, η οποία δίνεται απο την δεύτερη διαδικασία Itô.

Κεφάλαιο 4

Τιμολόγηση παραγώγων συμβολαίων I

4.1 Παράγωγα συμβόλαια

Ένας χρηματοοικονομικός τίτλος ονομάζεται παράγωγο συμβόλαιο αν η αξία του εξαρτάται απο την αξία ενός άλλου τίτλου, π.χ. μιας μετοχής. Η εξάρτηση της αξίας του παραγώγου απο την αξία της μετοχής, προκύπτει κυρίως μέσω της εξάρτησης της απολαβής που θα έχει ο κάτοχος του συμβολαίου απο αυτό, κατά την λήξη του, από την αξία της μετοχής την χρονική στιγμή αυτή.

Ας δούμε δύο βασικά παραδείγματα παραγώγων συμβολαίων.

Παράδειγμα 4.1.1 Το δικαίωμα αγοράς (call option) Ένα συμβόλαιο το οποίο επιτρέπει σε συγκεκριμένη χρονική στιγμή T (η οποία ονομάζεται λήξη του συμβολαίου) στον κάτοχο του, εφόσον το επιθυμεί, την αγορά μιας μετοχής για καθορισμένη τιμή K (η οποία ονομάζεται strike) όποια και αν είναι η τιμή της μετοχής στο χρηματιστήριο, ονομάζεται δικαίωμα αγοράς.

Το δικαίωμα αγοράς μπορεί να αγοραστεί ή να πωληθεί (σε μια χρηματοοικονομικη αγορά η οποία ονομάζεται αγορά παραγώγων) οποιαδήποτε χρονική στιγμή t πριν απο την λήξη του T. Αυτός που έχει στην κατοχή του το συμβόλαιο μπορεί εφόσον θελήσει να αγοράσει την μετοχή την χρονική στιγμη T, για το ποσό K, ενώ αυτός που το έχει πουλήσει (στον αγοραστη) έχει την υποχρέωση να δώσει την μετοχή στον αγοραστή για το ποσό K.

Ποιά θα είναι η απολαβή απο το συμβόλαιο αυτό για τον κάτοχο του, την στιγμή της λήξης; Η απολαβή θα εξαρτάται απο την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή T, $S(T)$ (η οποία είναι μια τυχαία μεταβλητή). Αν $S(T) > K$ τότε ο κάτοχος του συμβολαίου έχει συμφέρον να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς και να αγοράσει την μετοχή για K, κερδίζοντας έτσι την διαφορά $S(T) - K$. Αυτό είναι και η απολαβή απο το συμβόλαιο σε αυτή την περίπτωση. Αν αντίθετα $S(T) \leq K$ τότε ο κάτοχος του συμβολαίου δεν έχει συμφέρον να εξασκήσει το δικαίωμα (και μπορεί να επιλέξει έτσι, ακριβώς επειδή είναι δικαίωμα!) εφόσον η εξάσκηση του δεν του αποκομίζει κανένα ώφελος, και έτσι η απολαβή απο το συμβόλαιο αυτό θα είναι στην περίπτωση αυτή 0. Η απολαβή απο το δικαίωμα αγοράς θα είναι λοιπόν η τυχαία μεταβλητή $F = (S(T) - K)^+$.

Για τον πωλητή του συμβολαίου θα ισχύει ακριβώς η ανάποδη θέση, εφόσον θα έχει την υποχρέωση να παρέχει την μετοχή στον κάτοχο του για το ποσό K εφόσον αυτός το επιθυμεί. Κατά συνέπει η 'απολαβή' (υποχρέωση) για τον πωλητή του συμβολαίου θα είναι η τυχαία μεταβλητή $F' = -(S(T) - K)^+$.

Παρατηρούμε ότι η απολαβή θα εξαρτάται απο την τυχαία μεταβλητή $S(T)$, η οποία είναι η τιμή της μετοχής, και έτσι δικαιολογείται και η ορολογία παράγωγο συμβόλαιο.

Παράδειγμα 4.1.2 Το δικαίωμα πώλησης (Put option) Ένα άλλο χρήσιμο παράγωγο συμβόλαιο είναι το δικαίωμα πώλησης μιας μετοχής την χρονική στιγμή T στην τιμή K όποια και αν είναι η τιμή της μετοχής στο χρηματιστήριο αξιών. Ακολουθώντας την ίδια λογική όπως και στο Παράδειγμα 4.1 μπορούμε να δούμε ότι η απολαβή για τον αγοραστή είναι η τυχαία μεταβλητή $F = (K - S(T))^+$ ενώ για τον πωλητή είναι η τυχαία μεταβλητή $F = -(K - S(T))^+$.

Τα παράγωγα συμβόλαια είναι ιδιαίτερα χρήσιμα συμβολαια τα οποία μπορεί να χρησιμοποιηθούν για διάφορες εφαρμογές, είτε για κερδοσκοπία είτε για την εξασφάλιση ενος χαρτοφυλακίου έναντι στους κινδύνους τους οποίους αυτό μπορεί να αντιμετωπίσει.

Τα παράγωγα συμβόλαια έχουν μεγάλη ποικιλία και κατασκευάζονται ανάλογα με την χρήση για την οποία προορίζονται.

Η σωστή διαχείριση των διαφόρων κινδύνων απαιτεί μία καλή κατανόηση των παραγώγων προιόντων που υπάρχουν στην αγορά, καθώς και μία καλή μεθοδολογία για την τιμολόγηση τους.

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με αριθμητικές μεθόδους που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την τιμολόγηση παραγώγων προιόντων και με το πως αυτές μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τον σχεδιασμο χαρτοφυλακίων πυ παρουσιάζουν συγκεκριμένες ιδιότητες ως προς τις διαφορετικές πιθανές κινήσεις της αγοράς.

4.2 Εισαγωγικά για την τιμολόγηση παραγώγων συμβολαίων

Εφόσον ένα παράγωγο συμβόλαιο είναι ένα συμβόλαιο που η απολαβή του αγοραστή του (ή η υποχρέωση του πωλητή του προς τον αγοραστή του) την χρονική στιγμή T, είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία εξαρτάται απο την τιμή της μετοχής $S(T)$, για να υπολογίσουμε την τιμή του την χρονική στιγμή $t < T$ θα πρέπει με κάποιο τρόπο να 'προβλέψουμε' την χρονική στιγμή t την τιμή $S(T)$, έτσι ώστε να έχουμε μια πρόβλεψη της πιθανής απολαβής την χρονική στιγμή T. Στον σκοπό αυτό μπορεί να μας βοηθήσουν τα στοχαστικά μοντέλα για την εξέλιξη των τιμών της μετοχής που εισάγαμε στα προηγούμενα κεφάλαια. Θα ξεκινήσουμε με την χρήση του διωνυμικού μοντέλου.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα παράγωγο συμβόλαιο το οποίο την χρονική στιγμή $T = 1$ δίνει στον αγοραστή του την απολαβή F, που εξαρτάται απο την τιμή μιας μετοχής (η F είναι μια τυχαία μεταβλητή η ακριβής τιμή της οποίας δεν είναι γνωστή την χρονική στιγμή $t = 0$) και θέλουμε να βρούμε την τιμή που θα πρέπει να πληρώσει ο αγοραστής του συμβολαίου αυτού την χρονική στιγμή $t = 0$ για να το αποκτήσει. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το διωνυμικό μοντέλο αποτελεί μια καλή περιγραφή της εξέλιξης της τιμής της μετοχής, σύμφωνα με το οποίο, αν η τιμή της μετοχής είναι $S(0) = S$ την χρονική στιγμή $t = 0$, η τιμή της την χρονική στιγμή $t = 1$ μπορεί να είναι $S(1) = u\,S$ με πιθανότητα p, και $S(1) = d\,S$ με πιθανότητα $1 - p$.

4.2.1 Τιμολόγηση με αναπαραγωγή του τίτλου

Ένας τρόπος να τιμολογήσουμε το παράγωγο συμβόλαιο είναι να χρησιμοποιήσουμε την χρηματοοικονομική αγορά (δηλαδή την μετοχή και τον βέβαιο τίτλο) και να τους συνδυάσουμε σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα κατασκευάσουμε κατά τέτοιο τρόπο ώστε ότι και αν συμβεί, δηλαδή είτε στην ανοδική είτε στην καθοδική πορεία της αγοράς, να έχει την ίδια συμπεριφορά με το παράγωγο συμβόλαιο.

Εφόσον την χρονική στιγμή $t = 1$ μπορεί να έχουν πραγματοποιηθεί δύο καταστάσεις (1 – ανοδική κατάσταση, και 2 – καθοδική κατάσταση) για την μετοχή, οι απολαβές απο το παράγωγο συμβόλαιο θα μπορεί να πάρουν με την σειρά τους 2 διαφορετικές τιμές, έστω F_1 και F_2 αντιστοίχως. Θα προσπαθήσουμε τώρα (την χρονική στιγμή $t = 0$) να συνθέσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που θα αποτελείται απο θ_0 κομμάτια απο τον βέβαιο τίτλο και θ_1 κομμάτια απο την μετοχή. Η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού την χρονική στιγμή $t = 0$ θα είναι

$$V(0) = \theta_0 + \theta_1 S.$$

Την χρονική στιγμή $t = 1$, η αξία του χαρτοφυλακίου αυτού θα εξαρτάται απο την αξία της μετοχής, συνεπώς στην κατάσταση 1 θα έχει αξία

$$V_1 = \theta_0(1 + r) + \theta_1 u\,S,$$

και στην κατάσταση 2

$$V_2 = \theta_0(1 + r) + \theta_1 d\,S.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε το χαρτοφυλάκιο αυτό κατά τέτοιο τρόπο ώστε $V_1 = F_1$ και $V_2 = F_2$, αρκεί να επιλέξουμε

$$\theta_1 = \frac{V_1 - V_2}{S(u - d)}, \ \ \theta_0 = ... \tag{4.1}$$

Αυτό το χαρτοφυλάκιο θα λέμε ότι αναπαράγει το παράγωγο συμβόλαιο, υπό την έννοια ότι συμπεριφέρεται με ακριβώς τον ίδιο τρόπο (δηλαδή έχει την ίδια αξία) με το παράγωγο συμβόλαιο, στην λήξη του ($T = 1$) οποιαδήποτε κατάσταση της αγοράς και αν πραγματοποιηθεί.

Είναι πολύ λογικό να περιμένουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αυτό που αναπαράγει το παράγωγο συμβόλαιο την χρονική περίοδο $t = 1$, θα πρέπει να έχει την ίδια αξία με αυτό και σε κάθε άλλη χρονική στιγμή, και συγκεκριμένα την χρονική στιγμή $t = 0$. Αυτό, γιατί, είναι πολύ λογικό να πιστεύουμε ότι συμβόλαια ή συνδυασμοί συμβολαίων που έχουν την ίδια συμπεριφορά ως προς την αξία τους κάποια χρονική στιγμή θα διατηρούν αυτή την ιδιότητα για κάθε χρονική στιγμή (ο νόμος της ενιαίας ή μίας τιμής). Αν δεν συνέβαινε αυτό η αγορά θα άφηνε την ευκαιρία για κερδοσκοπία, κάνοντας συνδυασμούς απο τα συμβόλαια αυτά, τα οποία δεν έχει αποτιμήσει σωστά (ευκαιρία arbitrage).

Με βάση στον παραπάνω συλλογισμό λοιπόν, η τιμή του παραγώγου συμβολαίου την χρονική στιγμή $t = 0$ θα είναι ίση με την τιμή του χαρτοφυλακίου που το αναπαράγει την ίδια χρονική στιγμή. Αλλά, εφόσον γνωρίζουμε την σύνθεση του χαρτοφυλακίου αυτού, καθώς και τις τιμές των τίτλων που το αποτελούν (δηλαδή του βέβαιου τίτλου και της μετοχής) για $t = 0$, έχουμε πλέον καθορίσει την τιμή του παραγώγου συμβολαίου, ως

$$P = \theta_0 + \theta_1 S$$

η οποία μετά απο κάποιες πράξεις γίνεται

$$P = \frac{1 + r - d}{(1 + r)(u - d)} F_1 + \frac{u - (1 + r)}{(1 + r)(u - d)} F_2$$

και το οποίο εύκολα ξαναγράφουμε σαν

$$P = \pi_1 \frac{F_1}{1 + r} + \pi_2 \frac{F_2}{1 + r}$$

όπου

$$\pi_1 = \frac{1 + r - d}{u - d}, \;\; \pi_2 = \frac{u - (1 + r)}{u - d},$$

Το ζεύγος (π_1, π_2) το αναγνωρίζουμε σαν τις πιθανότητες για την ανοδική και την καθοδική κατάσταση του κόσμου που αντιστοιχούν σε αναμενόμενη απόδοση της μετοχής ίση με την απόδοση του βέβαίου τίτλου. Βλέπουμε λοιπόν πως αυτή η πιθανότητα μπορεί να μας δώσει και την τιμή ενός οποιουδήποτε παραγώγου συμβολαίου ως

$$P = \pi_1 F_1^* + \pi_2 F_2^* = \mathbb{E}_Q[F^*]$$

όπου F^* είναι η προεξοφλημένη τιμή την χρονική στιγμή $t = 0$ της απολαβής της χρονική στιγμή $t = 1$.

Η τιμή του παραγώγου συμβολαίου λοιπόν μπορεί να εκφραστεί σαν την αναμενόμενη τιμή της προεξοφλημένης απολαβής απο το συμβόλαιο, αλλά η σημαντική παρατήρηση είναι ότι η κατανομή πιθανότητας της ανοδικής και καθοδικής κίνησης της αγοράς δεν είναι η στατιστική πιθανότητα (p και $1 - p$ αντίστοιχα) αλλά π_1 και $\pi_2 = 1 - \pi_1$.

4.2.2 Τιμολόγηση και απουσία *arbitrage*

Θα δούμε τώρα ένα εναλλακτικό τρόπο τιμολόγησης τους παραγώγου προιόντος χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι δεν υπάρχουν ευκαιρίες για arbitrage σε αυτή την αγορά.

Ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ η τιμή του παραγώγου είναι p. Ο αγοραστής του παραγώγου λοιπόν, μπορεί να επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο την χρονική στιγμή $t = 0$, το οποίο αποτελείται απο το παράγωγο και την θέση $\bar{\theta}_0$, $\bar{\theta}_1$ στον βέβαιο τίτλο και την μετοχή αντίστοιχα. Η συνολική αξία αυτού του χαρτοφυλακίου θα είναι $-p + \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 S$ όπου το $-$ μπροστά απο το p αντιστοιχεί στο ότι ο αγοραστής έχει πληρώσει το ποσό αυτό για να αγοράσει το παράγωγο.

Την χρονική στιγμή $t = 1$ το χαρτοφυλάκιο αυτό θα χαρακτηρίζεται απο την τυχαία μεταβλητή $F + (1 + r)\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 S(1)$. Στην κατάσταση του κόσμου 1 αυτή θα παίρνει την τιμή $F_1 + (1 + r)\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 u\, S$ ενώ στην κατάσταση του κόσμου 2 θα παίρνει την τιμή $F_2 + (1 + r)\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 d\, S$.

Ένας επενδυτής είναι πολύ λογικό να ρωτήσει το κατά πόσο μπορεί να χρησιμοποιήσει το παράγωγο για να κερδοσκοπήσει ως προς τις πιθανές κινήσεις της αγοράς. Η ερώτηση αυτή μπορεί να διατυπωθεί και ως εξής: Μπορεί ο επενδυτής να επιλέξει ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο το παράγωγο και την θέση $(\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1)$ στους δύο άλλους τίτλους, κατά τρόπο ώστε η αρχική συνολική του αξία να είναι 0 και η αξία του την χρονική στιγμή $t = 1$ να είναι θετική, όποια κατάσταση του κόσμου και αν έρθει; Για παράδειγμα, μπορούμε να βρούμε $(\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1)$ έτσι ώστε να έχει λύση το σύστημα των ανισοτήτων

$$\begin{aligned} -p + \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 S &= 0 \\ F_1 + (1 + r)\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 u\, S &\geq 0 \\ F_2 + (1 + r)\bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 d\, S &> 0? \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει ένα τέτοιο ζεύγος $(\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1)$. Διαιρούμε την δεύτερη και την τρίτη ως προς $(1 + r)$,

$$\begin{aligned} -p + \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 S &= 0, \\ F_1^* + \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 u^* S &\geq 0, \\ F_2^* + \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 d^* S &> 0 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζουμε την δεύτερη ανισότητα με $\pi_1 = \frac{1+r-d}{u-d}$ και την τρίτη με $\pi_2 = \frac{u-(1+r)}{u-d}$ και προσθέτουμε κατά μέλη για να πάρουμε

$$\mathbb{E}_Q[F^*] + \bar{\theta}_0 + \bar{\theta}_1 S > 0$$

Αυτό μας δίνει ότι $p < \mathbb{E}_Q[F^*]$.

Όμοια, αν $p > \mathbb{E}_Q[F^*]$ θα έχουμε επίσης ευκαιρία για arbitrage. Η μόνη περίπτωση να μην έχουμε ευκαιρίες για arbitrage είναι όταν $p = \mathbb{E}_Q[F^*]$.

4.2.3 Η τιμολόγηση του παραγώγου απο την σκοπιά του πωλητή και του αγοραστή

Ένα παράγωγο συμβόλαιο είναι μια συμφωνία μεταξύ δύο αντισυμβαλλομένων, του πωλητή και του αγοραστή. Θα προσπαθήσουμε να δούμε την συμφωνία αυτή απο τις δύο αυτές πλευρές.

Η σκοπιά του πωλητή

Ο πωλητής την χρονική στιγμή $t = 0$ θα λάβει το ποσό z για να πουλήσει το συμβόλαιο. Το ποσό αυτό θα το επενδύσει σε ένα χαρτοφυλάκιο (θ_0, θ_1) στην χρηματοοικονομική αγορά. Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα του προσφέρει αποδόσεις τέτοιες ώστε να μπορέσει να καλύψει τις υποχρεώσεις του ως προς τον πωλητή.

Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα έχει τις εξής ιδιότητες

$$\begin{aligned} \theta_0 + \theta_1 S &= z, \\ \theta_0(1+r) + \theta_1 u\,S - F_1 &\geq 0, \\ \theta_0(1+r) + \theta_1 d\,S - F_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Η πρώτη εξίσωση μας λέει ότι ότι πάρει ο πωλητής απο τον αγοραστή, το ποσό z, θα το τοποθετήσει στο χαρτοφυλάκιο στην χρηματοοικονομική αγορά, η δεύτερη και η τρίτη μας λέει οτί το χαρτοφυλάκιο αυτό θα πρέπει να είναι τέτοιο ώστε ο πωλητής να μπορέσει να καλύψει τις υποχρεώσεις του προς τον αγοραστή $(-F_1, -F_2)$, οποιαδήποτε κατάσταση του κόσμου και αν πραγματοποιηθεί.

Αν το z είναι αρκετά μεγάλο, τότε και τα θ_0, θ_1 μπορεί να είναι αρκετά μεγάλα και θετικά, οποτε και οι όροι $\theta_0(1+r) + \theta_1 u\,S$, $\theta_0(1+r) + \theta_1 d\,S$ θα είναι μεγαλύτεροι απο τα F_1 και F_2 αντίστοιχα, και οι ανισότητες θα ικανοποιούνται. Αντίθετα, αν το z είναι μικρό, τότε οι ανισότητες δεν θα ικανοποιούνται οπότε και ο πωλητής του συμβολαίου δεν θα μπορέσει να καλύψει τις υποχρεώσεις του. Μια λογική τιμή για τον πωλητή του συμβολαίου, είναι η μικρότερη τιμή του z για την οποία υπάρχει χαρτοφυλάκιο $\theta = (\theta_0, \theta_1)$ τέτοιο ώστε να ικανοποιείται η ανισότητα (4.2).

Άρα

$$P_S = inf\{z\,:\,\exists\,\theta \text{ τέτοιο ώστε ισχύει η (4.2)}\}$$

Ας πάρουμε τώρα τις ανισότητες (4.2) ας διαιρέσουμε την δεύτερη και την τρίτη με το $(1+r)$ (ας τις προεξοφλήσουμε δηλαδή) και μετά ας αφαιρέσουμε απο κάθε μια απο αυτές την πρώτη,

$$\theta_1(u^* - 1)S - F_1^* \geq -z \tag{4.3}$$

$$\theta_1(d^* - 1)S - F_2^* \geq -z \tag{4.4}$$

όπου με τον αστερίσκο συμβολίζουμε την προεξοφλημένη ποσότητα. Πολλαπλασιάζουμε τώρα την πρώτη με $\pi_1 = \frac{1+r-d}{u-d}$ και την δεύτερη με $\pi_2 = \frac{u-(1+r)}{u-d}$ και μετά προσθέτουμε, παρατηρώντας ότι $u^*\pi_1 + d^*\pi_2 = 1$. Παίρνουμε λοιπόν

$$z \geq \pi_1 F_1^* + \pi_2 F_2^* = \mathbb{E}_Q[F^*] \tag{4.5}$$

Παρατηρούμε ότι στην ανισότητα αυτή δεν εμφανίζεται πουθενά η σύνθεση του χαρτοφυλακίου του πωλητή του παραγώγου, παρά μόνο το αρχικό ποσό το οποίο επενδύθηκε στο χαρτοφυλάκιο αυτό. Η ανισότητα (4.5) ισχύει για οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο το οποίο ικανοποιεί την (4.2), άρα θα ισχύει και για το inf αυτών των z. Παίρνουμε λοιπόν το inf στην ανισότητα (4.2) οπότε

$$P_S \geq \mathbb{E}_Q[F^*].$$

Η σκοπιά του αγοραστή

Ας δούμε τώρα το πρόβλημα αυτό απο την σκοπιά του αγοραστή. Ο αγοραστής, έχει κατά κάποιο τρόπο την αντίθετη θέση απο τον πωλητή, υπο την έννοια ότι θα πληρώσει ένα ποσό Z την χρονική στιγμή $t = 0$, και θα έχει λαμβάνειν την απολαβή $F = (F_1, F_2)$, την χρονική στιγμή $t = 1$. Την χρονική στιγμή $t = 0$, ο αγοραστής θα συνθέσει ένα χαρτοφυλάκιο $\theta' = (\theta'_0, \theta'_1)$ (ένα χαρτοφυλάκιο δανεισμού που θα του εξασφαλίσει το ποσό Z για την αγορά του παραγώγου) το οποίο θα πρέπει να έχει την ιδιότητα

$$\begin{aligned} \theta'_0 + \theta'_1 S &= -Z, \\ \theta'_0(1+r) + \theta'_1 u\, S + F_1 &\geq 0, \\ \theta'_0(1+r) + \theta'_1 d\, S + F_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Παρατηρούμε ότι όσο μικρότερη είναι η τιμή Z τόσο ευκολότερο είναι να ικανοποιούνται οι ανισότητες αυτές. Αν η τιμή όμως η τιμή τυ αγοραστή είναι πολύ μικρή ο πωλητής δεν πρόκειται να συμφωνήσει στην αγοραπωλησία. Συνεπώς, έχει νόημα να ζητήσουμε την μεγαλύτερη τιμή για την οποία θα ικανοποιείται η (4.6),

$$P_B = sup\{Z \,:\, \exists\, \theta' \text{ τέτοιο ώστε ισχύει η } (4.6)\}$$

Επαναλαμβάνουμε τα παραπάνω βήματα (προεξόφληση της δεύτερης και τρίτης ανισότητας και αφαίρεση της πρώτης απο κάθε μια) και καταλήγουμε στο

$$\begin{aligned} \theta'_1(u^* - 1)S + F_1^* \geq Z \\ \theta'_1(d^* - 1)S + F_2^* \geq Z \end{aligned}$$

και κατόπιν πολλαπλασιάζουμε την πρώτη με π_1, την δεύτερη με π_2 και προσθέτουμε παίρνοντας

$$\pi_1 F_1^* + \pi_2 F_2^* = \mathbb{E}_Q[F^*] \geq Z \tag{4.7}$$

Η ανισότητα (4.7) ισχύει για οποιοδήποτε χαρτοφυλάκιο το οποίο ικανοποιεί την (4.6), άρα θα ισχύει και για το inf αυτών των z. Παίρνουμε λοιπόν το sup στην ανισότητα (4.2) οπότε

$$P_B \leq \mathbb{E}_Q[F^*].$$

Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο συμπέρασμα:

Πρόταση 4.2.1 *Η τιμή πώλησης του παραγώγου P_S και η τιμή αγοράς του παραγώγου ικανοποιούν την ανισότητα*

$$P_B \leq \mathbb{E}_Q[F^*] \leq P_S.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι η τιμή του αγοραστή και του πωλητή θα ταυτίζονται. Πράγματι, ας θέσουμε $\theta = (\theta_0, \theta_1)$, όπου $\theta_1 = \frac{F_1 - F_2}{S(u-d)}$ και $\theta_0 = ...$ και $z = \mathbb{E}_Q[F^*]$. Για την επιλογή αυτή ικανοποιείται η συνθήκη (4.2) συνεπώς το $\mathbb{E}_Q[F^*]$ είναι στοιχείο του συνόλου $\mathcal{A}_S := \{z \,:\, \exists\, \theta \text{ τέτοιο ώστε να ισχύει η } (4.2)\}$. Από την άλλη γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε στοιχείο z αυτού του συνόλου ισχύει $z \geq \mathbb{E}_Q[F^*]$ και η τιμή του πωλητή είναι το μέγιστο κάτω φράγμα (inf) του συνόλου αυτού. Εφόσον το φράγμα αυτό επιτυγχάνεται μπορούμε να δούμε ότι $P_S = \mathbb{E}_Q[F^*]$. Όμοια, ας θέσουμε $\theta' = (\theta'_0, \theta'_1)$ όπου $\theta'_1 = -\frac{F_1 - F_2}{S(u-d)}$ και $\theta'_0 = -...$ και $Z = \mathbb{E}_Q[F^*]$. Για την επιλογή αυτή ικανοποιείται η συνθήκη (4.6) οπότε με την ίδια λογική όπως και παραπάνω μπορούμε να δείξουμε ότι $P_B = \mathbb{E}_Q[F^*]$. Συνεπώς

$$P_B = P_S = \mathbb{E}_Q[F^*].$$

Σχόλιο 4.2.1 *Το γεγονός ότι η τιμή του αγοραστή και του πωλητή συμπίπτουν, ωφείλεται στις συγκεκριμένες ιδιότητες του μοντέλου που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή των τιμών της μετοχής. Πιο ειδικά, ωφείλεται στο γεγονός ότι για το μοντέλο αυτό, μπορούμε να βρούμε πάντοτε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αναπαράγει τις απολαβές οποιουδήποτε παραγώγου συμβολαίου. Η ιδιότητα αυτή ονομάζεται πληρότητα και σχετίζεται όπως θα δούμε και αργότερα με το γεγονός ότι υπάρχει μοναδικό ισοδύναμο μέτρο martingale.*

4.3 Τιμολόγηση στο διωνυμικό μοντέλο

4.3.1 Ένας επαναληπτικός αλγόριθμος για την τιμή του παραγώγου

Στην προηγούμενη ενότητα, μελετήσαμε την τιμολόγηση του παραγώγου συμβολαίου, σε μια χρονική περίοδο, δηλαδή, όταν η λήξη του παραγώγου είναι την χρονική στιγμή $t = 1$ και το παράγωγο συμβόλαιο μπορεί να πωληθεί και να αγοραστεί την χρονική στιγμή $t = 0$. Στην πραγματικότητα ένα παράγωγο συμβόλαιο έχει περισσότερες της μιας χρονικές περιόδους μέχρι την λήξη του, $t = T$, και μπορεί να πωληθεί και να αγοραστεί οποιαδήποτε χρονική περίοδο $t = 0, 1, 2, \cdots, T - 1$. Είναι λοιπόν ένα ενδιαφέρον ερώτημα να καθορίσουμε την τιμή του οποιαδήποτε χρονική στιγμή $t < T$.

Είναι προφανές ότι η τιμή του παραγώγου οποιαδήποτε χρονική στιγμή εν γένει θα εξαρτάται απο τις τιμές της μετοχής οι οποίες και έχουν πραγματοποιηθεί μέχρι τότε. Για παράδειγμα αν κάποιος ενδιαφέρεται να αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς μιας μετοχής (με λήξη την χρονική στιγμή T), την χρονική στιγμή $t < T$ και οι κινήσεις της αγοράς μέχρι την χρονική στιγμή t είναι ως επι το πλείστον καθοδικές, τότε η τιμή που προτίθεται να προσφέρει για το παράγωγο αυτό θα είναι χαμηλή εφόσον, η εμπειρία του απο τις καθοδικές κινήσεις της αγοράς τον οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να μην εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς, το οποίο και θα λήξει ανενεργό. Στην αντίθετη περίπτωση, όπου οι κινήσεις της μετοχής μέχρι την χρονική στιγμή t είναι ανοδικές, η τιμή που προτίθεται να προσφέρει για το παράγωγο αυτό θα είναι υψηλή εφόσον η εμπειρία του απο τις ανοδικές κινήσεις της αγοράς τον οδηγούν στο συμπέρασμα ότι υπάρχει μεγάλη πιθανότητα να εξασκήσει το δικαίωμα αγοράς.

Η παραπάνω συζήτηση λοιπόν μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η τιμή του παραγώγου συμβολαίου, την χρονική στιγμή t, θα είναι μια τυχαία μεταβλητή, η τιμή της οποίας θα εξαρτάται απο την ιστορία της μετοχής μέχρι την χρονική στιγμή t. Λέγοντας ιστορία της μετοχής εννοούμε όλες τις κινήσεις, ανοδικές ή καθοδικές, τις οποίες έχει κάνει η μετοχή (βλ. παράγραφο 2.4.1). Εδω όμως ας θυμηθούμε μια σημαντική ιδιότητα του διωνυμικού μοντέλου. Σύμφωνα με την παράγραφο 2.4.2, η καλύτερη πρόβλεψη που μπορούμε να έχουμε για την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή T δεδομένης της ιστορίας της αγοράς μέχρι την χρονική στιγμή t, θα είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία θα εξαρτάται μόνο απο την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t, δηλαδή την τυχαία μεταβλητή $S(t) = S_t$ και **όχι** απο ολόκληρη την ιστορία την μετοχής μέχρι την χρονική στιγμή t, δηλαδή τις τυχαίες μεταβλητές $\{S_1, S_2, \cdots, S_t\}$! Η ιδιότητα αυτή, (ιδιότητα Markov) μπορούμε να δείξουμε ότι κληρονομείται και απο οποιαδήποτε συνάρτηση της τιμής της μετοχής, και στην συγκεκριμένη περίπτωση απο την απολαβή απο το παράγωγο συμβόλαιο.

Διαισθητικά περιμένουμε (θα το αποδειξουμε λεπτομερώς στην συνέχεια) ότι σε περισσότερες της μιας χρονικής περιόδους, η τιμή του παραγώγου συμβολαίου την χρονική στιγμή t θα σχετίζεται με την καλύτερη δυνατή πρόβλεψη της απολαβής απο το συμβόλαιο κατά την λήξη (T), δεδομένης της ιστορίας της αγοράς μέχρι την χρονική στιγμή t. Απο την ιδιότητα Markov όμως περιμένουμε αυτή[1] να είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία καθορίζεται πλήρως απο την τιμή της μετοχής S_t χωρίς να χρειάζεται η γνώση όλης της ιστορίας της αγοράς, δηλαδή η $\mathcal{F}_t = \{S_1, S_2, \cdots, S_t\}$. Συνεπώς, η τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή t θα είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία καθορίζεται πλήρως απο την γνώση της τυχαίας μεταβλητής S_t.

Η παραπάνω συζήτηση μας κάνει προφανές το ότι για να επιλύσουμε το πρόβλημα της τιμολόγησης των παραγώγων συμβολαίων θα πρέπει να βρούμε πρώτα ένα εύχρηστο τρόπο να παραστήσουμε τις διαφορετικές καταστάσεις στις οποίες μπορεί να περιέλθει η οικονομία αυτή (ισοδύναμα τις διαφορετικές τιμές που μπορεί να πάρει η μετοχή) στις διαφορετικές χρονικές στιγμές. Αυτό γίνεται με την βοήθεια του λεγόμενου διωνυμικού δέντρου. Στο δέντρο αυτό αναπαριστούμε όλες τις πιθανές καταστάσεις της οικονομίας, ή αλλιώς όλα τα πιθανά σενάρια σχετικά με το τι μπορεί να πραγματοποιηθεί στην οικονομία αυτή. Το δέντρο αυτό αποτελείται απο κόμβους, κάθε ένας απο τους οποίους αντιστοιχεί και σε μια διαφορετική κατάσταση, που μπορεί να πραγματοποιηθεί σε διαφορετικές χρονικές στιγμές. Η 'οριζόντια' διεύθυνση του δέντρου αντιστοιχεί στον χρόνο, ενώ η 'κάθετη' αντιστοιχεί στις διαφορετικές καταστάσεις που πραγματοποιούνται στην αντίστοιχη χρονική στιγμή.

Ο κάθε κόμβος ονοματίζεται με την βοήθεια δύο φυσικών αριθμών (n, j). Ο πρώτος αριθμός, n, αντιστοιχεί στην χρονική στιγμή και ο δεύτερος, j, αντιστοιχεί στην συγκεκριμένη κατάσταση του κόσμου την χρονικη αυτή στιγμή. Κάθε κόμβος μπορεί να οδηγήσει σε δύο κόμβους: Θα χρησιμοποιήσουμε την σύμβαση ότι ο κόμβος (n, j) μπορεί να οδηγεί είτε στον κόμβο $(n + 1, j)$ είτε στον κόμβο $(n + 1, j + 1)$. Ο πρώτος από αυτούς τους δύο αντιστοιχεί σε μία καθοδική κίνηση της μετοχής απο την χρονική στιγμή n στην χρονική στιγμή $n + 1$ ενώ ο δεύτερος αντιστοιχεί σε μία ανοδική κίνηση της μετοχής από την χρονική στιγμή n στην χρονική στιγμή $n + 1$. Ο αριθμός n (ο οποίος αντιστοιχεί στις χρονικές στιγμές) μπορεί να πάρει τις τιμές $n = 0, 1, \cdots, T$ ενώ ο αριθμός j (ο οποίος αντιστοιχεί στις πιθανές καταστάσεις της αγοράς την χρονική στιγμή n) μπορεί να πάρει τις τιμές $j = 0, \cdots, n$.

[1] Η καλύτερη πρόβλεψη της απολαβής $\mathbb{E}[F \mid \mathcal{F}_t]$ και **όχι** η ίδια η απολαβή F, η οποία για να καθοριστεί πλήρως χρειάζεται την γνώση της S_T

Η τιμή της μετοχής στον κόμβο (n, j) θα αντιστοιχεί στην τιμή $S_n^j = Sd^j u^{n-j}$, δηλαδή στην τιμή που θα έχει η μετοχή αν έχουν πραγματοποιηθεί συνολικά μέχρι την χρονική στιγμή n, j ανοδικές κινήσεις και $n-j$ καθοδικές κινήσεις. Ένας άλλος τρόπος να το περιγράψουμε αυτό, είναι να θεωρήσουμε την διακριτή τυχαία μεταβλητή S_n η οποία μπορεί να πάρει τις τιμές $\{S_n^j\}$, $j = 0, \cdots, n$. Αυτό αντιστοιχεί στο ότι την χρονική στιγμή n η μετοχή θα μπορεί να πάρει n διαφορετικές τιμές, ανάλογα με την κατάσταση της οικονομίας που θα πραγματοποιηθεί.

Η τιμή του παραγώγου συμβολαίου την χρονική στιγμή n θα είναι μία συνάρτηση της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή n, άρα θα εξαρτάται απο την κατάσταση της οικονομίας που πραγματοποιήθηκε την χρονική αυτή στιγμή, και κατά συνέπεια θα εξαρτάται απο τον κόμβο του δέντρου στον οποίο βρισκόμαστε. Θα συμβολίζουμε με V_n^j την τιμή που θα έχει το παράγωγο συμβόλαιο την χρονική στιγμή n στην κατάσταση του κόσμου $j = 0, \cdots, n$. Σκοπός μας είναι να καθορίσουμε την τιμή αυτή.

Για να το πετύχουμε αυτό ας σκεφτούμε ‘μυωπικά’ δηλαδή ας απομονώσουμε κάθε κόμβο του δέντρου, π.χ. τον (n, j), και ας μην σκεφτούμε τίποτε άλλο παρά το άμεσο μέλλον, δηλαδή τους δύο κόμβους $(n+1, j+1)$ και $(n+1, j)$ στους οποίους μπορεί να μας οδηγήσει ο κόμβος αυτός. Με αυτό τον τρόπο έχουμε ένα πρόβλημα μιας χρονικής περιόδου, το οποίο περιλαμβάνει ένα παράγωγο συμβόλαιο, το οποίο την χρονική περίοδο $n+1$ μπορεί να δώσει απολαβές V_{n+1}^{j+1} ή V_{n+1}^j, ανάλογα με την κατάσταση της οικονομίας που θα πραγματοποιηθεί, και του οποίου ζητάμε να υπολογίσουμε την τιμή την χρονική στιγμή n. Για την λύση του προβλήματος αυτού όμως μπορούμε να εφαρμόσουμε τα συμπεράσματα στα οποία οδηγηθήκαμε στην παράγραφο 4.2 (αρκεί να θέσουμε $F_1 = V_{n+1}^{j+1}$, $F_2 = V_{n+1}^j$). Σύμφωνα με αυτά, η τιμή του παραγώγου συμβολαίου την χρονική στιγμή n (και εφόσον είμαστε στον κόμβο (n, j)) θα δινεται απο την σχέση

$$V_n^j = \frac{1}{1+r}[\pi_1 V_{n+1}^{j+1} + \pi_2 V_{n+1}^j] \tag{4.8}$$

Η σχέση αυτή συνδέει τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή $n+1$ και στις καταστάσεις της οικονομίας $j+1$ και j με την τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή n στην κατάσταση της οικονομίας j. Επειδή η επιλογή του κόμβου (n, j) ήταν τυχαία, η σχέση (4.8) ισχύει για κάθε n και για κάθε $j = 0, 1, \cdots, n$. Επειδή το n μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή $n = 0, \cdots, T$, η σχέση (4.8) μπορεί να κατανοηθεί σαν μια σειρά απο επαναληπτικές σχέσεις: Για δεδομένη τιμή n, έχουμε τις n σχέσεις που αντιστοιχούν στις διαφορετικές τιμές $j = 0, 1, \cdots, n$, και αυτό επαναλαμβάνεται για όλες τις τιμές που μπορεί να πάρει το n, δηλαδή $n = 0, 1, \cdots, T$.

Η σχέση (4.8) (ή καλύτερα η οικογένεια σχέσεων (4.8» μπορεί να μας καθορίσει την τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή n και στην κατάσταση της οικονομίας j αρκεί να γνωρίζουμε την τιμή του παραγώγου την χρονική στιγμή $n+1$ και τις καταστάσεις της οικονομίας $j+1$ και j. Η μόνη όμως χρονική στιγμή που γνωρίζουμε την τιμή του παραγώγου (εφόσον βέβαια γνωρίζουμε την τιμή της μετοχής) είναι η καταληκτική χρονική στιγμή T. Αυτή είναι η στιγμή της λήξης του παραγώγου συμβολαίου, όπου το συμβόλαιο είτε θα εξασκηθεί είτε όχι, ανάλογα με τις διαθέσεις του κατόχου του και την τιμή της μετοχής. Την χρονική στιγμή αυτή, η τιμή του παραγώγου συμβολαίου ισούται με την απολαβή απο αυτό, δηλαδή με την τυχαία μεταβλητή F, η οποία είναι μια διακριτή τυχαία μεταβλητή που μπορεί να πάρει διαφορετικές τιμές ανάλογα με την τιμή που θα πάρει η μετοχή την χρονική αυτή στιγμή. Οι τιμές αυτές είναι οι $\{S_T^j, j = 0, 1, \cdots, T$ και ακολουθωντας τον ίδιο συμβολισμό οι τιμές που θα παίρνει η απολαβή θα γράφονται ως $\{F_T^j\}, j = 0, 1, \cdots, T$, όπου $F_T^j = \Phi(S_T^j)$, και η Φ είναι μια ντετερμινιστική συνάρτηση, που συνδέει την απολαβή απο το παράγωγο συμβόλαιο με την τιμή της μετοχής. Η ακριβής μορφή της συνάρτησης Φ εξαρτάται απο το είδος του παραγώγου το οποίο θέλουμε να αποτιμήσουμε. Για παράδειγμα, αν θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς, θα επιλέξουμε $\Phi(s) = (s-K)^+$, ενώ αν θέλουμε να αποτιμήσουμε ένα δικαίωμα πώλησης θα επιλέξουμε $\Phi(s) = (K-s)^+$.

Συνεπώς το οπισθοδρομικό επαναληπτικό σχήμα

$$\begin{aligned} V_n^j &= \frac{1}{1+r}[\pi_1 V_{n+1}^{j+1} + \pi_2 V_{n+1}^j] \\ V_T^j &= \Phi(S_T^j) \end{aligned} \tag{4.9}$$

μπορεί να μας δώσει την τιμή του παραγώγου οποιαδήποτε χρονικη στιγμή και σε οποιαδήποτε κατάσταση του κόσμου. Το σχήμα αυτό αν είναι γνωστές οι παράμετροι r, π_1, π_2 (ή αντίστοιχα οι παράμετροι r, u, d μπορεί να επαναληφθεί για $j = 0, 1, \cdots, n$ και $n = 0, 1, \cdots, T-1$, και να δώσει τις τιμές του παραγώγου σε οποιαδήποτε χρονική στιγμή και σε οποιαδήποτε κατάσταση του κόσμου.

Παράδειγμα 4.3.1 Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς (call option) επάνω σε μία μετοχή, η οποία σε κάθε χρονική περίοδο μπορεί να παρουσιάζει μεταβολή κατά $u = 1.05$ ή κατά $d = 0.95$. Ας υποθέσουμε για χάριν απλότητας ότι μας ενδιαφέρει να βρούμε την τιμή του δικαιώματος σε τρείς χρονικές περιόδους την περίοδο $t = 0$, $t = 1$ και $t = 2$. Συνεπώς, $T = 2$. Ας υποθέσουμε επίσης ότι η τιμή της μετοχής ξεκινάει σήμερα ($t = 0$) από $S_0 = 10$. Η μετοχή λοιπόν μπορεί να πάρει τις εξής πιθανές τιμές τις διαφορετικές χρονικές στιγμές:

$$t = 0, \;\; S_0 = S_0^0 = 10$$
$$t = 1, \;\; S_1^0 = 9.5, \;\; ή \;\; S_1^1 = 10.5$$
$$t = 2, \;\; S_2^0 = 9.025, \;\; ή \;\; S_2^1 = 9.975, \;\; ή \;\; S_2^2 = 11.025$$

Αν το δικαίωμα αγοράς έχει λήξη την χρονική στιγμή $T = 2$ και τιμή εξάσκησης $K = 9.8$ τότε οι απολαβές απο το συμβόλαιο αυτό την χρονικη στιγμή $T = 2$ θα είναι αντίστοιχα

$$V_2^0 = 0, \;\; ή \;\; V_2^1 = 0.175, \;\; ή \;\; V_2^2 = 1.225$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας υποθέσουμε ότι $r = 0$. Εύκολα βρίσκουμε ότι οι ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο πιθανότητες είναι $\pi_1 = \pi_2 = 0.5$. Η τιμή του παραγώγου θα δίνεται λοιπόν απο το οπισθοδρομικό επαναληπτικό σχήμα

$$V_n^j \;\; = \;\; 0.5V_{n+1}^{j+1} + 0.5V_{n+1}^j$$

με τελική συνθήκη

$$V_2^0 = 0, \;\; ή \;\; V_2^1 = 0.175, \;\; ή \;\; V_2^2 = 1.225$$

Έτσι λοιπόν την χρονική στιγμή $t = 1$ η τιμή του παραγώγου εξαρτάται απο την κατάσταση του κόσμου που έχει πραγματοποιηθεί και είναι

$$V_1^0 = 0.0875, \;\; ή \;\; V_1^1 = 0.7$$

Βλέπουμε ότι αν στην ανοδική κατάσταση του κόσμου την χρονική στιγμή $t = 1$ η τιμή του παραγώγου είναι μεγαλύτερη απ΄ ότι η τιμή του στην καθοδική κατάσταση του κόσμου. Αυτό γιατί στην κατάσταση του κόσμου αυτή, οι αναμενόμενες απολαβές απο το παράγωγο την χρονική στιγμή $t = 2$ είναι μεγαλύτερες απ΄ ότι στην καθοδική κατάσταση του κόσμου.
Επαναλαμβάνοντας την διαδικασία για μία ακόμη χρονικη στιγμή βλέπουμε ότι

$$V_0^0 = 0.3937$$

Στην περίπτωση πολλών χρονικών περιόδων η επαναληπτική αυτή διαδικασία μπορεί να γινει με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή.

Επίσης, μπορεί να χρησιμοποιήσουμε και την βαθμονόμηση του διωνυμικού μοντέλου απο την χρονοσειρά των αποδόσεων της τιμής της μετοχής, χρησιμοποιώντας την μεταβλητότητα της μετοχής, και εφαρμόζοντας την επαναληπτική διαδικασία (4.9) να κάνουμε την τιμολόγηση του παραγώγου συμβολαίου, σε ‘πραγματικό’ χρόνο.

Παράδειγμα 4.3.2 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα παράγωγο συμβόλαιο επάνω στην μετοχή του παραδείγματος ;;. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το παράγωγο συμβόλαιο λήγει σε 3 μήνες και ότι γνωρίζουμε την ετήσια μεταβλητότητα. Η απόδοση του βέβαιου τίτλου θεωρούμε ότι είναι $r = 5\%$ετησίως.
Αν θέλουμε να χωρίσουμε το διάστημα αυτό σε 3 περιόδους τότε η κάθε περίοδος θα έχει διάρκεια ενός μηνός και το δt θα αντιστοιχεί σε $\delta t = \frac{1}{12} = 0.0833$ έτους. Συνεπώς οι παράμετροι του μοντέλου θα είναι $u = exp(\sigma\sqrt{\delta t}) = exp(0.1865\sqrt{0.0833}) = 1.0553$ ενώ $d = 1/u = 0.9476$. Η πιθανότητα ανοδικής κίνησης κάτω απο το μέτρο που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο θα δίνεται απο την σχέση $p = \frac{exp(r*\delta t)-d}{u-d} = 0.5253$.
Αντίστοιχα μπορούμε να κάνουμε παρόμοιους υπολογισμούς αν θεωρήσουμε ότι θέλουμε να χωρίσουμε το διάστημα αυτό σε π.χ 6 περιόδους. Στην περίπτωση αυτή το $\delta t = 0.0417$ και αντιστοίχως υπολογίζονται τα u, d και p.

Βέβαια το διωνυμικό μοντέλο μπορεί να επιλυθεί και αναλυτικά και να μας δώσει την τιμή οποιουδήποτε συγκυριακού συμβολαίου το οποίο την καταληκτική χρονική στιγμή T δίνει απολαβές V_j^T. Μπορεί κανείς να δείξει με την μέθοδο της επαγωγής ότι η τιμη του συμβολαίου την χρονικη στιγμή n και στην κατάσταση του κόσμου j δίνεται από την σχέση

$$V_n^j = \frac{1}{(1+r)^{T-n}} \sum_{l=0}^{T-n} C_l^{T-n} \pi_1^l \pi_2^{T-n-l} V_T^{j+l}$$
$$0 \leq n \leq T, \;\; j = 0, 1, \cdots, n$$

όπου $C_l^{T-n} = \left(\frac{(T-n)!}{l!(T-n-l)!}\right)$ είναι ο διωνυμικός συντελεστής. Ο τύπος αυτός μας λέει ότι η τιμή του συμβολαίου την χρονικη στιγμή n στην κατάσταση του κόσμου j είναι η αναμενόμενη απολαβή απο το συμβόλαιο στην λήξη του όπως αυτή μπορεί να εκτιμηθεί την χρονικη στιγμή αυτή και στην δεδομένη κατάσταση του κόσμου. Οι όροι $\pi_1^l \pi_2^{T-n-l}$ δίνουν την πιθανότητα ενός μονοπατιού το οποίο έχει l ανοδικές κινήσεις και $T-n-l$ καθοδικές κινήσεις, ενώ ο διωνυμικός συντελεστής μας δίνει τον αριθμό όλων αυτών των πιθανών μονοπατιών.
Για την τιμή την χρονικη στιγμή $t = 0$ ο τύπος αυτός απλοποιείται κατά πολύ θέτοντας $n = 0, j = 0$.

4.3.2 Αντιστάθμιση και τα ελληνικά γράμματα (*greeks*)

Ας ξαναγυρίσουμε τώρα στην τιμολόγηση του παραγώγου συμβολαίου που είδαμε στην παράγραφο 4.2.1, με την μέθοδο της αναπαραγωγής του συμβολαίου απο ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται απο τον βέβαιο τίτλο και την μετοχή.

Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να αναπαράγουμε το συμβόλαιο σε κάθε χρονική στιγμή και σε κάθε κατάσταση του κόσμου, αλλά με μια μικρή παραλλαγή. Θα θεωρήσουμε λοιπόν ότι ο πωλητής του συμβολαίου, ο οποίος στην λήξη του έχει την υποχρέωση $-F$, επιθυμεί να κρατάει παράλληλα με την ανοιχτή του θέση στο παράγωγο συμβόλαιο και κάποια θέση στην μετοχή έτσι ώστε να μπορεί να ανταπεξέλθει στις υποχρεώσεις του. Ένα ακραίο παράδειγμα, είναι αν έχει πωλήσει ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής (ανοιχτή θέση στο δικαίωμα αγοράς) να έχει στην κατοχή του κάθε χρονική στιγμή και ένα τίτλο της μετοχής, έτσι ώστε αν ο αγοραστής (και κάτοχος) του δικαιώματος αγοράς θελήσει να το εξασκήσει, ο πωλητής να έχει στην διάθεση του την μετοχή και να την παραδώσει στον κάτοχο του δικαιώματος έναντι του αντιτίμου K. Αυτό θα τον σώσει απο το να χρειαστεί να αγοράσει την μετοχή στο χρηματιστήριο έναντι του ποσού $S(T) = S_T > K$ και μετά να το πωλήσει στον κάτοχο του δικαιώματος έναντι του ποσού K. Η στρατηγική αυτή όμως ναι μεν καλύπτει τον πωλητή του δικαιώματος έναντι της υποχρέωσης του, αλλά δεν είναι απαραίτητα και η καλύτερη δυνατή στρατηγική αφού δεν χρειάζεται απαραίτητα να κρατήσει στην κατοχή του την μετοχή για όλο το χρονικό διάστημα $[t, T]$, αλλά μπορεί να εκμεταλλευτεί το ποσό αυτό που αντιστοιχεί στην μετοχή ενδεχομένως με πιο άποδοτικό τρόπο.

Συμφωνούμε σε κάθε περίπτωση ότι ο πωλητής ενός δικαιώματος αναλαμβάνει κάποιο κίνδυνο, ο οποίος σχετίζεται με τις διακυμάνσεις της μετοχής επάνω στην οποία είναι γραμμένο το δικαίωμα. Αν για παράδειγμα το δικαίωμα είναι ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής, ο πωλητής του δικαιώματος αναλαμβάνει τον κίνδυνο της περιπτώσης ανόδου της τιμής της μετοχής, οπότε και θα πρέπει να διαθέσει την μετοχή στον κάτοχο του δικαιώματος έναντι χαμηλής τιμής σε σχέση με την τρέχουσα τιμή της στο χρηματιστήριο αξιών. Στην περίπτωση βέβαια καθόδου της τιμής της μετοχής ο πωλητής του δικαιώματος θα βγεί κερδισμένος, εφόσον θα έχει λάβει το αντίτιμο για την πώληση του δικαιώματος απο τον αγοραστή αλλά αυτός δεν θα το εξασκήσει ποτέ, μην ζητώντας λοιπόν καμία υποχρέωση απο τον πωλητή. Ο κίνδυνος λοιπόν απο την πώληση ενός δικαιώματος, είναι ακριβώς αυτή η αβεβαιότητα στην χρηματορροή του πωλητή, που οφείλεται στις διακυμάνσεις της τιμής της μετοχής. Ένα ερώτημα λοιπόν πολύ ενδιαφέρον και ουσιαστικό είναι

> Θα μπορούσε ο πωλητής του δικαιώματος να διατηρεί παράλληλα και ένα χαρτοφυλάκιο απο τους υπόλοιπους τίτλους στην αγορά (βέβαιος τίτλος και μετοχή) έτσι ώστε η συνολική του θέση να μην υπόκειται στην αβεβαιότητα αυτή που επάγεται απο την διακύμανση της τιμής της μετοχής;

Η απάντηση το ερώτημα αυτό είναι και η κεντρική ιδέα της διαχείρισης κινδύνου.

Επειδή η τιμή του δικαιώματος εξαρτάται απο την τιμή της μετοχής, βλέπουμε ότι υπάρχει εξάρτηση (με την έννοια της θεωρίας των πιθανοτήτων) των τυχαίων μεταβλητών που περιγράφουν την τιμή του δικαιώματος και την τιμή της μετοχής. Κατά συνέπεια, με κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό αυτών των δύο τυχαίων μεταβλητων (δηλαδή με κατάλληλο χαρτοφυλάκιο) περιμένουμε να μπορούμε να εξουδετερώσουμε την επίδραση των διακυμάνσεων της μετοχής στην συνολική αξία του χαρτοφυλακίου του πωλητή του παραγώγου. Ας δούμε πως μπορεί να γίνει αυτό.

Σε κάθε κόμβο του δέντρου, (n, j), επιθυμούμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο που αποτελείται από την μετοχή και το παράγωγο (σε ανοιχτή θέση) το οποίο σε κάθε πιθανή μελλοντική κατάσταση του κόσμου, $(n+1, j+1)$ ή $(n+1, j)$, να έχει την ίδια αξία, δηλαδή να μην περιέχει κίνδυνο. Αν η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου αυτού είναι Π την χρονική στιγμή n την χρονική στιγμή $n+1$ θα έχει αξία $(1+r)\Pi$ (εφόσον δεν περιέχει κίνδυνο, αλλιώς θα είχαμε ευκαιρίες για arbitrage).

Ας υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αυτό αποτελείται από μία ανοικτή θέση στο παράγωγο (χωρίς βλάβη της γενικοτητας ας πούμε ότι το παράγωγο αυτό είναι ένα δικαίωμα αγοράς) και από Δ κομματια της μετοχής. Η συνολική αξία θα είναι $\Pi = \Delta S - V$. Αυτή εν γένει θα εξαρτάται απο την κατάσταση του κόσμου στην οποία βρισκόμαστε, συνεπώς θα την συμβολίζουμε ως

$$\Pi_n^j = \Delta_n^j S_n^j - V_n^j,$$

όπου Δ_n^j είναι η θέση στην μετοχή που έχει ο επενδυτής αυτός στην κατάσταση του κόσμου (n, j), στην οποία η τιμή της μετοχής θα είναι S_n^j. Ο επενδυτής κρατάει αυτή την θέση στην μετοχή και την μεταφέρει την χρονική στιγμή $n+1$.

Την χρονική στιγμή $n+1$ το χαρτοφυλάκιο αυτό θα έχει αξία

$$\begin{array}{c} \Pi_{n+1}^j = \Delta_n^j S_{n+1}^j - V_{n+1}^j \quad \text{στην καθοδική κατάσταση} \\ \text{ή} \\ \Pi_{n+1}^{j+1} = \Delta_n^j S_{n+1}^{j+1} - V_{n+1}^{j+1} \quad \text{στην ανοδική κατάσταση} \end{array} \tag{4.10}$$

όπου βέβαια $S_{n+1}^j = d\, S_n^j$ και $S_{n+1}^{j+1} = u\, S_n^j$. Παρατηρούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε το Δ_n^j έτσι ώστε

$$\Pi_{n+1}^j = \Pi_{n+1}^{j+1}.$$

Πράγματι, αν

$$\Delta_n^j S_{n+1}^j - V_{n+1}^j = \Delta_n^{j)} S_{n+1}^{j+1} - V_{n+1}^{j+1}$$

δηλαδή

$$\Delta_n^j = \frac{V_{n+1}^{j+1} - V_{n+1}^j}{S_{n+1}^{j+1} - S_{n+1}^j} \tag{4.11}$$

το χαρτοφυλάκιο αυτό δεν περιέχει κίνδυνο εφόσον σε κάθε κατάσταση του κόσμου θα έχει την ίδια αξία. Θα πρέπει βέβαια να τονίσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αυτό δεν περιέχει κίνδυνο μεταξύ των χρονικών στιγμών n και $n+1$, και ακόμα πιο σωστά μεταξύ των κόμβων (n, j) και $(n+1, j+1)$, $(n+1, j)$. Μετά την χρονικη αυτή στιγμή και σε άλλη κατάσταση του κόσμου, το χαρτοφυλάκιο αυτό θα πρέπει να αναδιαρθρωθεί έτσι ώστε να διατηρήσει την ιδιότητα αυτή.

Η αξία χαρτοφυλάκιου το οποίο δεν περιέχει κίνδυνο θα πρέπει να αυξάνει με τον ίδιο ρυθμό όπως και ο βέβαιος τίτλος (ομόλογο). Εφόσον το χαρτοφυλάκιο αυτό δεν περιέχει κίνδυνο (είναι ισοδύναμο με τον βέβαιο τίτλο) μεταξύ των χρονικών στιγμων n και $n+1$ θα πρέπει να έχει και τις ίδιες αποδόσεις με τον βέβαιο τίτλο. Συνεπώς,

$$\Delta_n^j S_{n+1}^j - V_{n+1}^j \quad = \quad (1+r)(\Delta_n^j S_n^j - V_n^j)$$

οπότε μπορούμε και να υπολογίσουμε τα V_n^j από τα V_{n+1}^j και V_{n+1}^{j+1}. Όπως είναι αναμενόμενο η σχέση αυτή μετά την αντικατάσταση του Δ_n^j απο την σχέση (4.11) θα μας δώσει την σχέση

$$V_n^j = \frac{1}{1+r}[\pi_1 V_{n+1}^{j+1} + \pi_2 V_{n+1}^j]$$

δηλαδή ακριβώς την ίδια σχέση (4.8) την οποία πήραμε και στην περίπτωση που χρησιμοποιήσαμε το μέτρο που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο.

Η αντιμετώπιση αυτή όμως μας δίνει και κάτι πολύ σημαντικό πέρα απο την τιμολόγηση του παραγώγου. Το Δ είναι μία πολύ χρήσιμη ποσότητα που μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκια τα οποία αναπαράγουν το παράγωγο συμβόλαιο. Επίσης μας επιτρέπει να υπολογίζουμε τι ποσό πρέπει να έχουμε στην μετοχή έτσι ώστε να μπορούμε να ασφαλίζουμε τις θέσεις που έχουμε σε ορισμένα παράγωγα συμβόλαια. Τέλος, απο τον τύπο (4.11) φαίνεται ότι το Δ μπορεί να ερμηνευθεί ως η μεταβολή της αξίας του παραγώγου συμβολαίου λόγω της μεταβολής της τιμής της μετοχής (λόγω διακυμάνσεων). Υπο μία έννοια λοιπόν, το Δ μπορεί να ερμηνευθεί και σαν η ευαισθησία (sensitivity) της αξίας του παραγώγου ως προς την τρέχουσα τιμή της μετοχής. Το Δ μπορεί να υπολογιστεί επάνω στο διωνυμικό δέντρο κάνοντας απευθείας χρήση του τύπου (4.11).

Παράδειγμα 4.3.3 Θα υπολογίσουμε τα Δ στο παράδειγμα 4.3.1. Την χρονική στιγμή $t = 1$ τα Δ ανάλογα με την κατάσταση του κόσμου θα είναι

$$\Delta_1^0 = \frac{V_2^1 - V_2^0}{S_2^1 - S_2^0} = \frac{0.175 - 0}{9.975 - 9.025} = 0.1842, \text{ ή } \Delta_1^1 = \frac{V_2^2 - V_2^1}{S_2^2 - S_2^1} = \frac{1.225 - 0.175}{11.025 - 9.975} = 0.9048$$

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το Δ θα είναι

$$\Delta_0^0 = \frac{V_1^1 - V_1^0}{S_1^1 - S_1^0} = \frac{0.7 - 0.0875}{10.5 - 9.5} = 0.6125$$

Όπως είδαμε και παραπάνω το Δ μπορεί να ερμηνευθεί σαν το ποσό της μετοχής που θα πρέπει να κρατήσει αυτός ο οποίος έχει πουλήσει ένα τέτοιο παράγωγο συμβόλαιο έτσι ώστε να καλυφθεί απο την θέση που έχει λάβει. Βλέπουμε ότι το Δ είναι μεγαλύτερο στην κατάσταση $(1,1)$. Αυτό είναι πολύ λογικό εφόσον στην κατάσταση αυτή υπάρχει και η μεγαλύτερη πιθανότητα να εξασκηθεί το παράγωγο συμβόλαιο αγοράς, οπότε και ο πωλητής του θα πρέπει να έχει ένα κομμάτι της μετοχής για να το δώσει στον αγοραστή του συμβολαίου.

Το Δ είναι μία ποσότητα απο μια σειρά ποσοτήτων που εκφράζουν την ευαισθησία της αξίας ενός παραγώγου συμβολαίου ως προς τους παράγοντες που την επηρεάζουν, όπως για παράδειγμα η τιμή της μετοχής, η μεταβλητότητα της μετοχής κλπ. Οι ποσότητες αυτές, ονομάζονται ελληνικά γράμματα (greeks) και παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στον σχεδιασμό χαρτοφυλακίων με παράγωγα συμβόλαια και στην διαχείριση κινδύνου. Θα μελετήσουμε τις ποσότητες αυτές με μεγαλύτερη λεπτομέρεια στο επόμενο κεφάλαιο.

4.3.3 Τιμολόγηση παραγώγων με την μέθοδο $Monte - Carlo$

Ο υπολογισμός της τιμής των παραγώγων προιόντων αντί να γίνει με την χρήση του δυωνυμικού δένδρου μπορεί να γίνει με την χρήση της μεθόδου Monte-Carlo. Στην μέθοδο αυτή παράγουμε πολλές πραγματοποιήσεις (τροχιές) της διαδικασίας των τιμών, για την κάθε μιά από αυτές τις τροχιές υπολογίζουμε την τιμή που παίρνει η απολαβή από το παράγωγο συμβόλαιο, προεξοφλούμε κατάλληλα και τελικά παίρνουμε την μέση τιμή επάνω σε όλες τις πιθανές τροχιές. Η μέση τιμή αυτή θα πρέπει να προσεγγίζει την τιμή για το παράγωγο συμβόλαιο που βρήκαμε με την χρήση του διωνυμικού δένδρου.

Τονίζουμε ότι για την σωστή χρήση αυτής της μεθόδου θα πρέπει να παράγουμε τροχιές της στοχαστικής διαδικασίας των τιμών για τις οποίες η πιθανότητα ανοδικής ή καθοδικής κίνησης να δίνεται απο το μέτρο που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο.

Ας δούμε ένα ένα τα παραπάνω βήματα:

1. Το πρώτο βήμα είναι η παραγωγή των τυχαίων μεταβλητών H_n. Όπως αναφέραμε, οι τυχαίες αυτές μεταβλητές είναι ανεξάρτητες και όμοια κατανεμημένες και η κατανομή τους θα πρέπει να είναι η

$$P(H_n = u) = \pi_1, \quad P(H_n = d) = \pi_2 = 1 - \pi_1$$

όπου π_1 και π_2 είναι οι ουδέτερες ως προς τον κίνδυνο πιθανότητες.

Η παραγωγή των διωνυμικά κατανεμημένων αυτών τυχαίων μεταβλητών μπορεί να γίνει με την χρήση της ομοιόμορφης κατανομής στο διάστημα $[0,1]$. Ας θεωρήσουμε την τυχαία μεταβλητή $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ η οποία είναι κατανεμημένη ομοιόμορφα στο διάστημα $[0,1]$. Η πιθανότητα $P(U < \pi_1) = \pi_1$. Συνεπώς, αν πάρουμε N το πλήθος παρατηρήσεις απο την ομοιόμορφη κατανομή, $U(i), \imath = 1, \cdots N$, η πιθανότητα κάποιες απο αυτές να παίρνουν τιμές μικροτερες απο την τιμή π_1 είναι π_1. Αν λοιπόν τα $U(i)$ για τα οποία $U(i) < \pi_1$ τα αντικαταστήσουμε με u και τα $U(i)$ για τα οποία $U(i) > \pi_1$ τα αντικαταστήσουμε με d τότε παίρνουμε μία νέα τυχαία μεταβλητή H οι παρατηρήσεις της οποίας μπορεί να πάρουν δύο μόνο τιμές, την τιμή u με πιθανότητα π_1 και την τιμή d με πιθανότητα π_2.

2. Είμαστε τώρα έτοιμοι να παραγουμε προσομοιώσεις της τροχιάς της στοχαστικής διαδικασίας των τιμών. Αυτό θα γίνει με το επαναληπτικό σχήμα $S_{n+1} = S_n H_{n+1}$, όπου H_n θα είναι παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής που κατασκευάσαμε στο προηγούμενο βήμα.

Η κατασκευή λοιπόν μιάς τροχιάς (μιάς πραγματοποίησης) της διαδικασίας των τιμών θα δίνεται απο τον επαναληπτικό βρόχο

$$\begin{aligned}
&S(1) = S0; \\
&for\ i = 1 : N - 1 \\
&S(i+1) = h(i+1) * S(i); \\
&end
\end{aligned}$$

Το $S(i)$ θα συμβολίζει την τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή i επάνω στο συγκεκριμένο μονοπάτι. Το $S(i)$ θα είναι λοιπόν η πραγματοποίηση μιας τυχαίας μεταβλητής

3. Για τη συγκεκριμένη τροχιά μπορούμε να βρούμε την απολαβή που θα έχουμε απο το ευρωπαϊκό παράγωγο, η οποία θα είναι μιά συνάρτηση της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή T δηλαδή της τυχαίας μεταβλητής $S(T)$. Η μορφή της συνάρτησης αυτής εξαρτάται απο τον τύπο του παραγώγου, δηλαδή θα είναι μία συνάρτηση

της μορφής $F(S(T))$. Ο υπολογισμός της τιμής αυτής μπορεί να γίνει πολύ εύκολα εφόσον γνωρίζουμε την $S(T)$ απο το παραπάνω βήμα. Συνεπώς η απολαβή απο το παράγωγο θα είναι η τυχαία μεταβλητή $P = F(S(T))$.

4. Για τον υπολογισμο της τιμής p του παραγώγου την χρονική στιγμή 0 θα πρέπει να υπολογίσουμε την μέση τιμή $E_Q[P]$. Θα χρησιμοποιήσουμε ως εκτιμήτρια της μέσης τιμής το δειγματικό μέσο δηλαδή

$$E_Q[P] \simeq \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} P_j$$

όπου P_j, $j = 1, \cdots, M$, είναι διαφορετικές πραγματοποιήσεις της τυχαίας μεταβλητής P που αντιστοιχεί στις απολαβές απο το παράγωγο.

5. Για να πάρουμε τις διαφορετικές αυτές πραγματοποιήσεις θα πρέπει να επαναλάβουμε τα βήματα 1-3 για M φορές και απο τα διαφορετικά απολέσματα που θα βρούμε για τα P_j να υπολογίσουμε το άθροισμα που θα δώσει την προσέγγιση της μέσης τιμής.

   Η επανάληψη των βημάτων αυτών για M φορές μπορεί να γίνει με το να βάλουμε τα βήματα αυτά σε ένα επαναληπτικό βρόχο.

Ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα ερωτήματα τα οποία σχετίζονται με την σύγκλιση της μεθόδου Monte-Carlo. Το βασικό θέμα εκεί είναι ότι προσεγγίζουμε (εκτιμούμε) την τυχαία μεταβλητή $E_Q[P]$ με την χρήση της εκτιμήτριας $E_Q[P] \simeq \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} P_j$. Κλασσικά θεωρήματα της θεωρίας πιθανοτήτων (π.χ. διάφορες μορφές του νόμου των μεγάλων αριθμών) μας εξασφαλίζουν κάτω απο αρκετά γενικές συνθήκες π.χ. ανεξαρτησία των P_j και $E[P_j] < \infty$, ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Q_M = \frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} P_j$ έχει όριο σχεδόν βέβαια[2] και ότι το όριο αυτό είναι η μέση τιμή $E_Q[P]$. Το παραπάνω αποτέλεσμα λοιπόν μας εξασφαλίζει ότι αν $M \to \infty$ τότε το άθροισμα $\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} P_j$ προσεγγίζει όσο θέλουμε καλά την $E_Q[P]$. Βέβαια στην πράξη, δεν μπορούμε ποτέ να φτάσουμε στο όριο των άπειρων παρατηρήσεων. Αυτό μας οδηγεί στην ανάγκη να απαντήσουμε την ερώτηση του πόσο σφάλμα θα έχουμε στην εκτίμηση του $E_Q[P]$ αν πάρουμε σαν προσέγγιση του το άθροισμα $\frac{1}{M}\sum_{j=1}^{M} P_j$ για M μεγάλο αλλά όχι άπειρο.

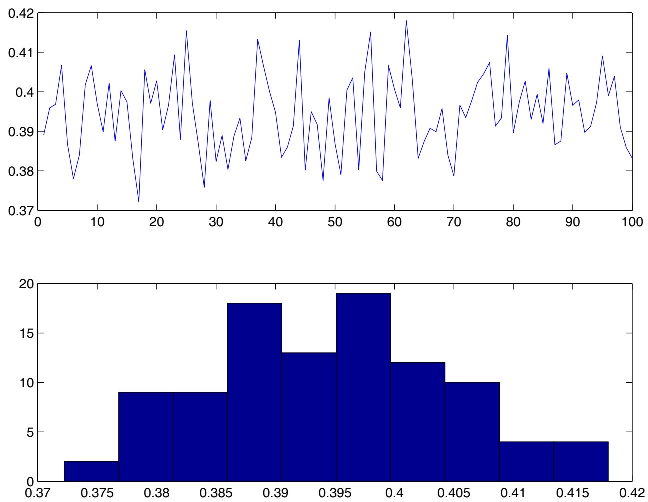
Τέτοιου τύπου εκτιμήσεις μπορεί να μας δωθούν π.χ. απο το κεντρικο οριακό θεώρημα σύμφωνα με το οποίο η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $Z_n = \frac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, όπου $S_n = \sum_j^n P_j$, $\mu = E_Q[P_j]$, $\sigma^2 = Var(P_j)$ συγκλίνει σε κατανομή καθώς το $n \to \infty$ στην τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Το θεώρημα αυτό μας δινει κάποιες εκτιμήσεις για το σφάλμα της προσέγγισης αυτής και μας λέει ότι εν γένει το σφάλμα της προσέγγισης θα πηγαίνει σαν το $\frac{1}{\sqrt{M}}$ για M μεγάλο αλλά όχι άπειρο.

Παράδειγμα 4.3.4 Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε με την μέθοδο Monte-Carlo την τιμή την χρονικη στιγμή $t = 0$ του συμβολαίου αγοράς το οποίο περιγράψαμε στο παράδειγμα 4.3.1. Αν π.χ. τρέξουμε την μέθοδο Monte-Carlo για το συμβόλαιο αυτό παίρνοντας $M = 2000$ βρίσκουμε ότι η τιμή του παραγώγου για την χρονικη στιγμή $t = 0$ είναι 0.3765. Παρατηρούμε όμως ότι αν τρέξουμε την μέθοδο Monte-Carlo άλλη μία φορά θα πάρουμε τιμή παραμφερή π.χ. 0.3875. Η τιμή λοιπόν που θα μας δώσει η μέθοδος αυτή θα είναι μία τυχαία μεταβλητή!

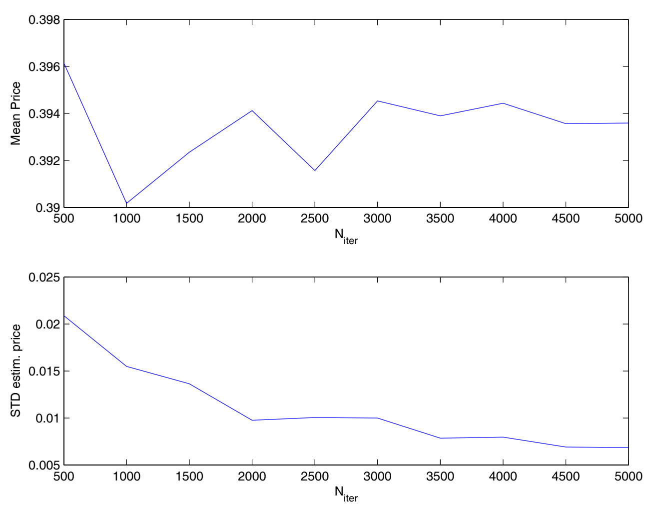
Στο σχήμα 4.1 σχεδιάζουμε την εκτίμηση για την τιμή ενός συμβολαίου αγοράς για $M = 2000$, την οποία έχουμε επαναλάβει 100 φορές. Παρατηρούμε ότι κάθε φορά παίρνουμε και μία διαφορετική εκτίμηση, και η εκτίμηση αυτή είναι μία τυχαία μεταβλητή η οποία έχει μία κατανομή που μοιάζει όπως δείχνει το ιστόγραμμα με την κανονική κατανομή. Η μέση τιμή της εκτιμησης είναι 0.3944 ενώ η τυπική απόκλιση είναι 0.0101. Ας υποθέσουμε τώρα ότι κάνουμε αυτό αλλά για διαφορετικές τιμές του M. Στο σχήμα 4.2 δείχνουμε το πως μεταβάλλεται η μέση τιμή της εκτίμησης για την τιμή του παραγώγου σαν συνάρτηση της τιμής M καθώς και η τυπική απόκλιση των διαφορετικών εκτιμήσεων καθώς μεταβάλλεται το M. Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή συγκλίνει για μεγάλα M στην τιμή και η τυπική απόκλιση μικραίνει καθώς το M μεγαλώνει πράγμα που σημαίνει ότι η μέθοδος Monte-Carlo δίνει όλο και καλύτερες εκτιμήσεις καθώς το M μεγαλώνει. Τονίζουμε ότι η εκτίμηση της τιμής του παραγώγου απο το διωνυμικο μοντέλο είναι 0.3937.

Η μέθοδος Monte-Carlo χρησιμοποιείται συχνά για την τιμολογηση περίπλοκων παραγώγων προιόντων αλλά συνήθως είναι πιο αργή και συκγλίνει πιο δύσκολα από την μέθοδο με το διωνυμικό δέντρο.

[2] Υπενθυμίζουμε ότι το σχεδόν βέβαια σημαίνει ότι μπορεί να υπάρχουν γεγονοτα $\omega \in A \subset \Omega$ για τα οποία η ακολουθία $X_M(\omega)$ **δεν** συγκλίνει στον $E_Q[P]$ για $M \to \infty$ αλλά τα γεγονότα αυτά είναι τέτοια ώστε $Q(A) = 0$ δηλαδή συμβαίνουν με πιθανότητα 0.



Σχήμα 4.1: Ορισμένες πραγματοποιήσεις της εκτίμησης της τιμής για το παράγωγο για $M = 2000$.



Σχήμα 4.2: Η αναμενόμενη τιμή απο την εκτίμηση $Monte - Carlo$ και η τυπική απόκλιση για διαφορετικές τιμές του M.

Κεφάλαιο 5

Τιμολόγηση παραγώγων προιόντων II

5.1 Το μοντέλο $Black - Scholes$

Το μοντέλο Black-Scholes είναι ένα μοντέλο σε συνεχή χρόνο για την αποτίμηση παραγώγων συμβολαίων. Το μοντέλο αυτό μπορεί να θεωρηθεί ότι είναι η γενίκευση του δυωνυμικού μοντέλου αν θεωρήσουμε ότι η χρονικη διάρκεια μεταξύ συναλλαγών $\delta t \to 0$ και ο αριθμός των περιόδων συναλλαγής $N \to \infty$ αλλά κατά τέτοιο τρόπο ώστε $T = N\delta t$ να είναι πεπερασμένο. Το T δίνει το χρονικό διάστημα στο οποίο γίνονται οι συναλλαγές π.χ. $T = 1$ έτος. Η βασική λοιπόν υπόθεση για την εξέλιξη των τιμών της μετοχής κάτω απο το μοντέλο αυτό είναι ότι η τιμή της μετοχής την χρονική στιγμή t είναι μια τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κατανομή $ln(S(t)) \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$, δηλαδή την λογαριθμικοκανονική κατανομή.

Στο όριο αυτο μπορούμε να πάρουμε αναλυτικούς τύπους (σε κλειστή μορφή) για την τιμή των διαφόρων παραγώγων συμβολαίων π.χ. το δικαίωμα πώλησης και το δικαίωμα αγοράς κάποιων μετοχών. Για να επιτύχουμε αυτό, θα πρέπει να κάνουμε τον υπολογισμό της καλύτερης δυνατής πρόβλεψης για την απολαβή απο το παράγωγο συμβόλαιο, κάτω απο το μέτρο που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί αυστηρά μαθηματικά, αλλά εδώ θα αρκεστούμε να αναφέρουμε τον τύπο τιμολόγησης $P(t) = \mathbb{E}_Q[(1+r)^{-(T-t)}F \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_Q[(1+r)^{-(T-t)}F \mid S(t) = s]$ τον οποίο και αποδείξαμε στο διωνυμικό μοντέλο, και να μεταφέρουμε τις έννοιες αυτές στο συνεχές όριο.

Ένα λεπτό σημείο είναι να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε με το μέτρο που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο στο συνεχές όριο. Ας θυμηθούμε ότι το μέτρο αυτό αντιστοιχεί στην κατανομή πιθανότητας για τις αποδόσεις της μετοχής, η οποία είναι τέτοια ώστε η αναμενόμενη απόδοση της μετοχής (κάτω απο αυτή την κατανομή) να είναι ίση με την απόδοση του βέβαιου τίτλου. Στο συνεχές όριο, μας ενδιαφέρει λογαριθμική απόδοση της μετοχής, δηλαδή η μέση τιμή της ποσότητας $ln(S(t))$. Αυτή θα πρέπει κατά μέση τιμή να είναι ίση προς $r\,t$. Κατά συνέπεια, κάτω απο το μέτρο που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο θα ισχύει $ln(S(t)) \sim N(rt, \sigma^2 t)$. Ο καθορισμός τόυ μέτρου που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο με αυτό τον τρόπο είναι αυθαίρετος και διαισθητικός, αλλά μπορεί γραφεί με αυστηρό τρόπο χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα της στοχαστικής ανάλυσης σχετικά με την αλλαγή μέτρου, το θεώρημα του Girsanov.

Άν η μετοχή την χρονική στιγμή t παίρνει την τιμή $S(t) = s$, και η αναμενόμενη λογαριθμική απόδοση της μετοχής είναι $r\,t$ τότε η κατανομή της $S(T)$ θα είναι $ln(S(T)) = ln(s) + ln(Z)$ όπου $ln(Z) \sim N(r(T-t), \sigma^2(T-t))$. Αυτό μπορεί να φανεί και απο το

$$S(T) = S(t)\,\exp(r(T-t) + \sigma(B(T) - B(t))) = s\,\exp(r(T-t) + \sigma(B(T) - B(t))).$$

Με βάση τα παραπάνω μπορούμε γράψουμε

$$P(t) = e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}_Q[F \mid S(t) = s] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}[\Phi(e^s e^Z)]$$

όπου $Z \sim N(r(T-t), \sigma^2(T-t))$. Η τελευταία μέση τιμή μπορεί να γραφεί σαν ένα ολοκλήρωμα

$$P(t;s) = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(e^s e^z) \frac{1}{\sqrt{2\pi(T-t}} exp\left(-\frac{z^2}{2(T-t)}\right) dz \tag{5.1}$$

όπου εμφανίζουμε ρητά την τιμή s γράφοντας $P(t;s)$. Το ολοκλήρωμα (5.1) μπορεί να υπολογιστεί αν γνωρίζουμε την ακριβή μορφή του παραγώγου, η οποία και καθορίζει την συνάρτηση Φ, κρατώντας σαν παράμετρο την τιμή s.

Στην περίπτωση όπου θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα αγοράς θα θέσουμε $\Phi(s) = (s-K)^+$, ενώ στην περίπτωση όπου θέλουμε να τιμολογήσουμε ένα δικαίωμα πώλησης θα θέσουμε $\Phi(s) = (K-s)^+$. Για τις περιπτώσεις αυτές, μπορούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα, και μετά απο αρκετή και επώδυνη άλγεβρα καταλήγουμε ότι:

- Η τιμή του δικαιώματος αγοράς μιάς μετοχής με τιμή άσκησης (strike) K και λήξη T, την χρονική στιγμή t $(t < T)$ και άν η τιμή της μετοχής είναι S δινεται απο τον τύπο

$$\begin{aligned} C(t,S) &= S\,N(d_1) - Kexp(-r(T-t))\,N(d_2) \\ d_1 &= \frac{ln(S/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \tag{5.2}$$

  όπου r είναι η απόδοση του βέβαιου τίτλου και σ είναι η μεταβλητότητα. Με $N(d)$ συμβολίζουμε την αθροιστική κανονική κατανομή.

- Η τιμή του δικαιώματος πώλησης μιάς μετοχής με τιμή άσκησης K και λήξη T την χρονικη στιγμή t, $(t < T)$ και αν η τιμή της μετοχής είναι S δίνεται από τον τύπο

$$\begin{aligned} P(t,S) &= -S\,N(-d_1) + Kexp(-r(T-t))\,N(-d_2) \\ d_1 &= \frac{ln(S/K) + (r+\sigma^2/2)(T-t))}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \end{aligned} \tag{5.3}$$

Παράδειγμα 5.1.1 Έστω μια μετοχή η οποία έχει μεταβλητότητα $\sigma = 0.3$ όπως αυτή μετρήθηκε από τις χρονολογικές σειρές των τιμών κλεισίματος της. Ας υποθέσουμε επίσης ότι το ετήσιο επιτόκιο (δηλαδή η ο ρυθμός αποδοσης του βέβαιου τίτλου) είναι 5% ανά έτος. Ένας επενδυτής σκέπτεται να αγοράσει σήμερα ένα δικαίωμα αγοράς της μετοχής αυτής το οποίο θα του επιτρέπει να αγοράσει την μετοχή αυτή ένα χρόνο από σήμερα στην τιμή των 40 ευρώ ανεξάρτητα από το ποιά είναι η τιμή της στην αγορά. Αν σήμερα η τιμή της μετοχής είναι 50 ευρώ, ποια τιμή πιστεύετε ότι πρέπει να δώσει ο αγοραστής σήμερα για το δικαίωμα αυτό;

Θα εφαρμοσουμε τον τύπο (5.2) των Black-Scholes. Με απλή αντικατάσταση στον τύπο αυτό βρίσκουμε ότι

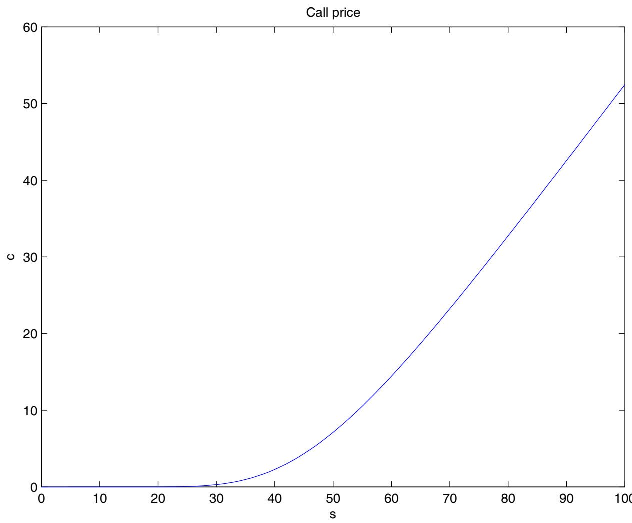
$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{(log(50/40) + (0.5*0.3*0.3 + 5/100)*1)}{(0.3*\sqrt{1})} = 1.0605 \\ d_2 &= 1.0605 - 0.3*\sqrt{1} = 0.7605 \\ N(d_1) &= 0.8555 \\ N(d_2) &= 0.7765 \\ C(0,50) &= 50*0.8555 - 40*exp(-9/100)*0.7765 = 13.2310 \end{aligned}$$

Βρίσκουμε λοιπόν ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ ο αγοραστής του παραγώγου είναι διατεθειμένος να δώσει το ποσό των 13.23 ευρώ για να αγοράσει το συμβόλαιο που θα του επιτρέψει να αγοράσει την μετοχή αυτή στην τιμή των 40 ευρώ σε ένα έτος. Αυτό μας λέει ότι ο αγοραστής εκτιμά ότι η μετοχή θα έχει τιμή υψηλότερη των 40 ευρώ σε ένα έτος απο σήμερα οπότε θα κερδίσει αγοράζοντας ένα συμβόλαιο που θα του επιτρέψει να το αγοράσει στην χαμηλή αυτή τιμή.

Παράδειγμα 5.1.2 Ας υποθεσουμε τώρα ότι κάποιος ενδιαφέρεται να αποκτήσει ένα δικαίωμα πώλησης της μετοχής στην τιμή των 40 ευρώ $(K = 40)$ ανεξάρτητα από την τιμή πώλησης της στην αγορά. Το δικαίωμα αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθεί σε ένα έτος από σήμερα $(T = 1)$. Ποιά θα είναι η τιμή του παραγώγου αυτού σήμερα $(t = 0)$;

Το παράγωγο αυτό συμβόλαιο είναι ένα δικαίωμα πώλησης (put option) για την τιμολόγηση του οποίου μπορούμενα χρησιμοποιήσουμε τον τυπο (5.3) των Black-Scholes. Απλή εφαρμογή του τύπου με τα συγκεκριμένα στοιχεία θα μας δώσει

$$\begin{aligned} d_1 &= 1.0605 \\ d_2 &= 1.0605 - 0.3*\sqrt{1} = 0.7605 \\ N(d_1) &= 0.8555 \\ N(d_2) &= 0.7765 \\ P(0,50) &= 1.2802 \end{aligned}$$



Σχήμα 5.1: Η τιμή του δικαιώματος αγοράς για $T = 1$ έτος, $K = 40$, $\sigma = 0.3$, $r = 5\%$ ανα έτος την χρονική στιγμή $t = 0$ για διαφορετικές σημερινές τιμές της μετοχής.

Συνεπώς η τιμή του δικαιώματος πώλησης θα είναι ίση προς 1.2802 ευρώ που αντανακλά την προσδοκία του αγοραστή του δικαιώματος πώλησης να κατεβεί η τιμή της μετοχής σε ένα έτος απο σήμερα χαμηλότερα από τα 40 ευρώ έτσι ώστε να του χρησιμεύσει το δικαίωμα πώλησης.

Σχόλιο 5.1.1 Τονίζουμε όμως ότι αυτό δεν είναι οι προσωπικές προσδοκίες του αγοραστή, αλλά προσδοκίες υπολογισμένες κάτω απο τον νόμο εξέλιξης της τιμής της μετοχής που είναι συμβατός με το μέτρο που είναι ουδέτερο ως προς τον κίνδυνο. Υπο αυτή την έννοια είναι οι προσδοκίες που έχει καθορίσει η ίδια η αγορά σχετικά με τις κινήσεις του βασικού τίτλου, και είναι συμβατές με την ισορροπία στην αγορά αυτή (ισοδύναμα συμβατές με την υπόθεση της απουσίας arbitrage).

Η τιμή του παραγώγου σήμερα προφανώς εξαρτάται από την τιμή της μετοχής στην αγορά σήμερα σε συνάρτηση με την τιμή άσκησης. Στο σχήμα 5.1 δείχνουμε την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος αγοράς της μετοχής στην τιμή άσκησης των 40 ευρώ για διαφορετικά σενάρια κατά τα οποία μεταβάλλεται η σημερινή τιμή της μετοχής από 0 ως 100 ευρώ. Παρατηρούμε οτι αν η σημερινή τιμή της μετοχής είναι μικρότερη από περίπου 30 ευρώ η σημερινή αξία του δικαιώματος αγοράς της μετοχής στα 40 ευρώ είναι σχεδόν μηδενική. Αυτό συμβαίνει γιατί αν η τιμή της μετοχής σήμερα είναι μικρότερη απο 30 ευρώ είναι σχεδόν αδύνατο σε ένα έτος να έχει ανέβει σε τιμή μεγαλύτερη των 40 ευρώ και άρα το δικαίωμα θα είναι χωρίς καμία αξία.

Στο σχήμα 5.2 δείχνουμε την μεταβολή της τιμής του δικαιώματος πώλησης της μετοχής στην τιμή άσκησης των 40 ευρώ για διαφορετικά σενάρια κατά τα οποία μεταβάλλεται η σημερινή τιμή της μετοχής από 0 ως 100 ευρώ. Παρατηρούμε ότι αν η σημερινη τιμή της μετοχής είναι υψηλότερη από περίπου 70 ευρώ η τιμή του δικαιώματος πώλησης είναι σχεδόν μηδενική. Αυτό συμβαίνει γιατί αν η σημερινή τιμή είναι τόσο υψηλή είναι πολύ απίθανο να πέσει σε 1 έτος η τιμή της κάτω απο τα 40 ευρώ έτσι ώστε το δικαίωμα πώλησης να αποκτήσει κάποια αξία.

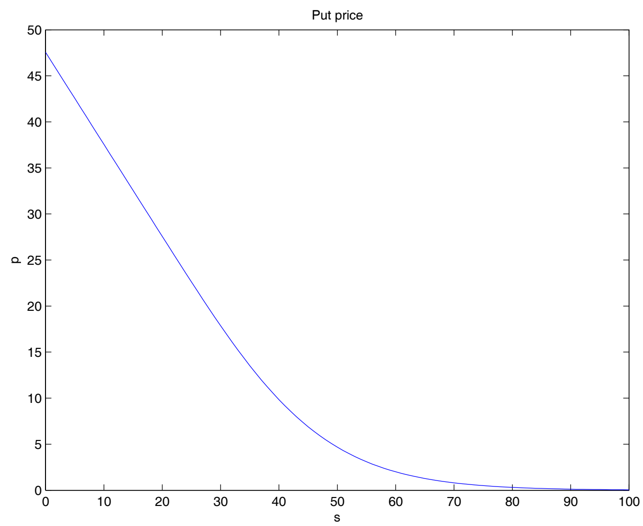
Η τιμή του δικαιώματος αγοράς εξαρτάται και από την μεταβλητότητα της μετοχής. Στο σχήμα 5.3 δείχνουμε την τιμή του δικαιώματος αγοράς σαν συνάρτηση της αρχικής τιμής της μετοχής για διαφορετικές τιμές της παραμέτρου της μεταβλητότητας. Παρατηρούμε ότι η τιμή του δικαιώματος αγοράς αυξάνεται καθώς η μεταβλητότητα αυξάνεται. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί γιατί όσο μεγαλώνει η μεταβλητότητα τόσο μεγαλύτερη πιθανότητα υπάρχει η τελική τιμή της μετοχής σε ένα έτος απο σήμερα να είναι μεγαλύτερη του 40 οπότε να έχει αξία το δικαίωμα.

Παρόμοιο φαινόμενο συμβαίνει και για το δικαίωμα πώλησης (βλ. σχήμα 5.4».

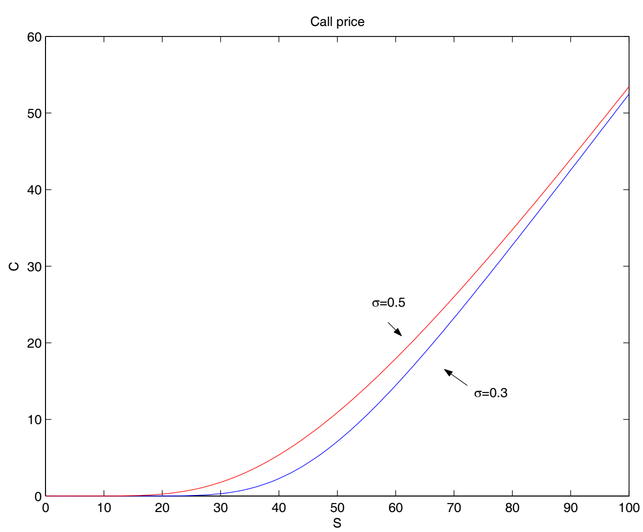
Με παρόμοιο τροπο μπορούμε να δούμε την μεταβολή της τιμής των δικαιωμάτων πώλησης και αγοράς μετοχών καθώς μεταβάλλονται οι διαφορες παράμετροι που επηρεάζουν τις τιμές των μετοχών.

5.2 Τα ελληνικά γράμματα (*greeks*)

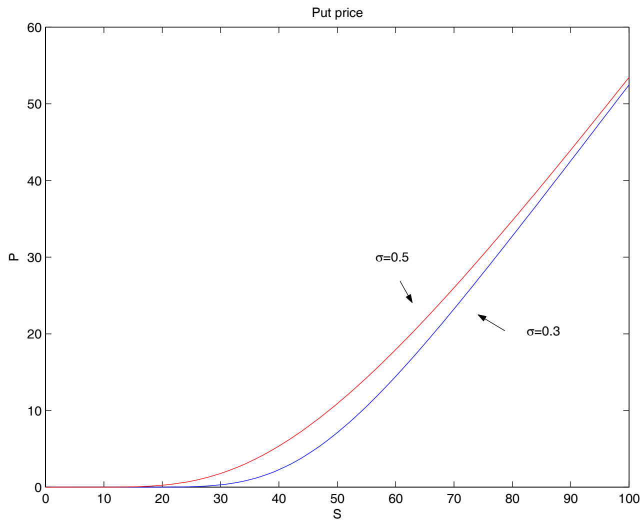
Η μεταβολή των τιμών των παραγώγων συμβολαίων ως προς τις διάφορες παραμέτρους που επηρεάζουν τις τιμές των μετοχών ποσοτικοποιείται από οριμένες ποσότητες που ονομάζονται τα ελληνικά γράμματα (greeks).



Σχήμα 5.2: Η τιμή του δικαιώματος πώλησης για $T = 1$ έτος, $K = 40$, $\sigma = 0.3$, $r = 5\%$ ανα έτος την χρονική στιγμή $t = 0$ για διαφορετικές σημερινές τιμές της μετοχής.



Σχήμα 5.3: Η τιμή του δικαιώματος αγοράς για $T = 1$ έτος, $K = 40$, $r = 5\%$ ανα έτος την χρονική στιγμή $t = 0$ για διαφορετικές σημερινές τιμές της μετοχής και για $\sigma = 0.3$, $\sigma = 0.5$.



Σχήμα 5.4: Η τιμή του δικαιώματος πώλησης για $T = 1$ έτος, $K = 40$, $r = 5\%$ ανα έτος την χρονική στιγμή $t = 0$ για διαφορετικές σημερινές τιμές της μετοχής και για $\sigma = 0.3$, $\sigma = 0.5$.

5.2.1 Το Δ

Το σπουδαιότερα απο τα ελληνικά γράμματα είναι το Δ. Το Δ εκφράζει την μεταβολή της τιμής του παραγώγου $V(t, S)$ με την μεταβολή της τιμής της μετοχής (την ίδια χρονική στιγμή). Μαθηματικά αυτό εκφράζεται

$$\Delta = \frac{\partial V}{\partial S}$$

Το Δ για το δικαίωμα αγοράς και το δικαίωμα πώλησης μπορεί να υπολογιστεί αναλυτικά από τον τύπο Black-Scholes. Κάνοντας τις απαραίτητες πράξεις μπορούμε να βρούμε ότι

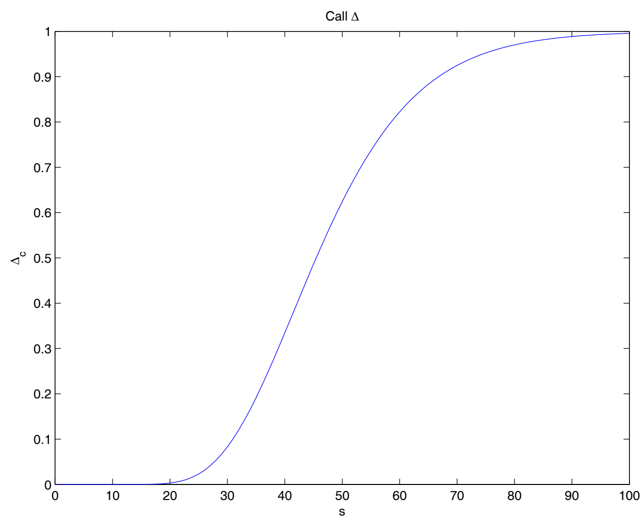
$$\begin{aligned} \Delta_C(t, S) &= N(d_1) \\ \Delta_P(t, S) &= N(d_1) - 1 \end{aligned}$$

Το Δ είναι πολύ σημαντικό γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αποτελείται από το παράγωγο και την μετοχή και το οποίο κάθε χρονική στιγμή θα είναι ουδέτερο ως προς τις πιθανές μεταβολές της τιμής της μετοχής. Με άλλα λόγια αυτό το χαρτοφυλάκιο υπό μία έννοια δεν θα περιέχει κίνδυνο.

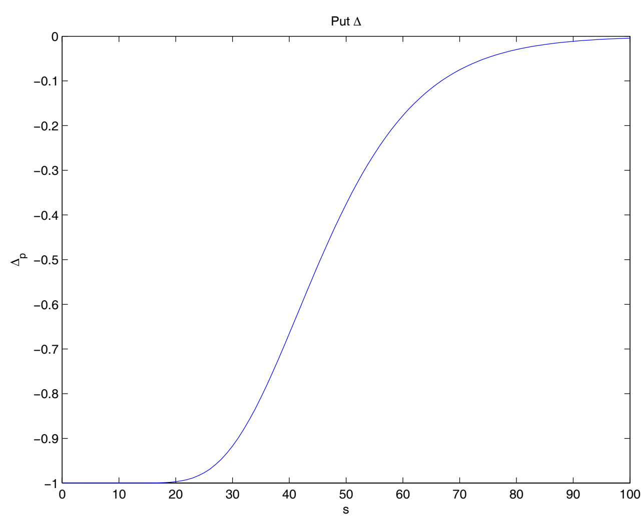
Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα αποτελείται από -1 στο παράγωγο και από Δ κομμάτια της μετοχής. Η συνολική του αξία θα είναι ίση προς $\Pi = -V + \Delta S$. Η απόδοση αυτού του χαρτοφυλακίου στον χρόνο δt θα πρέπει να είναι ίση προς $exp(-r\delta t)$.

Η ερμηνεία του Δ είναι ουσιαστικά ο αριθμός των μονάδων της μετοχής που πρέπει να έχει στην κατοχή του όποιος έχει γράψει (έχει πουλήσει) ένα παράγωγο συμβόλαιο έτσι ώστε η συνολική του θέση να μη έχει κίνδυνο.

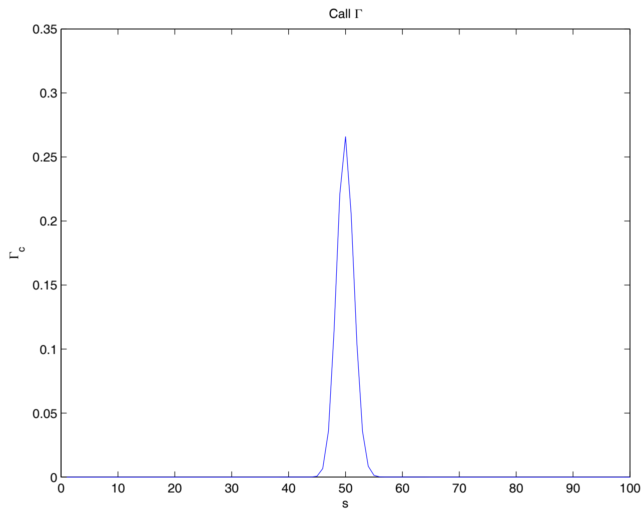
Το Δ_C για ένα δικαίωμα αγοράς μιάς μετοχής με τιμή άσκησης $K = 40$ και λήξη $T = 1$ έτος αν η μεταβλητότητα της μετοχής είναι ίση με $\sigma = 0.3$, την χρονικη στιγμή $t = 0$ σαν συνάρτηση της τιμής της μετοχής για $t = 0$ δίνεται στην εικόνα 5.5. Παρατηρούμε ότι για μικρές (σημερινές) τιμές της μετοχής το Δ είναι ίσο με 0. Αυτό συμβάινει γιατί αν η τιμή της μετοχής σήμερα είναι μικρή είναι μικρή και η πιθανότητα η τιμή της σε ένα έτος απο σήμερα να ανέβει επάνω απο το $K = 40$ και αυτός που έχει αγοράσει το δικαίωμα αγορας να το χρησιμοποιήσει. Κατά συνέπεια είναι ελάχιστα πιθανό αυτός που πούλησε το δικαίωμα αγοράς να χρειαστεί να τηρήσει την υπόσχεση του και να δώσει μία μετοχή στον κάτοχο του δικαιώματος. Συνεπώς δεν χρειάζεται να κρατάει στο χαρτοφυλάκιο του καμία μετοχή ($\Delta = 0$). Αντίθετα αν η (σημερινή) τιμή της μετοχής είναι κατά πολύ επάνω από το $K = 40$ είναι πολύ πιθανό σε ένα έτος απο σήμερα η τιμή της μετοχής να είναι μεγαλύτερη απο την τιμή 40 οπότε ο κάτοχος του δικαιώματος θα το χρησιμοποιήσει και θα ζητήσει απο αυτόν που του το πούλησε να του δώσει μία μετοχή στην τιμή των 40 ευρώ. Για να μπορέσει να τηρήσει την υπόσχεση του αυτός που πούλησε το παράγωγο θα πρέπει να έχει στην κατοχή του ένα κομμάτι της μετοχής οπότε και να το δώσει στον κάτοχο του παραγώγου για να καθαρίσει την θέση του. Αυτό φάινεται ξεκάθαρα εφόσον για μεγάλο S, $\Delta = 1$. Αντίστοιχα το Δ_P για ένα δικαίωμα πώλησης της μετοχής αυτής σαν συνάρτησης της τωρινής τιμής της μετοχής φαίνεται στο σχήμα 5.6. Προσπαθείστε να εξηγήσετε την εικόνα αυτή οπως παραπάνω.



Σχήμα 5.5: Το Δ του δικαιώματος αγοράς για $T = 1$ έτος, $K = 40$, $r = 5\%$ ανα έτος την χρονική στιγμή $t = 0$ για διαφορετικές σημερινές τιμές της μετοχής και για $\sigma = 0.3$.



Σχήμα 5.6: Το Δ του δικαιώματος πώλησης για $T = 1$ έτος, $K = 40$, $r = 5\%$ ανα έτος την χρονική στιγμή $t = 0$ για διαφορετικές σημερινές τιμές της μετοχής και για $\sigma = 0.3$.



Σχήμα 5.7: Το Γ του δικαιώματος αγοράς για $T = 1$ έτος, $K = 40$, $r = 5\%$ ανα έτος την χρονική στιγμή $t = 0$ για διαφορετικές σημερινές τιμές της μετοχής και για $\sigma = 0.3$.

5.2.2 Το Γ

Ένα άλλο ελληνικό γράμμα το οποίο παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον είναι το Γ. Το Γ μας δίνει την μεταβολή του Δ με την μεταβολή της τιμής της μετοχής (την χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει). Συνεπώς

$$\Gamma = \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}$$

Μικρές τιμές του Γ σημαίνει ότι το Δ θα μεταβληθεί λίγο αν μεταβληθεί το S ενώ μεγάλες τιμές του Γ σημαίνει το αντίθετο.

Από τις αναλυτικές εκφράσεις που παίρνουμε για τις τιμές των δικαιωμάτων αγοράς και πώλησης για το μοντέλο Black-Scholes μπορούμε να υπολογίσουμε αναλυτικά το Γ για τα παράγωγα αυτά. Μετά από λίγη άλγεβρα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Gamma_C &= \frac{N^{'}(d_1)}{S\sigma\sqrt{T-t}} \\
\Gamma_P &= \Gamma_C \\
N^{'}(d_1) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{d_1^2}{2}\right)
\end{aligned}$$

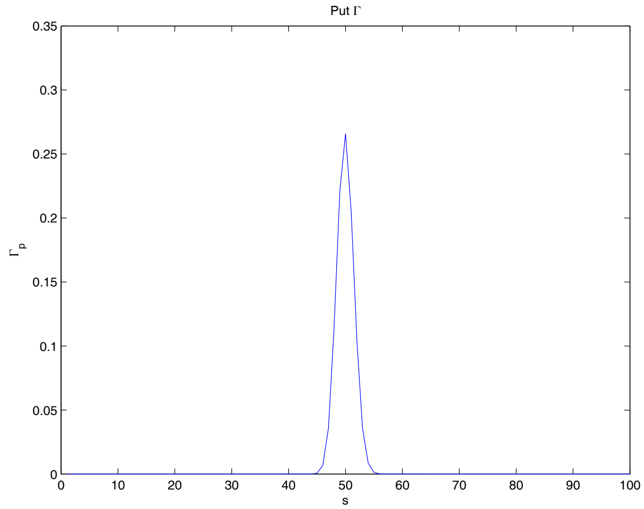
Το Γ_C για το δικαίωμα αγοράς δίνεται στο σχήμα 5.7 σαν συνάρτηση της (σημερινής) τιμής της μετοχής. Βλέπουμε ότι είναι σχεδόν μηδενικό και παίρνει μεγάλες τιμής κοντά στην τιμή άσκησης του παραγώγου. Αυτό σημαίνει ότι το Δ του δικαιώματος αγοράς μεταβάλλεται πολύ κοντά στην τιμή άσκησης του παραγώγου, δηλαδή ότι η τιμή οτυ δικαιώματος αγοράς είναι πολύ ευάισθητη στις μεταβολές της τιμής της μετοχής όταν αυτή βρίσκεται κοντά στην τιμή άσκησης. Το Γ_P έχει την ίδια συμπεριφορά όπως φαίνεται στο σχήμα 5.8.

5.3 Χαρτοφυλάκια παραγώγων συμβολαίων

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος έχει στην κατοχή του παραπάνω απο ένα παράγωγα συμβόλαια και κάποιες μετοχές επάνω στις οποίες είναι γραμμένα τα παράγωγα συμβόλαια.

Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου είναι το ζυγισμένο άθροισμα της αξίας του κάθε ενός απο αυτά τα παράγωγα συμβόλαια και της αξίας της μετοχής, όπου σαν βάρος έχουμε πάρει το αριθμό των συμβολαίων του κάθε είδους που έχουμε στην διάθεση μας.

Αντιστοίχως μπορούμε να πάρουμε το Δ και το Γ για το συνολικό χαρτοφυλάκιο, σαν γραμμικό συνδυασμό των Δ και Γ για το κάθε παράγωγο συμβόλαιο που έχουμε στην διάθεση μας.



Σχήμα 5.8: Το Δ του δικαιώματος πώλησης για $T = 1$ έτος, $K = 40$, $r = 5\%$ ανα έτος την χρονική στιγμή $t = 0$ για διαφορετικές σημερινές τιμές της μετοχής και για $\sigma = 0.3$.

Παράδειγμα 5.3.1 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε στην διάθεση μας 2 κομμάτια μιάς μετοχής και έχουμε αγοράσει και ένα δικαίωμα πώλησης της μετοχής αυτής στην τιμή άσκησης $K = 40$ και λήξη $T = 1$ έτος. Αν τα χαρακτηριστικά της μετοχής είναι $\sigma = 0.3$, και $r = 5\%$ βρείτε την συνολική αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή $t = 0.5$ (δηλαδή μισό χρόνο πριν την λήξη του). Επίσης βρείτε το Δ και το Γ του χαρτοφυλακίου αυτού σαν συνάρτηση της τιμής της μετοχής την χρονική στιγμή $t = 0.5$.

Από τον τύπο Black-Scholes γνωρίζουμε την τιμή του δικαιώματος πώλησης. Ας την συμβολίσουμε $P(0, S)$. Η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$V = 2S + P(0, S)$$

Το συνολικό Δ του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$\Delta = 2 + \Delta_P(0, S)$$

ενώ το συνολικό Γ θα είναι

$$\Gamma = 0 + \Gamma_P(0, S)$$

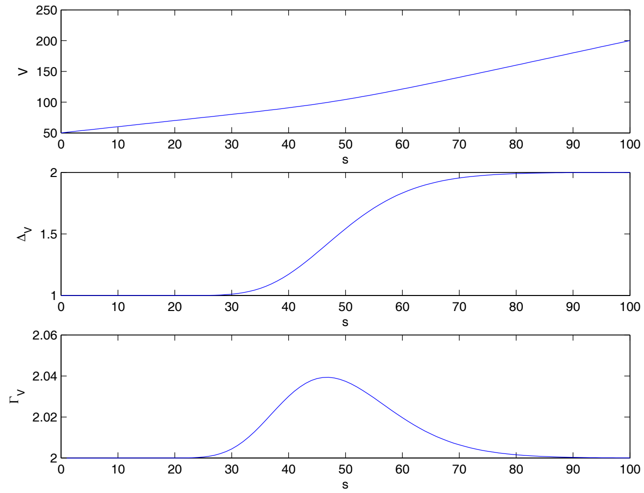
Στο σχήμα 5.9 παρουσιάζονται η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου, το συνολικό του Δ και το συνολικό του Γ σαν συνάρτηση της τιμής της μετοχής S την χρονική στιγμή $t = 0.5$.

Πολλές φορές μας ενδιαφέρει να κάνουμε ένα χαρτοφυλάκιο να έχει $\Delta \simeq 0$ κοντά σε κάποια περιοχή τιμών του βασικού τίτλου. Αυτό το θέλουμε για να εξασφαλίσουμε οτι το χαρτοφυλάκιο δεν θα έχει αξία που θα μεταβάλλεται πολύ αν μεταβληθεί η αξία της μετοχής στην περιοχή των τιμών αυτών.

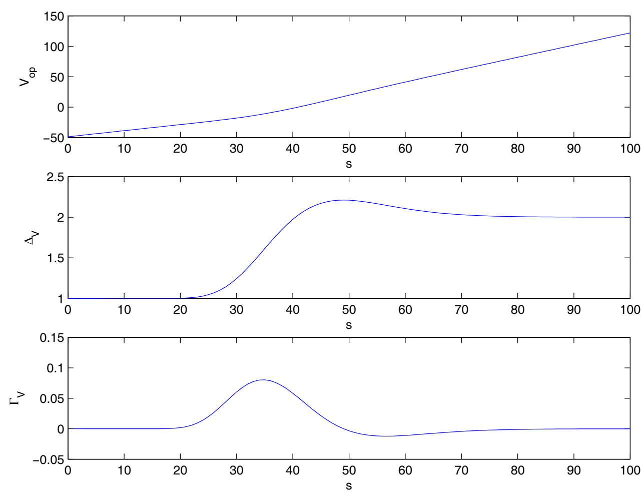
Παράδειγμα 5.3.2 Ας υποθέσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται από μία ανοικτή θέση σε ένα δικαίωμα πώλησης μιάς μετοχής με τιμή άσκησης $K_1 = 50$ και από μία long θέση σε δύο δικαιώματα αγοράς μιάς μετοχής με τιμή άσκησης $K_2 = 40$. Η μετοχή έχει μεταβλητότητα $\sigma = 0.3$ και το επιτόκιο της βέβαιης επένδυσης είναι ίσο με $r = 5\%$ ανά έτος.
(α) Τι θέση πρέπει να έχει ο επενδυτής που κατέχει το χαρτοφυλάκιο αυτό στην μετοχή, έτσι ώστε η αξία του χαρτοφυλακίου να μην μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η αξία της μετοχής στην περιοχή τιμών $0 < S < 20$;
(β) Τι θέση πρέπει να έχει ο επενδυτής που κατέχει το χαρτοφυλάκιο αυτό στην μετοχή, έτσι ώστε η αξία του χαρτοφυλακίου να μην μεταβάλλεται όταν μεταβάλλεται η αξία της μετοχής στην περιοχή τιμών $80 < S < 100$;

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα (α) θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο θα αποτελείται απο -1 στο δικαίωμα αγοράς, 2 στο δικαίωμα πώλησης και από x στην μετοχή και να επιλέξουμε το x έτσι ώστε το συνολικό χαρτοφυλάκιο να έχει $\Delta \simeq 0$ στην περιοχή $0 < S < 20$. Το Δ του συνολικού χαρτοφυλακίου θα είναι

$$\Delta = \Delta_{op} + x$$



Σχήμα 5.9: Η αξία και το Δ, Γ του χαρτοφυλακίου του παραδείγματος 5.3.1

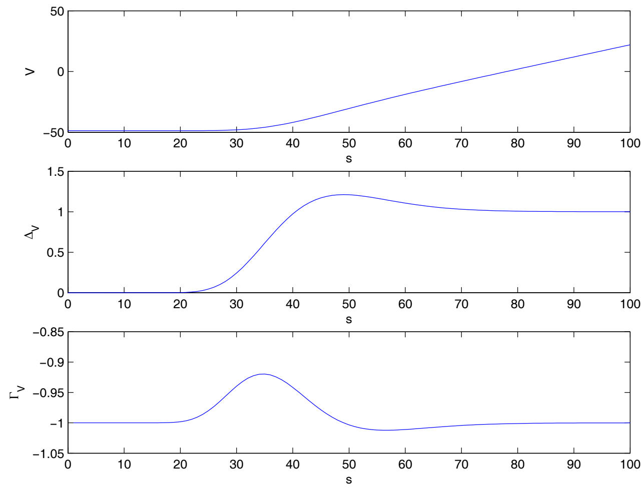


Σχήμα 5.10: Η αξία και το Δ, Γ του χαρτοφυλακίου του παραδείγματος 5.3.2 όταν περιέχει μονο τα παράγωγα

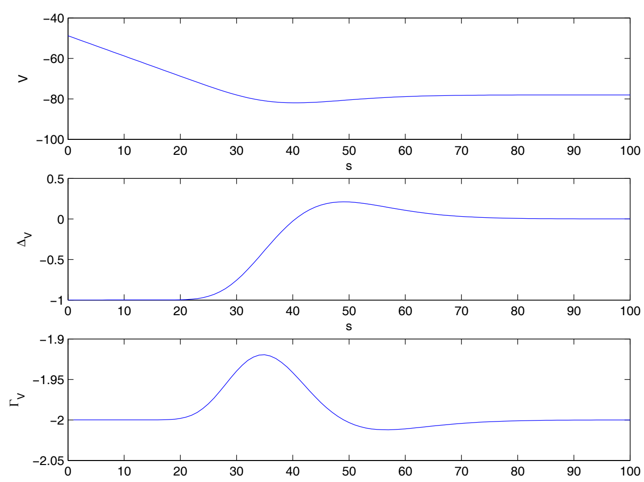
που Δ_{op} είναι το συνολικό Δ του χαρτοφυλακίου που περιέχει μόνο τα παράγωγα. Στο σχήμα 5.10 φαινονται η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου που περιέχει μόνο τα παράγωγα, το Δ του και το Γ του. Το Δ_{op} είναι περίπου ίσο προς 1 στην περιοχή $0 < S < 20$ συνεπώς για να είναι το πλήρες χαρτοφυλάκιο ουδέτερο ως προς Δ θα πρέπει να έχουμε $x = -1$ δηλαδή να έχουμε μία ανοικτή θέση την μετοχή. Στο σχήμα 5.11 φαίνεται η συνολική αξία, και τα συνολικά Δ και Γ του χαρτοφυλακίου αυτού. Παρατηρούμε ότι το Δ συνολικού αυτού χαρτοφυλακίου στην περιοχή $0 < S < 20$ είναι περίπου 0 άρα η αξία του χαρτοφυλακίου δεν μεταβάλλεται με την μεταβολή της αξίας της μετοχής.

Για να απαντήσουμε στο ερώτημα (β) παρατηρούμε ότι το Δ_{op} είναι περίπου ίσο με 2 στην περιοχή $80 < S < 100$. Συνεπώς για να είναι το πλήρες χαρτοφυλάκιο ουδέτερο ως προς Δ θα πρέπει να έχουμε θέση -2 στην μετοχή. Στο σχήμα 5.12 φαίνεται η συνολική αξία, και τα συνολικά Δ και Γ του χαρτοφυλακίου αυτού. Παρατηρούμε ότι το Δ συνολικού αυτού χαρτοφυλακίου στην περιοχή $80 < S < 100$ είναι περίπου 0 άρα η αξία του χαρτοφυλακίου δεν μεταβάλλεται με την μεταβολή της αξίας της μετοχής.

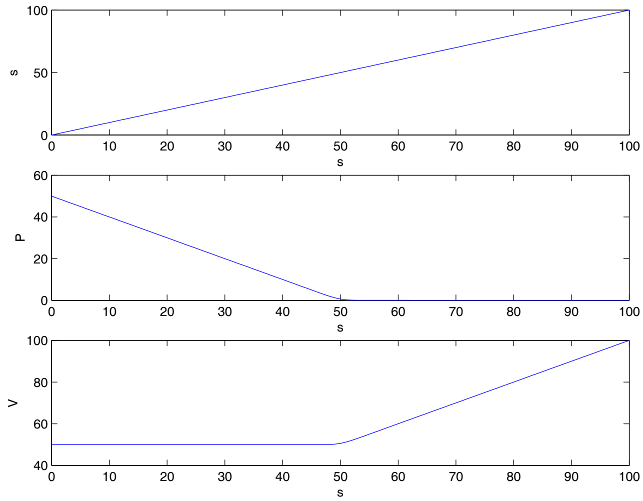
Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να κανούμε το χαρτοφυλάκιο να είναι ουδέτερο και ως προς Γ. Ένα χαρτοφυλάκιο που είναι ουδέτερο και ως προς Δ και ως προς Γ δεν είναι ευαίσθητο ως προς τις μεταβολές της τιμής της μετοχής.



Σχήμα 5.11: Η αξία και το Δ, Γ του χαρτοφυλακίου του παραδείγματος 5.3.2 όταν περιέχει μονο τα παράγωγα και την θέση -1 στην μετοχή.



Σχήμα 5.12: Η αξία και το Δ, Γ του χαρτοφυλακίου του παραδείγματος 5.3.2 όταν περιέχει μονο τα παράγωγα και την θέση -2 στην μετοχή.



Σχήμα 5.13: Η αξία του *protective put*

5.4 Στρατηγικές με παράγωγα προιόντα

Με τον συνδυασμό πολλών παραγώγων προιόντων και των αντιστοιχων μετοχών μπορούμε να κατασκευάσουμε χαρτοφυλάκια τα οποία έχουν συγκεκριμένες ιδιότητες ως προς τις μεταβολές των τιμών των μετοχών.

Θα περιγράψουμε εδώ τις κυριότερες στρατηγικές με παράγωγα

5.4.1 *Protective put*

Ας υποθέσουμε ότι ένας επενδυτής έχει οριμένες μετοχές στο χαρτοφυλάκιο του που φοβάται ότι μπορεί να υποτιμηθούν. Για να προστατευτει από πιθανή μείωση της αξίας του χαρτοφυλακίου του μπορει να χρησιμοποιήσει την στρατηγική protective put που αποτελείται από την θέση στην μετοχή και μία long θέση σε ένα δικαίωμα πώλησης της μετοχής αυτής σε προκαθορισμένη τιμή άσκησης. Η συνολική αυτη θέση τον προστατεύει από πιθανές υποτιμησεις της μετοχής που κατέχει. Η στρατηγική αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.13. Με βάση τα όσα έχουμε δει μέχρι τώρα τιμολογήσετε την στρατηγική αυτή και βρείτε τα Δ και Γ.

5.4.2 *Covered call*

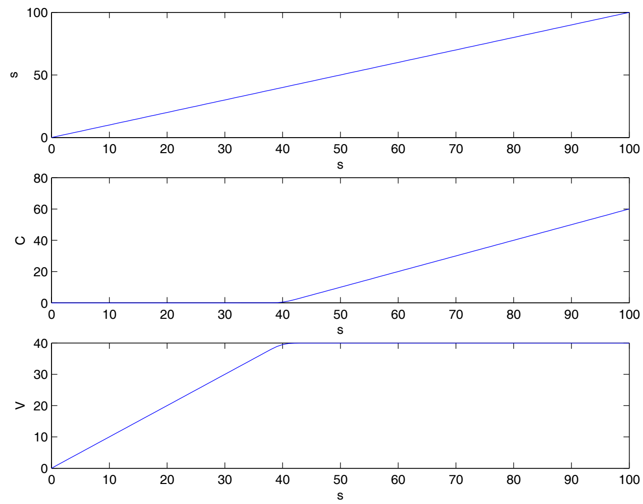
Όταν ένας επενδυτής πουλάει δικαιώματα αγοράς επάνω σε μετοχές τις οποίες κατέχει λέμε ότι αυτός ο επενδύτής γράφει καλυμένα δικαιώματα πώλησης (covered calls). Μία τέτοια στρατηγική χρησιμοποιείται απο επενδυτές που δεν πιστευούν ότι θα ανέβει η μετοχή που έχουν στην κατοχή τους οπότε χρησιμοποιούν την θέση στο δικαιώμα αγοράς για να εισπράξουν τα premia από τα δικαιώματα αγοράς που πούλησαν. Η στρατηγική αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.14. Με βάση τα όσα έχουμε δεί μέχρι τώρα τιμολογήσετε την στρατηγική αυτή και βρείτε τα Δ και Γ.

5.4.3 *Straddle*

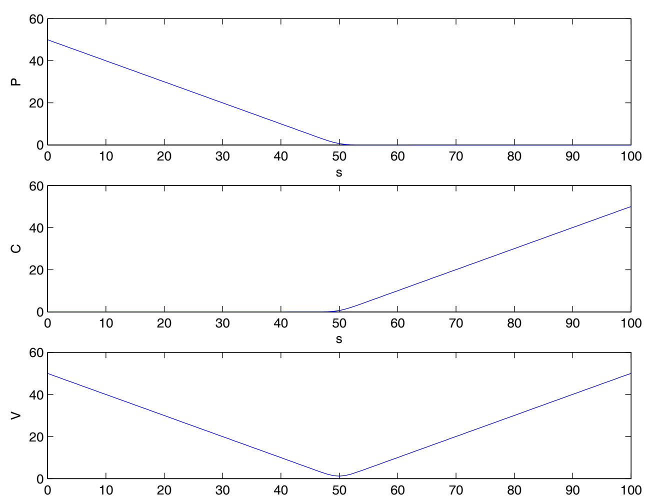
Το straddle είναι η ταυτόχρονη αγορά (ή πώληση) ενός δικαιώματος αγοράς και ενός δικαιώματος πώλησης επάνω σε μία μετοχή με τα ίδια χαρακτηριστικά (ίδια λήξη, τιμή άσκησης). Ένα straddle είναι ένα συμβόλαιο το οποίο παίζει με την μεταβλητότητα της μετοχής επάνω στην οποία είναι γραμμένα τα παράγωγα. Ο αγοραστής ελπίζει ότι οι τιμές της μετοχής θα έχουν ισχυρές μεταβολές είτε προς τα πάνω είτε προς τα κάτω ενώ ο πωλητής πιστεύεί ότι η μετοχή θα παρουσιάσει χαμηλή μεταβλητότητα (παρακάτω από το αναμενόμενο). Η στρατηγική αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.15. Με βάση τα όσα έχουμε δεί μέχρι τώρα τιμολογήσετε την στρατηγική αυτή και βρείτε τα Δ και Γ.

5.4.4 *Strips* και *Straps*

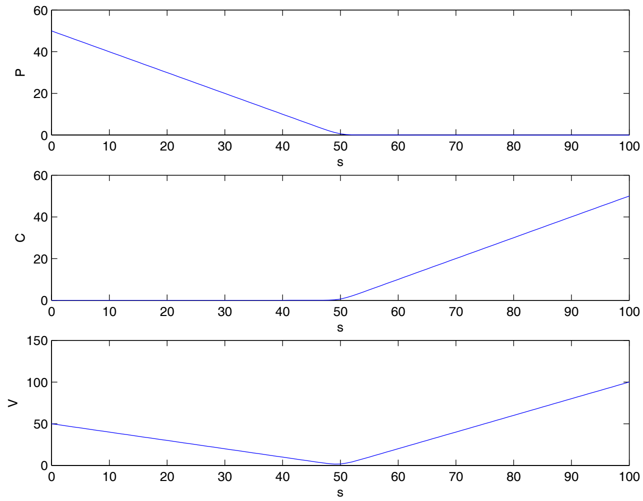
Με την αλλαγή στον αριθμό των δικαιωμάτων πώλησης ή των δικαιωμάτων αγοράς μπορει κάποιος επενδυτής να εκμεταλευτεί την προσδοκία που έχει για κίνηση της αγοράς προς κάποια κατεύθυνση ενώ ταυτόχρονα να έχει και κάποιο κέρδος από την κίνηση της αγοράς προς την αντίθετη κατεύθυνση. Τέτοιες στρατηγικές ονομάζονται



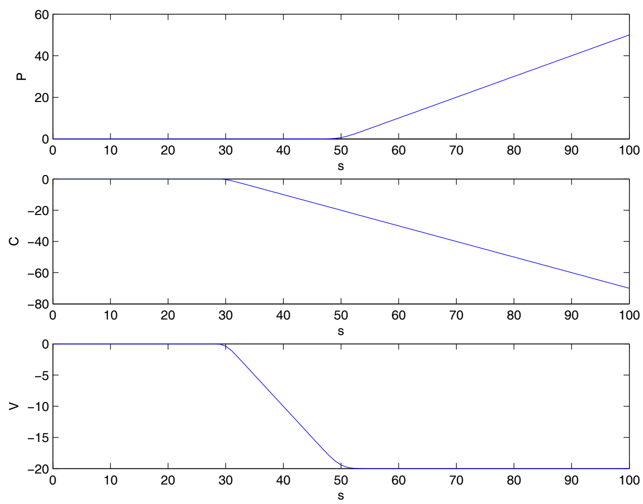
Σχήμα 5.14: Η αξία του *covered call*



Σχήμα 5.15: Η αξία του *straddle*



Σχήμα 5.16: Η αξία του *strip*



Σχήμα 5.17: Η αξία του *bear spread*

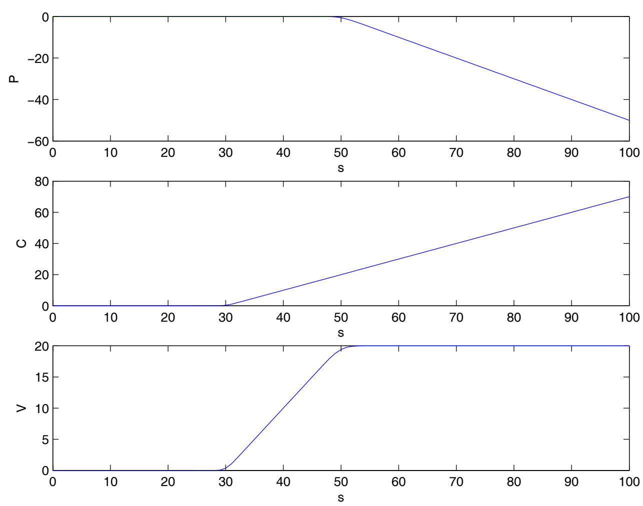
stripsή straps. Μία τέτοια θέση φαίνεται στο σχήμα 5.16 και είναι μία στρατηγική που θα χρησιμοποιούσε ένας επενδυτής που πιστεύει ότι η αγορά θα ανέβει.

5.4.5 *Spreads*

Τα spreads είναι η ταυτόχρονη πώληση ενός συμβολάιου και αγορά ενος άλλου με τα ίδια χαρακτηριστικά εκτός από ένα π.χ. την τιμή άσκησης.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι κάποιος επενδυτής έχει αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K_1 και έχει πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K_2, $K_1 < K_2$. Η θέση αυτή φαίνεται στο σχήμα 5.17 ονομάζεται bear spread και υιοθετείται απο ένα επενδυτή που πιστεύει ότι η αγορά θα κατέβει.

Αν ο επενδυτής έχει αγοράσει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K_2 και έχει πουλήσει ένα δικαίωμα αγοράς με τιμή άσκησης K_1 , $K_1 < K_2$, η θέση αυτή ονομάζεται bull spread και φαίνεται στο σχήμα 5.18. Η θέση αυτή υιοθετείται από ένα επενδυτή που πιστεύει ότι η αγορά θα ανέβει.



Σχήμα 5.18: Η αξία του *bull spread*

Κεφάλαιο 6

Ομόλογα

6.1 Τα βασικά των ομολόγων

Ένα ομόλογο είναι ουσιαστικά ένα δάνειο το οποίο παίρνει κάποια εταιρεία ή κάποιο κράτος (εκδότης) από το κοινό. Βέβαια, το δάνειο αυτό δεν έχει εν γένει την μορφή του δανείου ενός δεδομένου ποσού σήμερα το οποίο πρέπει να αποπληρωθεί με κάποιο επιτόκιο στο μέλλον. Είναι πιο χρήσιμο να σκεφτούμε ένα ομόλογο με την ακόλουθη μορφή. Ο εκδοτης πουλάει στην αγορά ομολόγων τίτλους οι οποίοι υπόσχονται στον κάτοχο τους μία πληρωμή της ονομαστικής αξίας που αναγράφονται σε αυτούς την χρονική στιγμή της λήξης τους, καθώς και μία σειρά πληρωμών, περιοδικά πριν την λήξη, με την μορφή κουπονιών. Το ομόλογο δεν είναι απαραίτητα προσωπικό, και ο κάτοχος του μπορεί να το μεταπωλήσει σε άλλους αν το επιθυμεί. Ο εκδότης, σε αντάλλαγμα παίρνει σήμερα ένα ποσό. Αυτό το ποσό μπορεί να το χρησιμοποιήσει για την χρηματοδότηση των επενδυτικών του δραστηριοτήτων. Υπό την έννοια αυτή που αναφέραμε, θα εννοούμε ότι το ομόλογο είναι ουσιαστικά ένα δάνειο προς τον εκδότη το οποίο θα αποπληρωθεί με τις περιοδικές πληρωμές των κουπονιών και την πληρωμή της ονομαστικής αξίας του στην λήξη. Αναφέραμε ότι τα ομόλογα δεν είναι απαραιτήτως προσωπικά, και μπορεί ο κάτοχος τους να τα μεταπωλήσει σε κάποιον άλλο αν δεν τα επιθυμεί. Αυτό μπορεί να γίνει σε μία οργανωμένη αγορά, την αγορά ομολόγων. Η τιμή των ομολόγων, θεωρητικά πάντα, καθορίζεται απο την προσφορά και την ζήτηση τους και συνεπώς μπορεί να έχει και διακυμάνσεις, ανάλογα με τις οικονομικές συνθήκες. Με το ίδιο επιχείρημα, εφόσον η τιμή τους έχει διακυμάνσεις και εφόσον οι απολαβές απο αυτά είναι δεδομένες (τα προκαθορισμένα κουπόνια και η ονομαστική αξία) είναι λογικό και οι αποδόσεις τους να παρουσιάζουν διακυμάνσεις. Συνεπώς, τα ομόλογα είναι τίτλοι που υπόκεινται σε κίνδυνο, αλλά επειδή οι απολαβές απο αυτά είναι προκαθορισμένες θεωρούμε ότι είναι τίτλοι οι οποίοι είναι απο τους πιο ασφαλείς που μπορεί να βρεί κάποιος σε μία αγορά.

6.2 Αγορές ομολόγων και είδη ομολόγων

Ένα ομόλογο μπορεί να εκδοθεί είτε απο κράτη, είτε απο εταιρείες είτε απο χρηματοπιστωτικούς οργανισμούς.

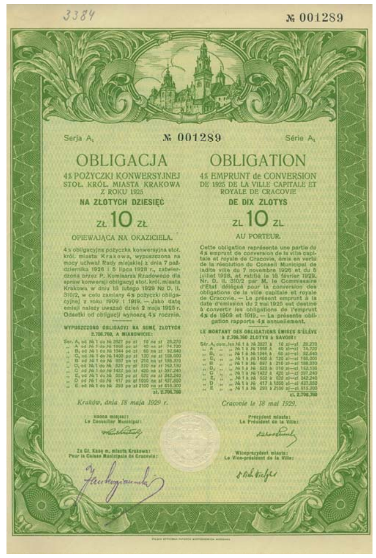
Είναι στην ουσία μια μορφή δανεισμού, κατά την οποία ο 'δανειστής' δηλαδη ο αγοραστής του ομολόγου πληρώνει σήμερα ένα ποσό (το ποσό της αγοράς του ομολόγου δηλαδή την τιμή του σήμερα) και θα λάβει απο τον εκδότη του ομολόγου (τον δανειζόμενο) ένα δεδομένο ποσό στην λήξη του.

Τα βασικά χαρακτηριστικά του ομολόγου είναι τα ακόλουθα

- Το ποσό που πληρώνει στην λήξη - ονομαστική αξία του ομολόγου
- Ενδιάμεσες πληρωμές που μπορεί να κάνει με την μορφή κουπονιών (συνήθως % της ονομαστικής αξίας)
- Η τιμή του ομολόγου
- Η λήξη, ή ωρίμανση του ομολόγου

Υπάρχουν πολλές παραλλαγές ομολόγων.

- Ομόλογα που δεν πληρώνουν κουπόνια - (zero coupon bonds)
- Ομόλογα που πληρώνουν κουπόνια και των οποίων τα κουπόνια είναι σταθερά
- Ομόλογα που πληρώνουν κουπόνια και των οποίων τα κουπόνια είναι μεταβαλλόμενα και ενδεχομένως συνδεδεμένα με κάποιον δείκτη επιτοκίων ή τον πληθωρισμό



Σχήμα 6.1: Ομόλογο του δήμου της Κρακοβίας του 1929

- Ομόλογα οι πληρωμές των οποίων (ονομαστική αξία και κουπόνια αν υπάρχουν) είναι συνδεδεμένες με κάποιο άλλο περιουσιακό στοιχείο το οποίο και τις υποστηρίζει (π.χ. mortgage backed securities)
- Ομόλογα χωρίς λήξη - διηνεκή (Perpetuities) π.χ.CONSOLS 1888, West Shore Railroad λήξη 2361

Τα ομόλογα μπορεί να είναι προσωπικά ή να μεταφέρονται. Οι συναλλαγές σε ομόλογα γίνονται στις αγορές ομολόγων οι οποίες είναι καλά οργανωμένες αγορές που παρουσιάζουν εν γένει μεγάλη ρευστότητα. Μια απο τις μεγαλύτερες τέτοιες αγορές είναι η αγορά της Νέας Υόρκης (NYSE) η οποία ειδικεύεται κυρίως σε εταιρικά ομόλογα, η αγορά της Φρανκφούρτης, κ.α.

Βασικοί επενδυτές σε ομόλογα είναι οι ασφαλιστικοί οργανισμοί καθώς και τα συνταξιοδοτικά ταμεία. Βέβαια στα ομόλογα επενδύουν και πολλοί ιδιώτες ή εταιρείες.

Μια συναφής μορφή αγορών είναι οι αγορές χρήματος (money market) . Εκεί συναλλάσονται κυρίως συμβόλαια τα οποία έχουν μικρή διάρκεια. Τέτοιου τύπου συμβόλαια είναι π.χ.

- Τα treasury bills, T-bills τα οποία είναι συμβόλαια λήξης μικρότερης του ενός έτους
- Τα commercial papers τα οποία είναι υποσχέσεις με προσυμφωνημένη λήξη απο 1-270 ημέρες, τα οποία εκδίδονται απο εταιρείες ή μεγάλες τράπεζες με σκοπό την χρηματοδότηση των βραχυπροθεσμων υποχρεώσεων τους. Τα συμβόλαια αυτά δεν υποστηρίζονται απο κάποιο άλλο περιουσιακό στοιχείο (collateral) και ενέχουν πιστωτικού κινδύνου οπότε και η αξία τους πολλές φορές είναι σε συνάρτηση με την αξιοπιστία της εταιρείας.
- Τα συμφωνητικά των τραπεζών (bankers acceptances, BA) Αυτά είναι αρχικά εντολές πληρωμής απο κάποιοαν προς τον φέροντα το συμφωνητικό οι οποίες αφού γινουν αποδεκτές απο την τράπεζα αποτελούν πλέον υποχρέωση της τράπεζας. Τα συμφωνητικά αυτά σε πολλές περιπτώσεις μπορεί να συναλλάσσονται σε αγορές.

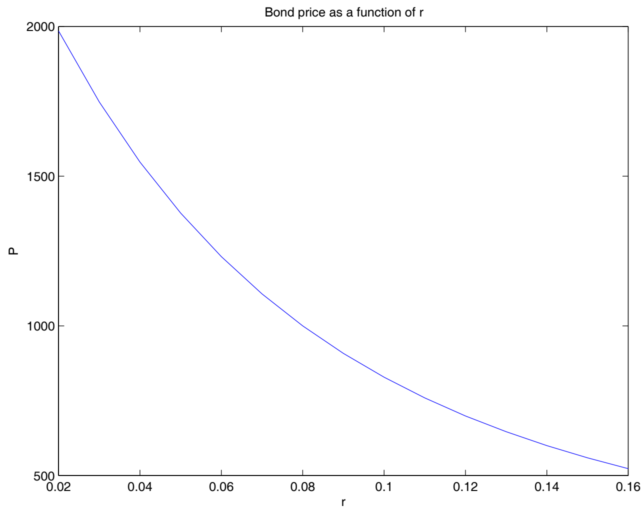
Υπάρχουν επίσης αρκετά δημοφιλή παράγωγα συμβόλαια τα οποία έχουν ομόλογα σαν υποκείμενους τίτλους. Τέτοια συμβόλαια μπορεί να είναι προθεσμιακά συμβόλαια, δικαιώματα αγοράς ή πώλησης, συμβόλαια ανταλλαγής (swaps) κ.α.

6.3 Αποτίμηση ομολόγων

Ας ξεκινήσουμε με το ερώτημα,

> Πόσο θα ήταν διατεθειμένος ένας επενδυτής να πληρώσει σήμερα ($t = 0$) για να αγοράσει ένα ομόλογο το οποίο του εγγυάται την ονομαστική αξία P_p σε n έτη και επιπλέον δίνει κουπόνια c_i ανά έτος.

Το ερώτημα αυτό δεν είναι καθόλου απλό και για να το απαντήσουμε θα πρέπει να κάνουμε ορισμένες απλουστευτικές υποθέσεις. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει κάποιος βέβαιος τίτλος στην αγορά, ο εξειδανικευμένος



Σχήμα 6.2: Η τιμή του ομολόγου για κουπόνι 8% σαν συνάρτηση της βέβαιης ετήσιας απόδοσης.

τραπεζικός λογαριασμός που υποθέσαμε παραπάνω και του οποίου η ετήσια απόδοση είναι r. Την απόδοση αυτή θα ονομάζουμε **βέβαιη απόδοση** της αγοράς ή καταχρηστικά το **επιτόκιο**. Τονίζουμε ότι η υπόθεση αυτή είναι μία απλούστευμένη υπόθεση, εφόσον στην πραγματικότητα δεν υπάρχει κανένας τίτλος σε μία αγορά με τις ιδιότητες αυτές. Στην πραγματικότητα όλοι οι διαθέσιμοι τίτλοι, ακόμη οι τραπεζικοί λογαριασμοί ενέχουν κινδύνου και δεν εγγυώνται βέβαιες αποδόσεις ότιδήποτε και αν συμβεί. Υιόθετώντας την υπόθεση αυτή λοιπόν, η τιμή P που είναι διατεθειμένος ένας επενδυτής να πληρώσει σήμερα για να αγοράσει το ομόλογο αυτό θα είναι

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+r)^i} + \frac{P_p}{(1+r)^n} \tag{6.1}$$

Η τιμή αυτή είναι ίση με την παρούσα αξία μιας ομολογίας που προεξοφλείται με τόκο r, δηλαδή είναι ίση με το πόσο αξίζουν σήμερα τα μελλοντικά μας κέρδη όταν ο προεξοφλητικός τόκος είναι ίσος προς r. Όταν το r είναι υψηλό η τωρινή αξία του μελοντικού μας κέρδους θα είναι χαμηλή επειδή ο τόκος εξφράζει στην ουσία τις προτιμήσεις μας για το παρόν και το μέλλον. Όταν το r είναι υψηλό προτιμούμε το παροόν απο το μέλλον και συνεπώς είναι εύλογο η σημερινή (παρούσα) αξία των μελλοντικών μας απολαβών να είναι χαμηλή. Η τιμή P λοιπόν δεν είναι παρά η προεξοφλημενη αξία, την χρονική στιγμή $t = 0$, όλων των μελλοντικών πληρωμών. Το πρώτο μέρος στον τύπο (6.1) είναι η παρούσα αξία των πληρωμών από τα κουπόνια ενώ το δεύτερο είναι η παρούσα αξία της ονομαστικής αξίας του ομολόγου. Το κουπόνι μπορεί να θεωρήσουμε ότι είναι ένα ποσοστό της ονομαστικής αξίας, δηλαδή $c_i = \alpha\, P_p$.

Πολλά ομόλογα πληρώνουν κουπόνια ανά εξάμηνο. Αν η λήξη του ομολόγου είναι σε n έτη τότε η τιμή του την χρονική στιγμή $t = 0$ θα είναι ίση με

$$P = \sum_{i=1}^{2n} \frac{c_i/2}{(1+r/2)^i} + \frac{P_p}{(1+r/2)^{2n}}$$

όπου θεωρήσαμε ότι η εξαμηνιαία βέβαιη απόδοση είναι ίση με $\frac{r}{2}$. Αν το ομόλογο δεν έχει κουπόνια, δηλαδή είναι όπως λέμε ένα ομόλογο **μηδενικού κουπονιού** (zero coupon bond) τότε στους παραπάνω τύπους απλά αντικαθιστούμε $c_i = 0$.

Η αξία ενός ομολόγου εξαρτάται απο την βέβαιη απόδοση σε μια αγορά.

Παράδειγμα 6.3.1 Ας θεωρήσουμε ένα ομόλογο 20 ετίας το οποίο πλήρωνει κουπόνια 8% ανά εξάμηνο επί της ονομαστικής αξίας του και έχει ονομαστική αξία 1000 ευρώ. Αν η βεβαιη αποδοση είναι 10% ανά έτος βρείτε την τιμή του ομολόγου αυτού. Πως μεταβάλλεται η τιμή του αν μεταβάλλεται η βέβαιη απόδοση r;

Έχουμε να παρατηρήσουμε τα ακόλουθα. Η αξία του ομολόγου στην περίπτωση που το κουπόνι δίνει το 8% της ονομαστικής αξίας ενώ η βέβαιη ετήσια απόδοση είναι 10% είναι 828.4091 ευρώ δηλαδή μικρότερη της ονομαστικής αξίας του. Αν η βέβαιη ετήσια αποδοση πέσει θα ανεβεί και η αξία του ομολόγου.

Επίσης παρατηρούμε ότι η καμπύλη που δίνει την τιμή του ομολόγου σαν συνάρτηση της βέβαιης αποδοσης (σχήμα 6.2) είναι μία κυρτή καμπύλη. Αυτή η ιδιοτητα ονομάζεται κυρτότητα.

6.4 Αποδόσεις των ομολόγων

Ας προσπαθήσουμε να αντιστρέψουμε λίγο την παραπάνω ερώτηση, ταυτόχρονα εγκαταλείποντας και την πολύ περιοριστική μας υπόθεση της ύπαρξης τίτλου βέβαιης απόδοσης r, ή ισοδύναμα της ύπαρξης βέβαιου επιτοκίου r. Συνεπώς, ένα ομόλογο πωλείται σε κάποιο τιμή P η οποία ανακοινώνεται στην αγορά (και υποθέτουμε ότι έχει καθοριστεί με κάποιο μηχανισμό της αγοράς (ενδεχομένως αποτελει κάποια τιμή στην οποία εξισώνεται η προσφορά με την ζήτηση του, δηλαδή είναι κάποια τιμή ισορροπίας ενδεχομένως όχι) και είναι δεδομένες οι πληρωμές που αυτό υποσχεται δηλαδή είναι δεδομένα τα κουπόνια c_i και η ονομαστικη αξία του P_p. Αν η υπόθεση της ύπαρξης βέβαιης απόδοσης r ήταν σωστή θα έπρεπε τα P, c_i, P_p να συνδεόνται με την σχέση (6.1) ή το εξαμηνιαίο ανάλογο της. Φυσικά αυτό δεν συμβαίνει, αλλά παρατηρώντας τις τιμές των ομολόγων σε μία αγορά μπορούμε να θέσουμε την ερώτηση:

> Ποιά βέβαιη (μέση) απόδοση y θα μας έδινε την τιμή ενός ομολόγου όταν είναι γνωστά το ονομαστικό επιτόκιο που αναγράφεται στα κουπόνια του, η λήξη του και η ονομαστική του τιμή;

Για να απαντήσουμε σε αυτό το ερώτημα, αν υποθέσουμε ετήσιες πληρωμές κουπονιών, θα πρέπει να λύσουμε την αλγεβρική εξίσωση

$$P = \sum_{i=1}^{n} \frac{c_i}{(1+y)^i} + \frac{P_p}{(1+y)^n} \tag{6.2}$$

ως προς τον άγνωστο y (θεωρώντας ότι P,P_p, n είναι γνωστά). Την λύση της εξίσωσης αυτής θα την συμβολίζουμε με y απο τον αγγλικό όρο yield που σημαίνει απόδοση. Η εξίσωση αυτή θα πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα αν θεωρήσουμε εξαμηνιαίες πληρωμές κουπονιών.

Στην περίπτωση όπου το ομόλογο δεν δίνει κουπόνια ο υπολογισμός της ποσότητας αυτής μπορεί να γίνει αναλυτικά. Απλή άλγεβρα μας δίνει ότι για ένα ομόλογο μηδενικού κουπονιού

$$y = \left(\frac{P_p}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Αν το ομόλογο πληρώνει και κουπόνια, η αλγεβρική εξίσωση (6.2) μπορεί να λυθεί μόνο αριθμητικά. Ένας τρόπος επίλυσης της είναι χρησιμοποιώντας κάποια επαναληπτική προσεγγιστική διαδικασία π.χ. την διαδικασία Newton-Raphson. Η μέθοδος αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την λύση της αλγεβρικής εξίσωσης $f(x) = 0$. Αν υποθέσουμε ότι η $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη τότε μπορεί να δείξουμε ότι η επαναληπτική διαδικασία

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

κάτω απο ορισμένες συνθήκες συγκλίνει στην λύση της εξίσωσης $f(x) = 0$. Συνεπώς ξεκινώντας απο μία αρχική προσέγγιση x_0 για την λύση της εξίσωσης, χρησιμοποιώντας την επαναληπτική αυτή διαδικασία μέχρις ότου το $\mid x_{n+1} - x_n \mid < \epsilon$ για κάποιο δεδομένο περιθώριο σφάλματος ϵ μπορούμε να πάρουμε μία καλή προσέγγιση της x^* για την οποία $f(x^*) = 0$. Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x)$ δεν είναι ανάγκη να υπολογιστεί αναλυτικά, μπορεί να προσεγγιστεί από την έκφραση $(f(x+dx) - f(x))/dx$ για αρκετά μικρό dx.

Απο τα παραπάνω, φαίνεται ότι ακόμα και αν εγκαταλείψουμε την περιοριστική μας υποθεση, της ύπαρξης βέβαιων αποδοσεων r, και αν θεωρήσουμε οτι οι τιμές των ομολόγων P που παρατηρούνται στην αγορά, αντανακλούν την αβεβαιότητα της αγοράς, και πάλι θα πρέπει να επιδιώξουμε να μάθουμε την 'μέση' απόδοση του ομολόγου y κάνοντας τους παραπάνω υπολογισμούς. Το αποτέλεσμα που θα πάρουμε θα αντανακλά την αβεβαιότητα της αγοράς και εν γένει θα παρουσιάζει διακυμάνσεις.

Το αποτέλεσμα που θα πάρουμε με την μεθοδολογία που περιγράφουμε εδώ ονομάζεται **απόδοση στην λήξη** (yield to maturity). Είναι η αποδοση που προσφέρει ένα ομόλογο αν ο κάτοχος του το κρατήσει μέχρι την λήξη του. Είναι πολύ λογικό να θεωρήσει κανείς ότι ο κάτοχος μπορεί να επιλέξει να το πουλήσει πριν την λήξη του, έχοντας εισπράξει ορισμένα μόνο απο τα κουπόνια. Στην περίπτωση αυτή η απόδοση του ομολόγου θα είναι διαφορετική. Ας κοιτάξουμε λίγο πιο προσεκτικά αυτή την παρατήρηση.

Θα υποθέσουμε για ευκολία ότι μελετάμε ομόλογα μηδενικού κουπονιού, που χωρίς βλάβη της γενικότητας, έχουν ονομαστική αξία $P_p = 1$ και λήξη T. Ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή t ένας επενδυτής αγοράζει ένα τέτοιο ομόλογο. Αν η βέβαιη απόδοση είναι ίση προς r, η τιμή του τίτλου αυτού θα είναι

$$P(t;T) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}}$$

ή για να χρησιμοποιήσουμε τον συμβολισμό που έχει επικρατήσει σήμερα διεθνώς, αν ορίσουμε με $\tau = T - t$ το χρόνο απο την λήξη και θεωρώντας την τιμή σαν μια συνάρτηση του χρόνου t στον οποίο έγινε η αγορά του ομολόγου και του χρόνου τ που απομένει μέχρι την λήξη του έχουμε

$$P(t,\tau) = \frac{1}{(1+r)^{\tau}}.$$

Ας επαναλάβουμε τώρα τα βήματα που κάναμε παραπάνω, και ας υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή t παρατηρούμε στην αγορά ομολόγων την τιμή των ομολόγων μηδενικού κουπονιού και (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ονομαστικής αξίας 1, τα οποία έχουν ακόμα τ έτη μεχρι την λήξη τους. Ας συμβολίσουμε με $P(t,\tau)$ την παρατηρούμενη τιμή των ομολόγων αυτών. Μπορούμε λοιπόν να ρωτήσουμε ποιά θα είναι η απόδοση $y(t,\tau)$ που αντιστοιχεί στις παρατηρούμενες τιμές αυτών των ομολόγων. Η απόδοση αυτή θα είναι λύση της εξίσωσης

$$P(t,\tau) = \frac{1}{(1+y(t,\tau))^{\tau}}.$$

η οποία είναι ίση προς

$$y(t,\tau) = \left(\frac{1}{P}\right)^{\frac{1}{\tau}} - 1.$$

Αν προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε αυτές τις ποσότητες απο τα δεδομένα της αγοράς, θα δούμε ότι το $y(t,\tau)$ εξαρτάται τόσο απο το t όσο και απο το τ. Συνεπώς για να περιγράψουμε πλήρως τις αποδόσεις απο ένα ομόλογο πρέπει να γνωρίζουμε μία συνάρτηση δύο μεταβλητών την $y(t,\tau)$, δηλαδή μία συνάρτηση τόσο της χρονικής στιγμής που μας ενδιαφέρει όσο και του χρόνου που απομένει μέχρι την λήξη του ομολόγου. Αν για δεδομένη χρονική στιγμή t υπολογίσουμε τις αποδοσεις όλων των ομολόγων για διαφορετικές λήξεις T, τότε θα πάρουμε μία καμπύλη $y(t,\tau)$ (σαν συνάρτηση του $\tau = T - t$) η οποία ονομάζεται καμπύλη των αποδοσεων (yield curve). Η καμπύλη αυτή αντανακλά τις συνθήκες που επικρατούν στην αγορά την χρονική περίοδο αυτή, τις πεποιθήσεις των επενδυτών σχετικά με το τι μπορεί να συμβεί κλπ. Φυσικά, οι συνθήκες της αγοράς μεταβάλλονται με τον χρόνο. Αν λοιπόν, μία άλλη χρονική στιγμή $t^{'}$, απο τα δεδομένα της αγοράς (δηλαδή απο τις τιμές που παρατηρούνται για τα ομόλογα διαφορετικών λήξεων T) υπολογίσουμε τις αποδόσεις $y(t^{'},\tau)$ και τις σχεδιάσουμε σαν συνάρτηση του χρόνου που απομένει απο την λήξη ($\tau = T - t^{'}$) θα πάρουμε μία διαφορετική καμπύλη απο την $y(t,\tau)$. Κατά συνέπεια, η πλήρης περιγραφή των αποδόσεων των ομολόγων, απαιτεί την κατασκευή μίας οικογένειας απο καμπύλες $Y_t(\tau)$, μία για κάθε t, για τις οποίες θα ισχύει $Y_t(\tau) = y(t,\tau)$. Η εξάρτηση της απόδοσης (yield) ενός ομολόγου από τον χρόνο μέχρι την ωρίμανση ονομάζεται στην βιβλιογραφία term structure of interest rates. Η καμπύλη $y(t,\tau)$ για δεδομένο t μπορεί να είναι αύξουσα ή φθίνουσα ανάλογα με την περίπτωση, ή μπορεί και να μην παρουσιάζει μονοτονία. Επίσης, η καμπύλη αυτή δεν εξαρτάται μόνο απο τον χρόνο μέχρι την λήξη αλλά και απο τα κουπόνια τα οποία μπορεί να δίνει αυτό το ομόλογο. Το απλούστερο συνήθως είναι να σχεδιάζουμε τις καμπύλες των επιτοκίων (term structure) για ομόλογα με μηδενικά κουπόνια.

Παράδειγμα 6.4.1 Από το φύλλο της Wall Street Journal της 6-3-2002 μπορούμε να δούμε τις αποδόσεις yields των αμερικανικών κρατικών ομολόγων για διαφορετικές λήξεις. Στο σχήμα 6.3 σχεδιάζουμε την καμπύλη των αποδόσεων των ομολόγων για διαφορετικές λήξεις.

Φυσικά τα δεδομένα αυτά μεταβάλλονται και με την συγκεκριμένη χρονική στιγμή την οποία λαμβάνουμε υπόψην, δηλαδή με την συγκεκριμένη χρονικη στιγμή στην οποία έχουμε τις τιμές των ομολόγων. Για παράδειγμα άλλη καμπύλη θα βρούμε για τις αποδόσεις στις 6-3-2002 άλλη στις 7-3-2002 κ.τ.λ.

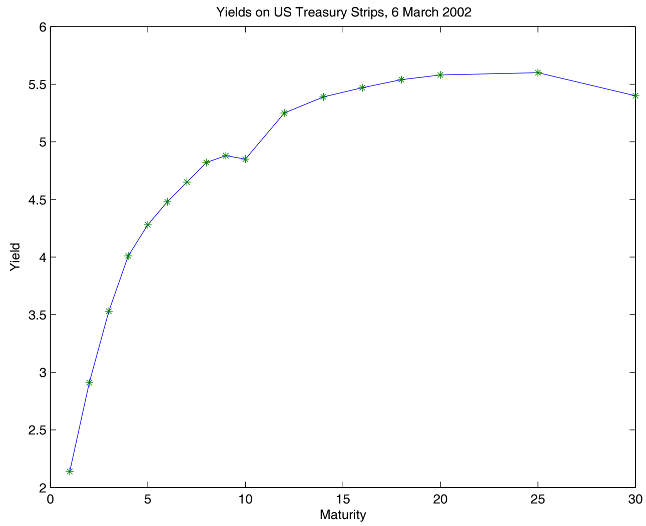
Παράδειγμα 6.4.2 Από την ιστοσελίδα του US Treasury βρήκαμε τις αποδόσεις των Αμερικανικών ομολόγων κατά τον μήνα Μαιο του έτους 2006 για διαφορετικές λήξεις. Στην εικόνα 6.4 σχεδιάζονται οι καμπύλες απόδοσης των ομολόγων αυτών για διαφορετικές ημέρες. Παρατηρούμε ότι η καμπύλη των αποδόσεων είναι διαφορετική κάθε ημέρα.

Οι σχέσεις για τις αποδόσεις των ομολογων μπορεί να απλοποιηθούν αρκετά αν θεωρήσουμε την υποθεση του συνεχούς ανατοκισμού. Κάτω απο την υποθεση αυτή

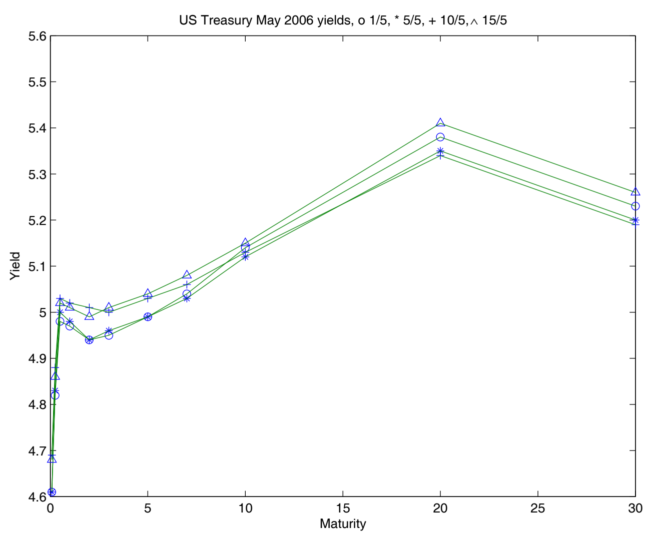
$$y(t,\tau) = -\frac{\ln(P(t,\tau)}{\tau}$$

ή ισοδύναμα

$$P(t,\tau) = \exp\left(-\tau\, y(t,\tau)\right).$$



Σχήμα 6.3: Η καμπύλη των αποδόσεων για τα ομόλογα του Αμερικανικού δημοσίου, 6 Μαρτίου 2002



Σχήμα 6.4: Η καμπύλη των αποδόσεων για τα ομόλογα του Αμερικανικού δημοσίου, τον Μάιο του 2006, για διαφορετικές ημέρες του Μαίου

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και ως συνάρτηση της λήξης T ως εξής

$$y(t,T) = -\frac{\ln(P(t,T)}{T-t}$$

ή ισοδύναμα

$$P(t,T) = \exp\left(-(T-t)\,y(t,T)\right).$$

Η ερμηνεία της σχέσης αυτής είναι, οπως άλλωστε και στην περίπτωση του διακριτού ανατοκισμού, ότι αν επενδύσουμε 1 ευρώ σε ένα ομόλογο λήξης T, για $T-t$ έτη η μέση απόδοση θα είναι $y(t,T)$, για την περίοδο αυτή.

Αν υποθέσουμε ομόλογα που η λήξη τους είναι πολύ κοντινή, δηλαδή αν υποθέσουμε ότι μπορούμε να πάρουμε το όριο $T \to t$ τότε παίρνουμε μια ποσότητα η οποία παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον για την μοντελοποίηση των αποδοσεων των ομολόγων. Η ποσοτητα αυτή οριζεται ως

$$r(t) = \lim_{T\to t} y(t,T) = y(t,t)$$

και ονομάζεται short rate. Η ποσότητα αυτή είναι η στιγμιαία απόδοση μιας επένδυσης (π.χ. η ημερήσια απόδοση που δίνει μια εμπορική τράπεζα) και εν γένει υπόκειται σε διακυμάνσεις.

Απο το short rate μπορούμε να αναπαράγουμε τις τιμές των ομολόγων, αν υποθέσουμε ότι αυτό είναι βέβαιο, σύμφωνα με τον τύπο

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r(s)\,ds\right)$$

Αν υποθέσουμε ότι το short rate υπόκειται σε διακυμάνσεις τότε η τιμή ενός ομολόγου την χρονικη στιγμή t το οποίο πληρώνει 1 ευρώ την χρονική στιγμή T, $t < T$, θα πρέπει να είναι κατά κάποιο τρόπο η καλύτερη δυνατή πρόβλεψη των short rates που θα πραγματοποιηθούν απο την χρονικη στιγμή t και μετά. Η πρόβλεψη αυτή όμως δεν θα πρέπει να γίνει σύμφωνα με την πραγματική κατανομή των σεναρίων σχετικά με τις πραγματοποιήσεις των στιγμιαίων αποδοσεων αλλά χρησιμοποιώντας μια διαφορετική κατανομή των σεναρίων που θα είναι συμβατή με την υπόθεση ότι η αγορά βρίσκεται σε ισορροπία.

6.5 Προθεσμιακά συμβόλαια και προθεσμιακές αποδόσεις

Τέλος ενδιαφέρον έχει να δούμε και μια κατηγορία συμβολαίων, τα οποία ονομάζονται προθεσμιακά συμβόλαια. Τα συμβόλαια αυτά είναι ιδιαίτερα δημοφιλή και είναι συμφωνίες βάσει των οποίων αναλαμβάνεται η υποχρέωση την χρονική στιγμή t να επενδυθεί 1 ευρώ την χρονική στιγμή T το οποίο θα επιστρέφει το ποσό των $\exp((S-T)\,F(t,T,S))$ την χρονική στιγμή S, $t < T < S$. Ένα προθεσμιακό συμβόλαιο λοιπον καθορίζει το επιτόκιο μεταξύ των χρονικών στιγμών T και S απο την χρονική στιγμή t. Η άποδοση $F(t,T,S)$ είναι λοιπόν η προθεσμιακή απόδοση μεταξύ των χρονικών στιγμών T και S, όπως αυτή έχει προκαθοριστεί την χρονική στιγμή $t < T < S$.

Τα προθεσμιακά συμβόλαια χρησιμοποιούνται πολύ στην πράξη και διαπραγματεύονται σε αγορές οι οποίες έχουν εν γένει μεγάλη ρευστότητα. Είναι λογικό να υποθέσουμε ότι οι προθεσμιακές αποδόσεις δεν είναι ανεξάρτητες απο τις αποδόσεις των ομολόγων, γιατί έτσι θα μπορούσε κάποιος να χρησιμοποιήσει τα συμβόλαια αυτά για κερδοσκοπία συνδυάζοντας τα κατάλληλα με τα αντίστοιχα ομόλογα μηδενικού κουπονιού. Μπορεί κανείς να δείξει ότι για να μην υπάρχουν τέτοιες ευκαιρίες κερδοσκοπίας θα πρέπει οι προθεσμιακές αποδόσεις να συνδέονται με τις τιμές των αντιστοίχων ομολόγων μέσω της σχέσης

$$F(t,T,S) = \frac{1}{S-T}\ln\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)}\right)$$

Αν θεωρήσουμε τώρα ότι η λήξη του προθεσμιακού συμβολαίου S είναι κοντά στην αρχή του T, μπορούμε να ορίσουμε την ποσοτητα της στιγμιαίας προθεσμιακής απόδοσης την χρονική στιγμή t, για επένδυση την χρονικη στιγμή T ως

$$f(t,T) = \lim_{S\to T} F(t,T,S) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T)$$

ή ισοδύναμα

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\,ds\right)$$

Το short rate σχετίζεται με τη στιγμιαία προθεσμιακή απόδοση βάσει του τύπου

$$r(t) = f(t,t)$$

6.6 Θεωρίες σχετικά με τις αποδόσεις των ομολόγων

Το θέμα των μεταβολών των καμπυλών των αποδόσεων των ομολόγων έχει απασχολήσει αρκετά τους οικονομολόγους.

Οι ακόλουθες 3 θεωρίες είναι οι πιο επικρατέστερες.

1. **Η υπόθεση των προσδοκιών.** Σύμφωνα με την υπόθεση αυτή η κίνηση των καμπυλών των αποδόσεων θα πρέπει να συνδέεται με τις προσδοκίες σχετικά με την αγορά. Σύμφωνα με την θεωρία αυτή οι αποδόσεις των μακροχρονιων ομολόγων θα πρέπει να ακολουθούν τις προσδοκίες για τα επιτόκια. Για παράδειγμα θα πρέπει να συμβαίνει ότι

$$(1 + y(0,1))\,(1 + \mathbb{E}[y(1,2)]) = (1 + y(0,2))^2$$

   Οι ποσότητες $y(0,1)$, $y(0,2)$ είναι γνωστές την χρονική στιγμή $t = 0$ και η σχέση αυτή μας επιτρέπει να προβλέψουμε τις αποδόσεις των ομολόγων με λήξη 2 την χρονική στιγμή 1.

2. **Η θεωρία της ρευστότητας.** Η θεωρία αυτή είναι παρακλάδι της θεωρίας των προσδοκιών, και υποθέτει επίσης οτι οι επενδυτές ζητούν ένα ‘ασφάλιστρο’ (premium) για να επενδύσουν σε μακροχρόνια ομόλογα το οποίο τους αποζημιώνει για τον κίνδυνο του να έχουν δεσμευμένες τις επενδύσεις τους για μεγάλα χρονικά διαστήματα. Κατά συνέπεια οι αποδόσεις των μακροχρονιων ομολόγων θα πρέπει να είναι πιο υψηλές απο αυτές των βραχυχρόνιων ομολόγων.

3. **Η θεωρία του διαχωρισμού της αγοράς.** Σύμφωνα με την θεωρία αυτή τα διάφορα χρηματοοικονομικά συμβόλαια δεν υποκαθιστούν το ένα το άλλο, και κατά συνέπεια η προσφορά και η ζήτηση για τα μακροχρόνια και τα βραχυχρονια ομόλογα είναι ανεξάρτητες. Η υψηλή ζήτηση των βραχυχρόνιων τίτλων (λόγω του ότι υπάρχουν προτιμήσεις για ρευστότητα στους επενδυτές) θα οδηγήσει σε υψηλές τιμές των τίτλων αυτών και κατα συνέπεια σε χαμηλότερες αποδόσεις τους. Το μειονέκτημα της θεωρίας αυτής είναι οτι αν υποθέσουμε ανεξαρτησία των δύο αυτών αγορών δεν μπορούμε να εξηγήσουμε τις συσχετίσεις που παρατηρούνται πολλές φορές στις κινήσεις των καμπυλών αποδόσεως.

4. **Η θεωρία του προτιμώμενου χώρου (preferred habitat theory).** Σύμφωνα με την θεωρία αυτή διαφορετικοί επενδυτές θα προτιμήσουν διαφορετικές περιοχές της καμπύλης αποδοσεων ανάλογα με το χρονικό ορίζοντα των επενδύσεων τους. Επενδυτές όπως ασφαλιστικές εταιρείες και συνταξιοδοτικά ταμεία θα ενδιαφερθούν για την περιοχή των μακροχρόνιων αποδοσεων, ενώ μικροί επενδυτές ή άλλες εταιρείες θα ενδιαφερθούν για την περιοχή των βραχυχρόνιων αποδόσεων. Οι μεταβολές της καμπύλης των αποδόσεων οφείλονται στις κινήσεις αυτών των επενδυτών οπότε και η μορφή της καμπύλης θα εξαρτάται απο την σχετική πυκνότητα των διαφορετικών αυτών τύπων επενδυτών. Η θεωρία αυτή μπορεί να εξηγήσει τις παράλληλες κινήσεις των καμπυλών των αποδόσεων.

6.7 Κίνδυνοι που σχετίζονται με τα ομόλογα και ποσοτικοποίηση τους

Παρότι εν γένει τα ομόλογα θεωρούνται απο τις πιο ασφαλείς επενδύσεις (π.χ. σε σχέση με τις μετοχές) πάντοτε υπάρχουν κίνδυνοι που σχετίζονται με αυτά. Ορισμένοι απο αυτούς είναι κίνδυνοι που σχετίζονται με την αθέτηση της υπόσχεσης πληρωμής (default, credit risk) , κίνδυνοι που σχετίζονται με τις συναλλαγματικές ισοτιμίες, κίνδυνοι αλλαγής της χρηματορροής από ένα ομόλογο κατά την διάρκεια της ζωής του, κίνδυνοι που σχετίζονται με τον πληθωρισμό κ.α.

Όμως ο πιο σημαντικός κίνδυνος που μπορει να σχετιστεί με τα ομόλογα είναι ο κίνδυνος που σχετίζεται με τα επιτόκια (interest rate risk). Αν για παράδειγμα, κάποιος έχει δεσμεύσει τα χρήματα του σε ένα ομόλογο το οποίο δίνει κουπόνια στα π.χ 8% και τα ονομαστικά επιτόκια ανέβουν τότε αυτός ο επενδυτής θα χάσει εφόσον θα μπορούσε να τοποθετήσει τα χρήματα του σε πιο αποδοτικές επενδύσεις. Στην περίπτωση αυτή αναμένουμε και μία πτώση της τιμής του ομολόγου αυτού.

Οι τιμές των ομολόγων λοιπόν αναμένουμε να είναι ευαίσθητες στις διακυμάνσεις των επιτοκίων. Η ευαίσθησία αυτή είναι λογικό να εξαρτάται και απο την ωρίμανση του ομολόγου. Για παράδειγμα ένα βραχυχρόνιο ομόλογο (δηλαδή ένα ομόλογο που ωριμάζει γρήγορα) θα είναι πιο ασφαλές ως προς τον κίνδυνο που προέρχεται απο τις διακυμάνσεις των επιτοκίων σε σχέση με ένα ομόλογο το οποίο είναι πιο μακροχρόνιο (ωριμάζει αργότερα). Στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε λίγο με την ποσοτικοποίηση του κινδύνου αυτού.

6.7.1 Διάρκεια

Ας υποθέσουμε ότι γνωρίζουμε την τιμή ενός ομολόγου P σαν συνάρτηση της απόδοσης y θεωρώντας όλες τις άλλες παραμέτρους του (π.χ. τα κουπόνια και την ωρίμανση) σταθερές. Ο κίνδυνος που σχετίζεται με τα επιτόκια, μπορεί να εκφρασθεί με την μεταβολή της αξίας του ομολόγου σε σχέση με την μεταβολή της απόδοσης y. Μία τέτοια ποσοτητα θα μπορούσε να ήταν η παράγωγος $\frac{\partial P}{\partial y}$ αλλά ένα τέτοιο μέτρο εξαρτάται από την μονάδα μέτρησης της αξίας του ομολόγου και δεν είναι πολύ εύχρηστη.

Ένα καλύτερο μέγεθος για την μέτρηση του κινδύνου που σχετίζεται με τα επιτοκια είναι η διάρκεια κατα Macaulay (Macaulay duration)D.

Ορισμός 6.7.1 *Για ένα ομόλογο το οποίο πληρώνει κουπόνια αξίας c κάθε χρονική περίοδο για n περιόδους και την n περίοδο δίνει και την ονομαστική αξία P_p η διάρκεια κατά Macaulay είναι η ποσότητα*

$$D = \frac{1}{P}\left(\frac{1\times c}{(1+y)} + \frac{2\times c}{(1+y)^2} + \frac{3\times c}{(1+y)^3} + \cdots + \frac{n\times(c+P_p)}{(1+y)^n}\right) \tag{6.3}$$

Το μέγεθος αυτό μπορεί να θεωρηθεί σαν ένας δείκτης της απόκρισης της αξίας του ομολόγου στην απόδοση y και είναι ένας καλός δείκτης γιατί δεν εξαρτάται από την χρηματική μονάδα στην οποία μετράμε την αξία του ομολόγου. Το μέγεθος αυτό αντιθέτως έχει εκφρασθεί σε μονάδες χρονου και δεν μετράει μόνο τις πληρωμές που γίνονται αλλά και το πότε αυτές πραγματοποιούνται.

Ο δείκτης αυτός μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$\begin{aligned} D &= \sum_{t=1}^{n} w_t t \\ w_t &= \frac{1}{P}\frac{c}{(1+y)^t} \end{aligned}$$

όπου τα w_t έχουν την ιδιοτητα

$$\sum_{t=1}^{n} w_t = 1$$

Τα w_t μπορεί να θεωρηθούν σαν σταθμίσεις που δίνουν τον λόγο της παρούσας αξίας του κουπονιού που θα αποφέρει το ομόλογο την χρονική στιγμή t ως προς την παρούσα αξία του. Αν λοιπόν εκφράσουμε τον δείκτη του Macaulay με την μορφή αυτή μπορούμε να δούμε οτι εκφράζει περίπου τον μέσο χρονο (σταθμισμένο κατάλληλα) μέχρι την είσπραξη των εκάστοτε πληρωμών του ομολόγου. Μία ακραία περίπτωση είναι τα ομόλογα μηδενικού κουπονιού για τα οποία $D = n$ δηλαδή η διάρκεια ισούται με την λήξη. Για τα ομόλογα με κουπόνια η διάρκεια είναι μικροτερη απο την λήξη. Υπό αυτό το πρίσμα, η διάρκεια μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα μέγεθος της αναμενόμενης λήξης του ομολόγου, δηλαδή σαν ένα μέγεθος του χρονικού ορίζοντα που το ομόλογο θα έχει αποπληρώσει την αξία του. Άρα αναμένουμε η διάρκεια να είναι ένα βασικό μέγεθος στην διαχείριση χαρτοφυλακίων με ομόλογα.

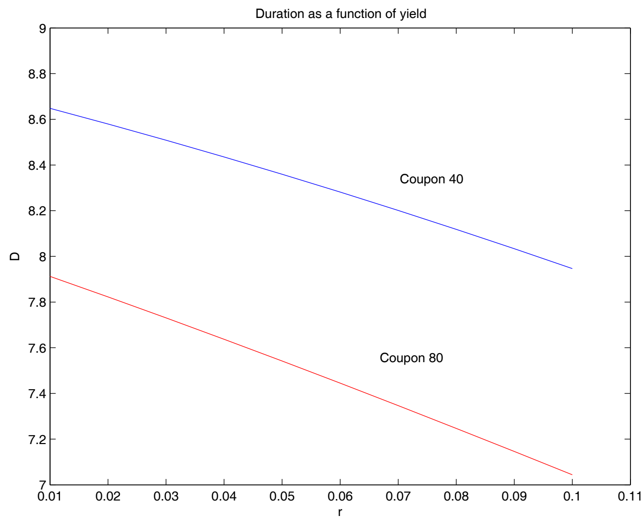
Κάνοντας χρήση του τύπου (6.3) μπορούμε να υπολογίσουμε το D για διαφορετικά ομόλογα και να κάνουμε τις ακολουθες γενικές παρατηρήσεις

- Για ομόλογα τα οποία έχουν την ίδια απόδοση μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το D μειώνεται με την αύξηση του κουπονιού. Αυτό συμβαίνει γιατί μεγαλύτερο μέρος από τη συνολικη χρηματοροή έρχεται συντομότερα με την μορφή πληρωμών κουπονιών.

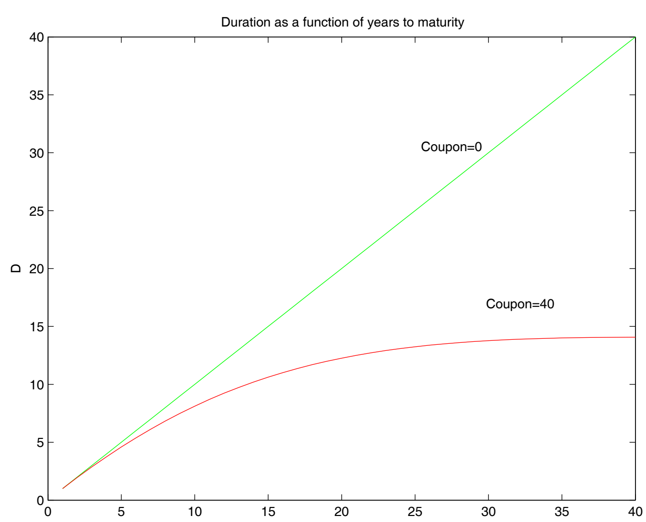
- Τα ομόλογα μηδενικού κουπονιού, έχουν $D = n$ όπου n ειναι η λήξη.

- Η αύξηση του χρόνου απο την λήξη αυξάνει το D

- Η αύξηση της απόδοσης στην λήξη εν γένει μειώνει το D



Σχήμα 6.5: Η διάρκεια σαν συνάρτηση της απόδοσης για διαφορετικά κουπόνια.



Σχήμα 6.6: Η διάρκεια σαν συνάρτηση του χρόνου ως την λήξη για διαφορετικά κουπόνια.

Η μεταβολή της διάρκειας με την απόδοση και τον χρονο που απομένει ως την λήξη δίνεται στις εικόνες 6.5 και 6.6.

Με την χρήση στοιχειώδους διαφορικού λογισμού μπορούμε να δούμε ότι το D σχετίζεται με το $\frac{\partial P}{\partial y}$ με την ακόλουθη σχέση

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -\frac{D}{1+y}. \tag{6.4}$$

Η σχέση (6.4) είναι πολύ σημαντική γιατί συσχετίζει την μεταβολή της τιμής (αξίας) ενός ομολόγου, με την μεταβολή της απόδοσης του. Ο συντέλεστης που συνδέει αυτές τις δύο μεταβολές είναι η διάρκεια κατά Macaulley D διαιρεμένη με την απόδοση. Όσο πιο μεγάλο είναι το D τόσο πιο μεγάλη είναι η απόκριση της τιμής του ομολόγου στις μεταβολές της απόδοσης, δηλαδή τόσο πιο ευαίσθητη θα είναι η αξία του ομολόγου P στις μεταβολές της αποδοσης y. Αντίθετα όσο πιο μικρή είναι η διάρκεια D του ομολόγου, τόσο λιγότερο ευαίσθητη θα είναι η αξία του P ως προς τις μεταβολές της απόδοσης y. Εφόσον οι μεταβολες της απόδοσης σχετίζονται με τις διακυμάνσεις των επιτοκίων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την διάρκεια σαν ένα ποσοτικό μέτρο για τον κίνδυνο των ομολόγων ως προς τις διακυμάνσεις των επιτοκίων.

Παράδειγμα 6.7.1 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα ομόλογο 10ετίας, το οποίο έχει ονομαστική αξία 1000 ευρώ και πληρώνει ετήσια κουπόνια των 40 ευρώ. Η αποδόσεις θεωρούμε ότι είναι $y = 8\%$. Ποιά θα είναι η μεταβολή της αξίας του ομολόγου αν έχουμε μία πτώση των αποδόσεων στο $y^{'} = 7.8\%$;

Θα υπολογίσουμε πρώτα την διάρκεια του ομολόγου αυτού. Μία απλή εφαρμογή του τύπου (6.3) για $n = 10, y = 0.08, P_p = 1000, c = 40$ μας δίνει ότι $D = 8.1184$. Επίσης η τιμή του ομολόγου θα είναι $P = 731.5967$ ευρώ. Συνεπώς,

$$\Delta P = -D\,\frac{1}{1+y}\,P\,\Delta y = -8.1184 \times \frac{1}{1.08} \times 731.5967\,(-0.002) = 10.9989,$$

δηλαδή θα έχουμε μία αύξηση της τιμής του ομολόγου κατά 10.9989 ευρώ. Αν υπολογίσουμε την μεταβολή της τιμής του ομολόγου ακριβώς παίρνουμε $\Delta P = 11.1039$, άρα η γραμμική προσέγγιση της μεταβολής, κάνοντας χρήση της διάρκειας είναι μια αρκετά καλή προσέγγιση της μεταβολής της τιμής του ομολόγου. Προσπαθείστε να επαναλάβετε το παράδειγμα αυτό στην περίπτωση όπου τα κουπόνια είναι $c = 80$ ευρώ ετησίως. Τι παρατηρείτε;

Πολλές φορές χρησιμοποιούμε και ένα εναλλακτικό ορισμό της διάρκειας, την **τροποποιημένη διάρκεια**.

Ορισμός 6.7.2 *Η τροποποιημένη διάρκεια (modified duration) ενός ομολόγου είναι η ποσότητα $D_m = \frac{D}{1+y}$. Η τροποποιημένη διάρκεια του ομολόγου δινει την σχέση της μεταβολής της απόδοσης με την μεταβολή της τιμής του ομολόγου ως εξής*

$$\frac{\partial P}{\partial y}\frac{1}{P} = -D_m$$

Παράδειγμα 6.7.2 Επαναλάβετε το παράδειγμα 6.7.1 κάνοντας χρήση της τροποποιημένης διάρκειας. Το αποτέλεσμα είναι $D_m = 7.5171$ και

$$\Delta P = -D_m\,P\,\Delta y = -7.5171 \times 731.5967 \times (-0.002) = 10.9989,$$

δηλαδή το ίδιο όπως και προηγουμένως.

Η χρήση του D ή του D_m μας επιτρέπει να δημιουργήσουμε ένα χαρτοφυλάκιο ομολόγων, το οποίο να εξουδετερώνει τον κίνδυνο που σχετίζεται με τις διακυμάνσεις των αποδόσεων.

6.7.2 Κυρτότητα

Η διάρκεια μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να ποσοτικοποιήσει τις μεταβολές της τιμής των ομολόγων εξαιτίας των μικρών διακυμάνσεων των αποδόσεων, και στην ουσία δεν είναι τίποτε άλλο από την γραμμική προσέγγιση της καμπύλης $P = P(y)$ από την εφαπτομένη της σε ένα σημείο y. Όπως είναι φυσικό, η προσέγγιση αυτή αν και μπορεί να είναι επαρκής για να ποσοτικοποιήσει τις μεταβολές των τιμών των ομολόγων για μικρές μεταβολές των αποδόσεων, σίγουρα δεν είναι επαρκής για να περιγράψει την μεταβολή των τιμών για μεγάλες μεταβολές των αποδόσεων. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να λάβουμε υπόψη την μη γραμμικότητα της καμπύλης $P(y)$ και να ποσοτικοποιήσουμε με κάποιο μέτρο τις αποκλίσης της καμπύλης $P(y)$ απο την ευθεία. Ένα μέτρο το οποίο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ποσοτικοποίηση του κινδύνου σε χαρτοφυλάκια με ομόλογα για μεγάλες μεταβολές των αποδόσεων είναι η **κυρτότητα** (convexity).

Ορισμός 6.7.3 *Η* **κυρτότητα** *για κάποιο ομόλογο ορίζεται ως η ποσότητα*

$$C = \frac{1}{P}\frac{d^2P}{dy^2}$$

Η κυρτότητα είναι ένα μέτρο της καμπυλότητας της σχέσης μεταξύ τιμής και απόδοσης δηλαδή μας δείχνει το πόσο η καμπύλη αυτή αποκλίνει απο μια ευθεία γραμμή. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι είναι ένα μέτρο της μεταβολής του D ως συνάρτηση του y.

Η μεταβολή της τιμής ενός ομολόγου ΔP, εξαιτίας της μεταβολής των αποδόσεων του κατά Δy δίνεται τώρα απο την τετραγωνική σχέση

$$\Delta P = -D_m\, P\, \Delta y\, +\, \frac{1}{2}\, C\, P\, (\Delta y)^2.$$

Η σχέση αυτή προκύπτει απο την εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor στην συνάρτηση $P(y)$, για τον προσεγγιστικό υπολογισμό της ποσότητας $P(y+\Delta y) - P(y)$.

Η κυρτότητα μπορεί επίσης να υπολογιστεί αναλυτικά με την χρήση του τύπου

$$C = \frac{1}{P}\frac{1}{(1+y)^2}\left[\sum_{t=1}^{n}\frac{c_i}{(1+y)^t}(t^2+t) + \frac{P_p}{(1+y)^n}(n^2+n)\right]. \tag{6.5}$$

Ο τύπος αυτός προκύπτει απο την παραγώγιση του τύπου (6.2) που συνδέει την τιμή του ομολόγου P με την απόδοση y, ως προς την απόδοση. Αν θεωρήσουμε κουπόνια εξαμηνιαία ο τύπος πρέπει να τροποποιηθεί κατάλληλα.

Παράδειγμα 6.7.3 Υπολογίστε την κυρτότητα για ένα ομόλογο 10ετίας με ονομαστική αξία 1000 ευρώ το οποίο πληρώνει ετήσια κουπόνια 40 εύρω όταν οι αποδόσεις είναι στο 8%. Με βάση αυτό υπολογίστε την μεταβολή της τιμής του ομολόγου αν οι αποδόσεις έχουν μία πτώση στο 7.5%.

Στο τύπο (6.5) αντικαθιστούμε $n = 10$, $P_p = 1000$, $c = 40$ και μετά απο πράξεις βρίσκουμε ότι $C = 71.2235$. Απο τα παραδείγματα 6.7.1 και 6.7.2 γνωρίζουμε ότι $P = 731.5967$ και ότι $D_m = 7.5171$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \Delta P &= -D_m\, P\, \Delta y\, +\, \frac{1}{2}\, C\, P\, (\Delta y)^2 \\ &= -7.5171\, \times 731.5967\, (-0.005)\, +\, \frac{1}{2}\, \times\, 71.2235\, \times\, 731.5967\, \times\, (-0.005)^2 = 28.1488 \end{aligned}$$

Αν υπολογίσουμε ακριβώς την μεταβολή της τιμής θα έχουμε:

$$\Delta P = P(0.075) - P(0.8) = 28.1604$$

Η γραμμική προσέγγιση θα μας έδινε

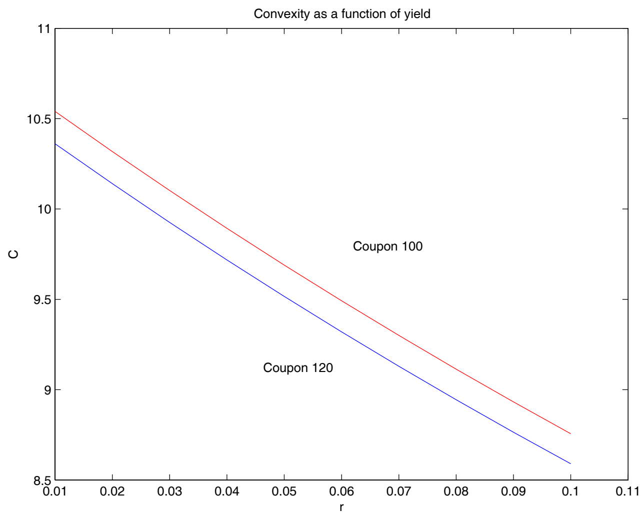
$$(\Delta P)_{lin} = -D_m\, P\, \Delta y = 27.4974$$

δηλαδή θα υποτιμούσε την άνοδο της αξίας του ομολόγου λόγω της πτώσης των αποδοσεων.

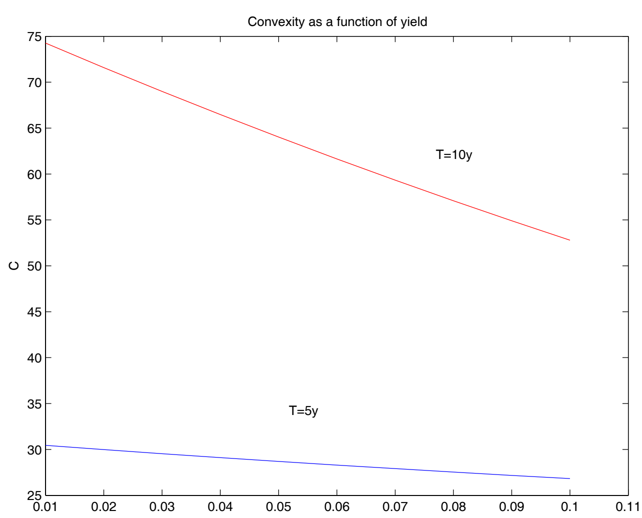
Οι ακόλουθες σχέσεις ισχύουν για την κυρτότητα.

- Χαμηλά κουπόνια αντιστοιχούν σε υψηλότερη κυρτότητα.
- Υψηλότερες λήξεις δίνουν και υψηλότερη κυρτότητα.
- Υπάρχει αντίστροφη σχέση μεταξύ απόδοσης και κυρτότητας.

Ορισμένες απο τις σχέσεις αυτές φαίνονται στα σχήματα 6.7 και 6.8 όπου σχεδιάζεται η κυρτότητα σαν συνάρτηση της απόδοσης, στην πρώτη φορά για διαφορετικό ύψος κουπονιών και την δεύτερη για διαφορετική λήξη.



Σχήμα 6.7: Η κυρτότητα σαν συνάρτηση της απόδοσης για διαφορετικά κουπόνια.



Σχήμα 6.8: Η κυρτότητα σαν συνάρτηση της απόδοσης για διαφορετικες λήξεις.

6.7.3 Χρήση των μέτρων αυτών για τον υπολογισμό του κινδύνου θέσεων απο ομόλογα

Η σχέση

$$\Delta P = -D_m \, P \, \Delta y \, + \, \frac{1}{2} \, C \, P \, (\Delta y)^2. \tag{6.6}$$

μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να συσχετίσει τις μεταβολές στις αποδόσεις με την μεταβολή της αξίας μιας θέσης σε ομόλογα.

Οι καμπύλες των αποδόσεων των ομολόγων είναι τυχαίες μεταβλητές, οποτε και οι μεταβολές των αποδόσεων (της καμπύλης των αποδόσεων) είναι και αυτές τυχαίες μεταβλητές. Συγκεκριμένα αν γνωρίζουμε την κατανομή του Δy χρησιμοποιώντας τον τύπο (6.6) μπορούμε να βρούμε την κατανομή της τυχαίας μεταβλητής ΔP. Απο την κατανομή αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε διάφορα μέτρα κινδύνου π.χ. την διασπορά ή τον δυνητικό κίνδυνο (αξία σε κίνδυνο, value at risk).

Αν υποθέσουμε ότι οι μεταβολές των αποδόσεων είναι κανονικά κατανεμημένες, τοτε η γραμμική προσέγγιση

$$\Delta P = -D_m \, P \, \Delta y \tag{6.7}$$

μας εξασφαλίζει ότι και οι μεταβολές της αξίας της θέσης του χαρτοφυλακίου των ομολογων που επάγονται απο αυτή την μεταβολή των αποδόσεων θα ακολουθούν και αυτές την κανονική κατανομή, κατά συνέπεια μπορούμε να υπολογίσουμε την διασπορά του ΔP απο την διασπορά του Δy.

Η μη γραμμική προσέγγιση δημιουργεί προβλήματα ως προς την χρήση της κανονικής κατανομής τα οποία μπορεί να λυθούν σχετικά εύκολα με την χρήση μεθοδων προσομοίωσης.

6.8 Μοντέλα για τις αποδόσεις των ομολόγων

Είναι πολύ χρήσιμο για διάφορες εφαρμογές να μπορούμε να μοντελοποιήσουμε και να προβλέψουμε τις καμπύλες των αποδόσεων των ομολόγων. Φυσικά, αυτό είναι ένα αρκετά δύσκολο πρόβλημα που απαιτεί προχωρημένες τεχνικές απο την στατιστική και απο την θεωρία των στοχαστικών διαδικασιών.

Συνήθως, στα μοντέλα των αποδόσεων των ομολόγων μοντελοποιούνται οι προθεσμιακές αποδόσεις ή οι στιγμιαίες προθεσμιακές αποδόσεις $f(t,T)$. Ένας απο τους λόγους που γίνεται αυτό είναι επειδή η αγορά των προθεσμιακών συμβολαίων προσφέρει μεγάλη ρευστότητα, έχουμε μεγάλο αριθμό δεδομένων τα οποία και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε για την βαθμονόμηση των στατιστικών μας μοντέλων.

Η ποσότητες $f(t,T)$ είναι τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες εξαρτώνται τόσο απο την χρονική στιγμή που μας ενδιαφέρει όσο και απο την λήξη του ομολόγου. Μία αρκετά διαδεδομένη κατηγορία μοντέλων για τις $f(t,T)$ είναι τα παραμετρικά μοντέλα. Σύμφωνα με αυτά, θεωρούμε ότι τα $f(t,T) = f(t,\tau)$ μπορεί να περιγραφούν απο οικογένειες συναρτήσεων δύο μεταβλητών $t, \tau = T - t$ οι οποίες παραμετροποιούνται απο μία σειρά παραμέτρων $\mathbf{z} = (z_1, z_2, \cdots, z_N)$ δηλαδή ότι $f(t,\tau) = f(t,\tau;\mathbf{z})$. Το ποιό ακριβώς απο τα μέλη αυτής της οικογένειας θα επιλεγεί το καθορίζουμε με διαδικασίες προσαρμογής (fitting) βασιζόμενοι στα δεδομένα της αγοράς. Οι διαδικασίες αυτές είναι τυπικές διαδικασίες της παραμετρικής στατιστικής. Μία διαδεδομένη οικογένεια μοντέλων για τον σκοπό αυτό είναι η οικογένεια συναρτήσεων των Nelson και Siegel που χρησιμοποιεί 4 παραμέτρους και αποτελείται απο συναρτήσεις της μορφής

$$f_{NS}(t,\tau;\mathbf{z}) = z_1 + (z_2 + z_3 \, \tau) \, e^{-z_4 \, \tau}$$

όπου οι παράμετροι z_1, z_2, z_3, z_4 θεωρούνται ότι εξαρτώνται απο την χρονικη στιγμή t που γίνεται η εκτίμηση του μοντέλου. Το μοντέλο αυτό είναι ικανό να δίνει τόσο κυρτές όσο και κοίλες καμπύλες αποδόσεων. Η οικογένεια αυτή χρησιμοποιείται απο διάφορες τράπεζες και οργανισμούς για την μοντελοποίηση των καμπύλων αποδόσεων, κυρίως στην Ιταλία και την Φινλανδία.

Μια άλλη κατηγορία μοντέλων είναι αυτή για τις οποίες θεωρούμε ότι γνωρίζουμε τις αποδόσεις $y(t,T;\omega)$ σαν μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών για δεδομένο T και για μεταβαλλόμενο t. Συνεπώς, αν έχουμε δεδομένη ωρίμανση των ομολόγων την χρονική στιγμή T, θεωρούμε ότι οι αποδόσεις y είναι μία οικογένεια τυχαίων μεταβλητών (που εξαρτώνται απο τις καταστάσεις της οικονομίας) όπου για κάθε διαφορετικό t έχουμε και ένα διαφορετικό μέλος της οικογένειας. Με άλλα λόγια μοντελοποιούμε τις αποδόσεις για δεδομένη ωρίμανση των ομολόγων με την χρήση της θεωρίας των στοχαστικών διαδικασιών. Τέτοιου τύπου μοντέλα θα συναντήσουμε παρακάτω για τις μετοχές. Εδώ αρκούμαστε να αναφέρουμε ότι τα μοντέλα αυτά μας καθορίζουν την κατανομή των $y(t,T;\omega)$ για δεδομένο t. Τα μοντέλα αυτά συνήθως ξεκινούν απο την μοντελοποίηση του short rate $r(t)$, και απο την ποσότητα αυτή παράγουν τις υπόλοιπες ποσοτητες που χρειάζονται. Σαν παράδειγμα μπορούμε να φέρουμε π.χ. το μοντέλο του Dothan σύμφωνα με το οποίο η $r(t;\omega)$ ικανοποιεί την λογαριθμικοκανονική κατανομή και συγκεκριμένα $\ln r(t;\omega) \sim N(\alpha t, \beta t)$ για κατάλληλα επιλεγμένα α, β και για δεδομένο T.

6.9 Το διωνυμικό μοντέλο για τις αποδόσεις των ομολόγων

Θα παρουσιάσουμε τώρα πως το διωνυμικό μοντέλο μπορεί να εφαρμοστεί για την μελέτη των αποδοσεων των ομολόγων ή την μελέτη της καμπύλης των αποδοσεων. Η γνώση της εξέλιξης της καμπύλης των αποδόσεων είναι πολύ βασική για τον υπολογισμό της τιμής διαφόρων χαρτοφυλακίων ομολόγων, της τιμής διαφόρων παραγώγων συμβολαίων που σχετίζονται με ομόλογα, την διαχείριση κινδύνου χαρτοφυλακίων ομολόγων κ.α.

Η διατύπωση του μοντέλου προυποθέτει τις τιμές των ομολόγων και τις τιμές των διαφόρων προθεσμιακών συμβολαίων ή τις διάφορες προθεσμιακές αποδοσεις.

Με $P(t,T)$ συμβολίζουμε την τιμή την χρονικη στιγμή t ενός ομολογου που αποδίδει 1 την χρονική στιγμή T $(t < T)$.

Με $F(t,T^*,T)$, $t < T^* < T$ συμβολίζουμε την τιμή ενός προθεσμιακού συμβολαίου βάσει του οποίου την χρονική στιγμή t συμφωνούμε να δώσουμε το ποσό $F(t,T^*,T)$ την χρονική στιγμή T^* για να μας παραδωθεί ένα ομόλογο με λήξη T.

Μπορεί κανείς να δείξει εύκολα ότι

$$F(t,T^*,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,T^*)}$$

Η βασική υποθεση του μοντέλου είναι ότι

$$P(1,T) = \begin{cases} u(0,T)\,\frac{P(0,T)}{P(0,1)} = u(0,T)\,F(0,1,T), & \omega = u \\ d(0,T)\,\frac{P(0,T)}{P(0,1)} = d(0,T)\,F(0,1,T), & \omega = d \end{cases}$$

δηλαδή ότι υπάρχουν 2 πιθανές καταστάσεις της οικονομίας ως προς τις αποδοσεις, η ανοδική και η καθοδική.

Το ίδιο σενάριο συνεχίζεται και τις επόμενες χρονικές στιγμές, δηλαδή

$$P(t+1,T) = \begin{cases} u(t,T-t)\,\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} = u(t,T-t)\,F(t,t+1,T), & \omega = u \\ d(t,T-t)\,\frac{P(t,T)}{P(t,t+1)} = d(t,T-t)\,F(t,t+1,T), & \omega = d \end{cases}$$

Για απλοποίηση της διαδικασίας θεωρούμε ότι τα $u(t,T-t)$, $d(t,T-t)$ δεν εξαρτώνται ούτε απο τις τιμές των ομολόγων ούτε απο τις χρονικές στιγμές t, δηλαδή $u(t,T-t) = u(T-t)$ και $d(t,T-t) = d(T-t)$. Αυτό μας φέρνει σε ένα μοντέλο το οποίο μοιάζει με το διωνυμικό μοντέλο.

Θα πρέπει να επιλεγούν τα $u(T), d(T)$ κατά τέτοιο τρόπο ώστε το μοντέλο να μην παρουσιάζει ευκαιρίες για arbitrage. Η επιλογή αυτή μπορεί να γίνει ως ακολούθως

$$u(T) = \frac{1-(1-q)\ d(T)}{q},\ \ 0 < q < 1$$

Για λόγους περισσοτερο υπολογιστικούς θα κατασκευάσουμε ένα διωνυμικό μοντέλο το οποίο είναι επανασυνδεόμενο (recombining)). Ας συμβολίσουμε με $P_i(t,T)$ την τιμή την χρονική στιγμή t ενος ομολόγου του οποίο αποδίδει 1 την χρονική στιγμή T δεδομένου ότι έχουν προηγηθεί i καθοδικές κινήσεις της οικονομίας και $t-i$ ανοδικές κινήσεις της οικονομίας μεταξύ των χρονικών στιγμών 0 και t. Το ζητούμενο είναι να σχεδιαστεί το μοντέλο κατα τέτοιο τρόπο ώστε οι τιμές να εξαρτώνται μόνο απο τον συνολικό αριθμό ανοδικών και καθοδικών κινήσεων και όχι απο την σειρά με την οποία αυτές εμφανίζονται, δηλαδη π.χ. οι τιμές για την συνολική κίνηση της οικονομίας $u-d$ και οι τιμές για την συνολική κίνηση της οικονομίας $d-u$ θα πρέπει να ταυτίζονται. Με άλλα λόγια το μοντέλο δίνει αποτελέσματα τα οποία καθορίζονται απο την κατάσταση της οικονομίας και όχι απο τον τρόπο (το μονοπάτι) το οποίο μας οδήγησε στην κατάσταση αυτή.

Αυτό μας οδηγεί στο να έχουμε ότι

$$\frac{d(T)}{u(T)} = k^{T-1},\ \ 0 < k < 1$$

όπου

$$k = \frac{P_1(1,2)}{P_0(1,2)} = \frac{d(2)}{u(2)}$$

κατά συνέπεια όλο το μοντέλο μπορεί να κατασκευαστεί με την γνώση μόνο μιας παραμέτρου της παραμέτρου k. Αυτή μπορεί να υπολογιστεί απο στοιχεία της αγοράς.

Η συνθήκη απουσίας arbitrage προυποθέτει ότι

$$q\,u(T) + (1-q)\,d(T) = 1$$

για κάποιο $0 < q < 1$ οπότε

$$u(T) = \frac{1}{(1-q)\,k^{T-1} + q}, \;\; d(T) = \frac{k^{T-1}}{(1-q)\,k^{T-1} + q}$$

Το μοντέλο αυτό μπορεί να μας δώσει όλα τα πιθανά σενάρια σχετικά με τις τιμές και τις αποδόσεις των ομολόγων στις διαφορετικές πιθανές καταστάσεις της οικονομίας.

Έχοντας το μοντέλο για τα $P(t,T)$ μπορούμε στην συνέχεια να πάρουμε τις τιμές των προθεσμιακών συμβολαίων και τις καμπύλες των προθεσμιακών αποδόσεων. Αυτό μπορεί να γίνει με χρήση των τύπων

$$F(t,T-1,T) = ln\left(\frac{P(t,T-1)}{P(t,T)}\right)$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να κατασκευάσουμε το short rate απο τον τύπο

$$r(t) = F(t,t,t+1)$$

Το $r(t)$ που προβλέπεται απο το μοντέλο αυτό αντιστοιχεί σε ένα τυχαίο περίπατο με σταθερή μεταβλητότητα και ταχύτητα που μεταβάλλεται χρονικά.

Επίσης μπορούμε να κατασκευάσουμε και την καμπύλη των αποδοσεων με την χρήση του τύπου

$$R(t,T) = -\frac{ln(P(t,T))}{T-t}$$

Κεφάλαιο 7

Εισαγωγή στην θεωρία χαρτοφυλακίου

7.1 Εισαγωγή

Ο σκοπός του κεφαλαίου αυτού είναι μία εισαγωγή στην ποσοτική θεωρία χαρτοφυλακίου. Η ποσοτική θεωρία χαρτοφυλακίου, είναι αυτό το κομμάτι της χρηματοοικονομικής επιστήμης που χρησιμοποιεί τα μαθηματικά εργαλεία της **θεωρίας βελτιστοποίησης** για το σχεδιασμό χαρτοφυλακίων τα οποία ικανοποιούν ορισμένες ιδιότητες π.χ. ως προς τον κίνδυνο που αναλαμβάνουν, ως προς τις αποδόσεις κ.α. Μία εξοικείωση με την ποσοτική θεωρία χαρτοφυλακίου είναι απαραίτητη για την κατανόηση του τρόπου λειτουργίας των χρηματοπιστωτικών οργανισμών σήμερα.

7.2 Κάποιοι ποσοτικοί δείκτες για τα χαρτοφυλάκια

Θα ξεκινήσουμε θεωρώντας, χάριν απλούστευσης, μια χρηματοοικονομική αγορά στην οποία συναλλασονται χρηματοοικονομικοί τίτλοι σε δύο[1] χρονικές περιόδους ($t = 0$ και $t = 1$). Στην οικονομία αυτή θεωρούμε ότι υπάρχει αβεβαιότητα, οπότε την χρονική στιγμή $t = 1$ μπορεί να πραγματοιηθεί μόνο μία απο ένα σύνολο πιθανών καταστάσεων της οικονομίας (είτε διακριτών είτε συνεχών), όπου την χρονική στιγμή $t = 0$ δεν γνωρίζουμε ποιά θα είναι, αλλά έχουμε μόνο μια εκτίμηση της πιθανότητας πραγματοποίησης της κάθε κατάστασης.

Η χρήση των τίτλων είναι να μεταφέρουν αξία και πλούτο, απο την χρονική στιγμή $t = 0$ στην χρονική στιγμή $t = 1$ και απο την κατάσταση της οικονομίας την χρονική στιγμή $t = 0$ σε οποιαδήποτε απο τις πιθανές καταστάσεις της οικονομίας που θα πραγματοποιηθεί την χρονική στιγμή $t = 1$. Συνεπώς, ο τίτλος αγοράζεται ή πωλείται σε μία αγορά (οργανωμένη ή μη) την χρονικη στιγμή $t = 0$ για να ενεργοποιηθεί την χρονική στιγμή $t = 1$ ανάλογα με τις ανάγκες του ατόμου και την κατάσταση της οικονομίας που θα πραγματοποιηθεί. Ένας οποιοσδήποτε τίτλος χαρακτηρίζεται απο δύο ποσότητες. Την τιμή στην οποία συναλλάσεται την χρονική στιγμή $t = 0$, και η οποία φυσικά είναι πλήρως γνωστή την χρονική αυτή στιγμή (ντετερμινιστική), και την απολαβή που θα αποφέρει στον κάτοχο του την χρονική στιγμή $t = 1$. Η τελευταία εξαρτάται εν γένει απο την κατάσταση του κόσμου που θα πραγματοποιηθεί την χρονική στιγμή $t = 1$, κατά συνέπεια δεν είναι γνωστή με ακρίβεια την χρονική στιγμή $t = 0$ στην οποία θα γίνει και η συναλλαγή του τίτλου, άρα είναι μια τυχαία μεταβλητή. Η τυχαία αυτή μεταβλητή μπορεί να καθοριστεί πλήρως μόνο απο την ιστορία της αγοράς μέχρι και την χρονικη στιγμή $t = 1$. Στην συνέχεια, θα συμβολίζουμε την τιμή του τίτλου την χρονική στιγμή $t = 0$ με $P(0)$ και την απολαβή απο αυτόν την χρονικη στιγμή $t = 1$ με V, και θεωρώντας ότι η τιμή του τίτλου την χρονικη στιγμή $t = 1$ θα είναι ίση με την απολαβή που αυτός θα αποφέρει στον κάτοχο του θα γράφουμε ισοδύναμα $P(1) = V$ όπου $P(1)$ είναι η τιμή του τίτλου για $t = 1$. Τονίζουμε ξανά προς αποφυγή παρεξηγήσεων οτι $P(0)$ είναι (ντετερμινιστικός) πραγματικός αριθμός, ενώ $P(1) = V$ είναι τυχαία μεταβλητή, η ακριβής τιμή της οποίας καθορίζεται μόνο για $t = 1$. Αν υποθέσουμε ότι στην αγορά αυτή έχουμε N το πλήθος τίτλους, τους οποίους θα ονοματίζουμε με τον δείκτη $i = 1, \cdots, N$, για να τους ξεχωρίζουμε, θα συμβολίζουμε με $P_i(0)$, $P_i(1) = V_i$ την τιμή και τις απολαβές απο τον τίτλο i αντίστοιχα. Τέλος αν ω συμβολίζει την κατάσταση της οικονομίας που έχει πραγματοποιηθεί την χρονικη στιγμή $t = 1$, θα γράφουμε $P_i(1; \omega) = V_i(\omega)$ την απολαβή απο τον τίτλο i την χρονικη στιγμή $t = 1$ δεδομένου ότι έχει πραγματοποιηθεί η κατάσταση της οικονομίας ω. Αν το σύνολο των καταστάσεων της οικονομίας είναι διακριτό

[1] Μία υπόθεση που δεν δημιουργεί κανένα πρόβλημα σε αυτή την φάση και που θα χαλαρώσουμε πολύ σύντομα.

$S = \{\omega\} = \{1, 2, \cdots, S\}$ θα χρησιμοποιούμε εναλλακτικά τον συμβολισμό $P_i^s(1) = V_i^s$ για την απολαβή απο τον τίτλο i στην κατάσταση της οικονομίας $\omega = s$.

Ένα δεύτερο βασικό χαρακτηριστικό ενός τίτλου είναι η απόδοση του. Ένα ποσοτικό μέγεθος για την απόδοση είναι το

$$R_i = \frac{P_i(1) - P_i(0)}{P_i(0)} = \frac{V_i - P_i(0)}{P_i(0)}.$$

Το μέγεθος αυτό είναι μια τυχαία μεταβλητή η οποία μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές. Όσο πιο μεγαλύτερη είναι η απόδοση ενός τίτλου, τόσο πιο πολύ μας ενδιαφέρει ο τίτλος αυτός γιατί παρέχει περισσότερα κέρδη. Φυσικά όπως θα δούμε πολύ σύντομα το κριτήριο της απόδοσης δεν είναι επαρκές απο μόνο του ως κριτήριο επιλογής ενός τίτλου.

Αν βέβαια αυτό ήταν επαρκές, θα μπορούσαμε να κλείσουμε εδώ αυτές τις διαλέξεις και να γυρίσουμε χαρούμενοι στην εργασία μας κανόντας διαιρέσεις και ψάχνοντας τίτλους με το μεγαλύτερο R_i. Όπως θα δούμε στην ενότητα 7.3 αυτό δεν είναι επαρκές γιατί πρέπει να λάβουμε υπ' όψιν και την έννοια του **κινδύνου** που ενέχει στην απόδοση ενος τίτλου.

Ας υποθέσουμε τώρα προς στιγμή ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο μία συλλογή απο N τίτλους που περιγράφεται απο το διάνυσμα $\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_N)$. Αν η τιμή του κάθε τίτλου είναι $P_i(0)$ και $P_i(1)$ αντίστοιχα τις χρονικές περιόδους 0 και 1, η συνολική αξία του χαρτοφυλακίου την χρονική στιγμή 0 θα είναι το άθροισμα

$$P(0) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i P_i(0)$$

και αντίστοιχα για την χρονικη στιγμή $t = 1$

$$P(1) = \sum_{i=1}^{N} \theta_i P_i(1)$$

Η απόδοση του χαρτοφυλακίου μπορεί να εκφραστεί απο τον λόγο

$$R = \frac{P(1) - P(0)}{P(0)}$$

Για να πάρουμε πιο κομψές εκφράσεις για τις ποσότητες που μπορεί να χαρακτηρίσουν τις αποδόσεις ενός χαρτοφυλακίου, πολλές φορές είναι προτιμητέο να χρησιμοποιήσουμε αντί για το θ το διάνυσμα $w = (w_1, w_2, \cdots, w_N)$ το οποίο αποτελείται απο τις συνιστώσες

$$w_i = \frac{\theta_i P_i(0)}{P(0)}$$

Αυτή η ποσότητα εκφράζει το ποσοστό της συνολικής αξίας του χαρτοφυλακίου που έχει επενδυθεί στον τίτλο i. Η ποσότητα αυτή παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1, 1]$ και αποτελεί ένα σχετικό μέγεθος που μπορεί να χαρακτηρίσει την σύσταση του χαρτοφυλακίου. Θα ονομάζουμε την ποσότητα αυτή **σχετική θέση**. Είναι πολύ εύκολο να δούμε ότι τα σχετικά βάρη θα πρέπει να ικανοποιούν τον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

Χρησιμοποιώντας απλή άλγεβρα μπορεί να δείξουμε ότι για την συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου ισχύει

$$R = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{x_i P_i(0)}{P(0)} \right) R_i$$

με άλλα λόγια

$$R = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i$$

Βλέπουμε ότι η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ο γραμμικος συνδυασμός των αποδόσεων του κάθε τίτλου, αλλά τα βάρη είναι οι σχετικές θέσεις του χαρτοφυλακίου σε κάθε τίτλο. Η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι μια τυχαία μεταβλητή.

Όπως είναι φυσικό η συνολική απόδοση του χαρτοφυλακίου εξαρτάται απο την σύνθεση του. Αν στο παραπάνω παράδειγμα είχαμε συνθέσει ένα διαφορετικό χαρτοφυλάκιο απο τους ίδιους τίτλους θα μπορούσαμε να είχαμε θετική συνολική απόδοση.

Μπορούμε τώρα χαλαρώσουμε την υπόθεση μας ότι οι οικονομικές συναλλαγές λαμβάνουν χώρα σε δύο χρονικές περιόδους και να θεωρήσουμε πολλές περιόδους T. Η μόνη διαφορά τότε είναι οτι οι τιμές των τίτλων θα συμβολίζονται ως $P_i(t)$, $t = 0, 1, \cdots, T$ και θα πρέπει να ορίζουμε αποδόσεις για κάθε μια χρονική στιγμή, δηλαδή θα έχουμε

$$R_i(t) = \frac{P_i(t+1) - P_i(t)}{P_i(t)}$$

το οποίο θα συμβολίζει την απόδοση του τίτλου i την χρονική περίοδο $[t, t+1]$. Θα επιτρέψουμε επίσης και το να μεταβάλλεται η δομή του χαρτοφυλακίου στον χρόνο, τυπικά θα θεωρήσουμε ότι ένας επενδυτής παίρνει μία θέση $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \cdots, x_N(t))$ την χρονική περίοδο t την οποία θα κρατήσει για το διάστημα $[t, t+1]$. Αμέσως μετά (την χρονική στιγμή $t + 1 + \epsilon$ όπου ϵ μικρός θετικός αριθμός) θα έχει την δυνατότητα να αναδιαρθρώσει το χαρτοφυλάκιο του παίρνοντας μια νέα θέση $x(t+1) = (x_1(t+1), x_2(t+1), \cdots, x_N(t))$. Η σύμβαση μας θα είναι ότι η αξία του χαρτοφυλακίου την χρονικη στιγμή t θα είναι

$$P(t) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t) P_i(t)$$

ενώ την χρονική στιγμή $t + 1$ θα είναι

$$P(t+1) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t) P_i(t+1)$$

Αν υποθέσουμε οτι η αναδιάρθρωση του χαρτοφυλακίου γίνεται χωρίς την προσθήκη άλλου χρηματικού ποσού στο χαρτοφυλάκιο τότε το χαρτοφυλάκιο $x(t+1)$ θα πρέπει να ικανοποιεί την συνθήκη

$$P(t+1) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t) P_i(t+1) = \sum_{i=1}^{N} x_i(t+1) P_i(t+1)$$

Ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο ονομάζεται **αυτοχρηματοδοτούμενο χαρτοφυλάκιο** και είναι πολύ χρήσιμο για την θεωρία των χρηματοοικονομικών. Οι έννοιες της αποδόσεως θα περιέχουν και αυτές χρονικη εξάρτηση και ορίζονται ανάλογα με τον τρόπο που ορίζονται οι τιμές.

7.3 Ένα πρώτο μέτρο κινδύνου

Για την καλή διαχείριση των κινδύνων πρέπει πρώτα να μπορέσουμε να τους μετρήσουμε. Για να γίνει αυτό πρέπει να ορίσουμε κάποιο μέτρο του κινδύνου, δηλαδή μία άριθμητική΄ συνάρτηση που να αξιολογεί το πόσο επικίνδυνη είναι κάποια επένδυση.

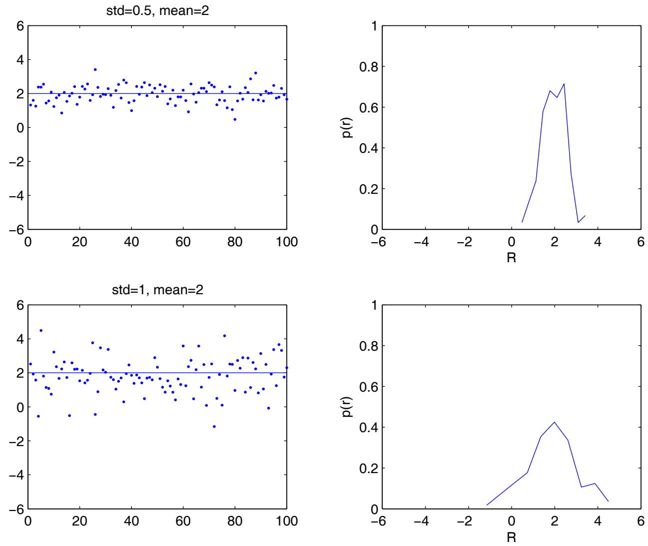
Η έννοια του κινδύνου είναι συνειφασμένη με την άγνοια της απόδοσης R_i την χρονική στιγμή $t = 0$. Μια ποσότητα που ενδιαφέρει τον επενδυτή είναι η αναμενόμενη απόδοση από το περιουσιακό στοιχείο, δηλαδή η μέση τιμή της απολαβής.

Ας υποθέσουμε ότι οι καταστάσεις της οικονομίας είναι διακριτές, μπορεί να ονοματιστούν ως $s = 1, \cdots, S$, και η πιθανότητα εμφάνισης της κατάστασης s είναι p_s.

Ορισμός 7.3.1 (Αναμενόμενη απόδοση (I)**)** *Αν R_i^s είναι η απόδοση από το περιουσιακό στοιχείο i στην κατάσταση της οικονομίας s η αναμενόμενη απόδοση είναι το άθροισμα*

$$\mathbb{E}[R_i] = \sum_{s} R_i^s p_s$$

Ας υποθέσουμε ότι οι καταστάσεις της οικονομίας είναι συνεχείς και αυτό αντικατοπτρίζεται στο ότι το περιουσιακό στοιχείο i έχει αποδόσεις που μπορεί να πάρουν συνεχείς τιμές και που είναι κατανεμημένες με μία κατανομή πιθανότητας με πυκνότητα $f_i(r)$.



Σχήμα 7.1: Η τυπική απόκλιση σαν μέτρο κινδύνου, η περίπτωση της κανονικής κατανομής.

Ορισμός 7.3.2 (Αναμενόμενη απόδοση (II)**)** *Η αναμενόμενη απόδοση από το περιουσιακό στοιχείο i είναι το ολοκλήρωμα*

$$\mathbb{E}[R_i] = \int r\, f_i(r)\, dr.$$

Το πιο απλό μέτρο του κινδύνου είναι ένα μέτρο του πόσο μπορεί να αποκλίνει μία συγκεκριμένη πραγματοποίηση της απόλαβής ή της απόδοσης του περιουσιακού στοιχείου (δηλαδή η απολαβή ή η απόδοση σε κάποια συγκεκριμένη κατάσταση του κόσμου) από την αναμενόμενη τιμή. Αυτό εκφράζεται από την διασπορά της τυχαίας μεταβλητής που δίνει την απόδοση ή την απολαβή.

Αν οι καταστάσεις της οικονομίας είναι διακριτές:

Ορισμός 7.3.3 (Διασπορά της απόδοσης (I)**)** *Η διασπορά της απόδοσης δίνεται από τον τύπο*

$$Var(R_i) = \mathbb{E}[(R_i - \mathbb{E}[R_i])^2] = \sum_s (R_i^s - \mathbb{E}[R_i])^2 p_s$$

Αν η απόδοση είναι συνεχώς κατανεμημένες με πυκνότητα πιθανότητας $f_i(r)$:

Ορισμός 7.3.4 (Διασπορά της απόδοσης (II)**)** *Η διασπορά της απόδοσης θα δίνεται από τον τύπο*

$$Var(R_i) = \int (r - \mathbb{E}[R_i])^2 f_i(r) dr$$

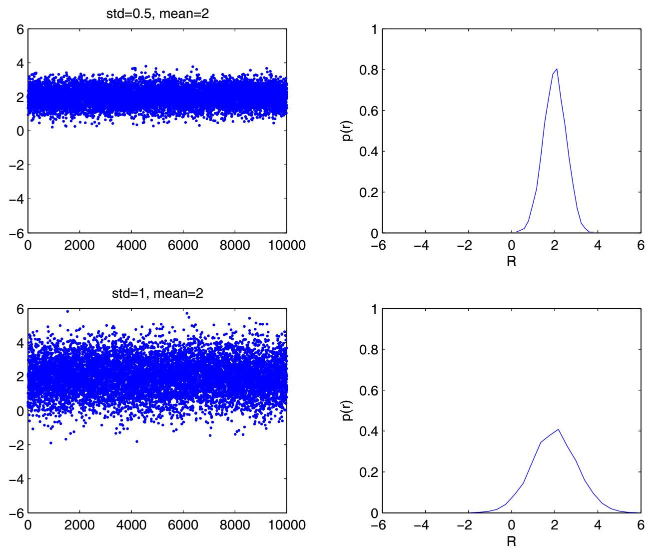
Η διασπορά σχετίζεται με την τυπική απόκλιση σ_i:

Ορισμός 7.3.5 (Η τυπική απόκλιση) *Η τυπική απόκλιση ορίζεται ως $\sigma_i^2 = Var(R_i)$.*

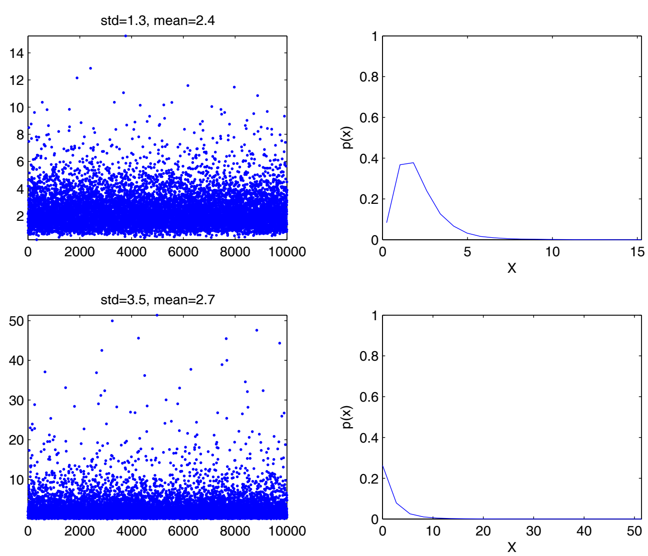
Στο σχήμα 7.1 σχεδιάζουμε τις πιθανές τιμές που μπορεί να πάρει μία τυχαία μεταβλητή γύρω από την μέση τιμή της που είναι 2. Στο επάνω σχήμα η τυχαία μεταβλητή έχει τυπική απόκλιση 0.5 ενώ στο κάτω σχήμα η τυχαία μεταβλητή έχει τυπική απόκλιση 1. Στα διπλανά σχήματα παρουσιάζεται η συνάρτηση πυκνότητας κατανομής πιθανότητας. Βλέπουμε ότι στην περίπτωση όπου η διασπορά είναι 1 η συνάρτηση αυτή είναι πιο πλατειά, και δίνει μεγαλύτερη πιθανότητα τόσο σε μεγάλες θετικές, ή σε μεγάλες αρνητικές αποδόσεις.

Στο σχήμα 7.2 κάνουμε το ίδιο για περισσότερες παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής που εκφράζει την απόδοση. Βλέπουμε ότι το ιστόγραμμα δίνει τώρα μια πιο λεία κατανομή πιθανότητας. Η κατανομή αυτή μοιάζει με την κανονική κατανομή.

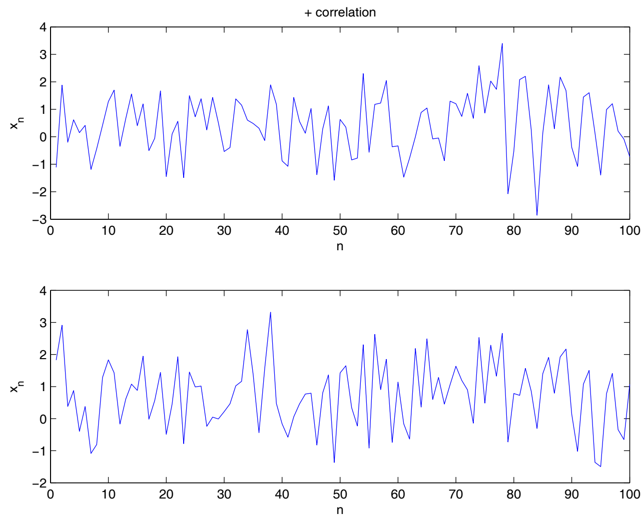
Στο σχήμα 7.3 κάνουμε το ίδιο για παρατηρήσεις της τυχαίας μεταβλητής που εκφράζει την τιμή ενός τίτλου, ο οποίος ακολουθεί την λογαριθμικοκανονική κατανομή. Η κατανομή αυτή έχει στήριγμα στον θετικό ημιάξονα και παρουσιάζει πιο μεγάλη ουρά απο την κανονική κατανομή.



Σχήμα 7.2: Η τυπική απόκλιση σαν μέτρο κινδύνου, η περίπτωσητης κανονικής κατανομής.



Σχήμα 7.3: Η τυπική απόκλιση σαν μέτρο κινδύνου, η περίπτωση της λογαριθμικοκανονικής κατανομής.



Σχήμα 7.4: Πραγματοποιήσεις αποδόσεων τίτλων με θετική διακύμανση

Σημαντικό μέγεθος είναι και το πως μεταβάλλονται οι αποδόσεις του ενός τίτλου σαν συνάρτηση των αποδόσεων κάποιου άλλου τίτλου. Αυτό μετριέται από την συνδιακύμανση των αποδόσεων του τίτλου.

Αν οι καταστάσεις της οικονομίας είναι διακριτές:

Ορισμός 7.3.6 (Συνδιακύμανση της απόδοσης (II)**)** *Η συνδιακύμανση της απόδοσης δίνεται από τον τύπο*

$$Cov(R_i, R_j) = \mathbb{E}[(R_i - E[R_i])(R_j - \mathbb{E}[R_j])] = \sum_s (R_i^s - \mathbb{E}[R_i])(R_j^s - \mathbb{E}[R_j])p_s$$

Αν οι καταστάσεις της οικονομίας είναι συνεχείς και αυτό αντικατοπτρίζεται στο ότι οι αποδόσεις των τίτλων i και j είναι συνεχώς κατανεμημένες με απο κοινού πυκνότητα πιθανότητας $f_{ij}(r, r')$:

Ορισμός 7.3.7 (Συνδιακύμανση της απόδοσης (II)**)** *Η συνδιακύμανση των αποδόσεων θα δίνεται από τον τύπο*

$$Cov(R_i, R_j) = \int\int (r - \mathbb{E}[R_i])(r' - \mathbb{E}[R_j]) f_{ij}(r, r') dr\, dr'$$

Ένα άλλο ενδιαφέρον μέγεθος είναι ο συντελεστής συσχέτισης:

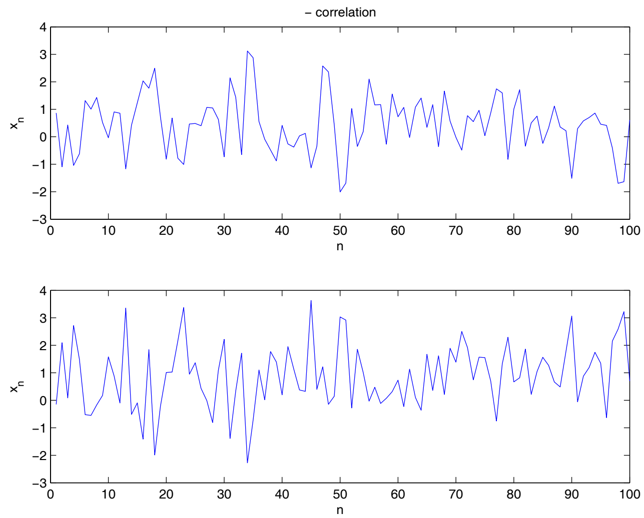
Ορισμός 7.3.8 (Ο συντελεστής συσχέτισης) *Ο συντελεστής συσχέτισης (συνδιακύμανσης) ορίζεται απο την σχέση* $\sigma_{ij} = \frac{Cov(R_i, R_j}{\sigma_i \sigma_j}$.

Θετική συνδιακύμανση σημαίνει ότι οι τιτλοι i και j έχουν μεγάλη πιθανοτητα να παρουσιάζουν ταυτόχρονα θετικές αποκλίσεις ή αρνητικές αποκλίσεις απο την αναμενόμενη τιμή τους. Δηλαδή, στις περισσότερες καταστάσεις του κόσμου, αν ο τιτλος i παρουσιάζει τιμές π.χ. της απόδοσης οι οποίες είναι μεγαλύτερες από την αναμενόμενη τιμή τότε και ο τίτλος j θα παρουσιάζει επίσης τιμές οι οποίες θα είναι μεγαλύτερες της αναμενόμενης τιμής. Αντίστοιχα αν ο τιτλος i παρουσιάζει τιμές μικρότερες της αναμενόμενης τιμής τότε και ο τίτλος j αναμενεται στις καταστάσεις αυτές να παρουσιάζει τιμές μικρότερες της αναμενόμενης. Λέμε τότε ότι οι τίτλοι i και j κινούνται μαζί. Αρνητική συνδιακύμανση σημαίνει το αντίθετο φαινόμενο, δηλαδή αντίθετες κινήσεις των τίτλων i και j.

Αυτό φαίνεται στο σχήμα 7.4 όπου παρουσιάζονται οι πραγματοποιήσεις των αποδόσεων δύο τιτλων οι οποίοι έχουν θετική συνδιακύμανση και στο σχήμα 7.5 όπου παρουσιάζονται οι πραγματοποιήσεις των αποδόσεων δύο τίτλων που παρουσιάζουν αρνητική συνδιακύμανση.

7.4 Η έννοια της διαφοροποίησης

Το μοντέλο του Markowitz είναι ένα από τα πρώτα μοντέλα το οποίο χρησιμοποίησε την έννοια του κινδύνου για την επιλογή χαρτοφυλακίου. Συγκεκριμένα είναι ένα μοντέλο επιλογής του χαρτοφυλακίου το οποίο θα αποφέρει



Σχήμα 7.5: Πραγματοποιήσεις αποδόσεων τίτλων με αρνητική διακύμανση

συγκεκριμένη συνόλικη απόδοση με τον ελάχιστο δυνατό κίνδυνο, όπου σαν μέτρο του κινδύνου χρησιμοποιείται η διασπορά της απόδοσης.

Για να μοντελοποιήσουμε την ύπαρξη του κινδύνου θεωρούμε ότι οι αποδόσεις των διαφόρων τίτλων είναι τυχαίες μεταβλητές R_i οι οποίες ακολουθούν ορισμένες κατανομές (είτε διακριτές είτε συνεχείς). Ένα χαρτοφυλάκιο είναι μία συλλογή από περιουσιακά στοιχεία η απόδοση του οποίου είναι μια τυχαία μεταβλητή που εκφράζεται σαν τον γραμμικό συνδυασμό (σταθμισμένο άθροισμα) των τυχαίων μεταβλητών R_i,

$$R = \sum_{i=1}^{N} w_i R_i.$$

Η συνολική αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι

$$\mathbb{E}[R] = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbb{E}[R_i]$$

Σαν μέτρο του συνολικού κινδύνου, ο Markowitz πρότεινε την διασπορά της τυχαίας μεταβλητής R. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των αθροισμάτων τυχαίων μεταβλητών, η συνολική διασπορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου είναι ίση προς

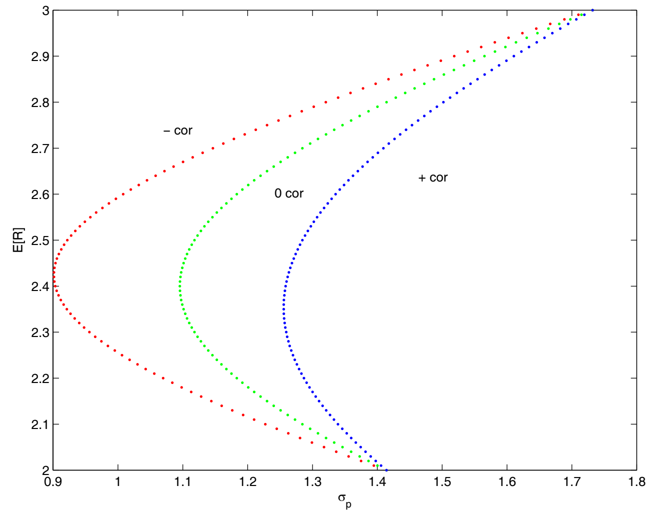
$$Var(R) = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 Var(R_i) + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, i\neq j}^{N} w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

Η σχέση αυτή μπορεί να γραφεί και συναρτήσει των τυπικών αποκλίσεων των αποδόσεων των τίτλων στην ακόλουθη μορφή:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{N} w_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1, i\neq j}^{N} w_i w_j Cov(R_i, R_j)$$

Ο τύπος αυτός μας δίνει να κατανοήσουμε τα θετικά αποτελέσματα της διαφοροποίησης (diversification). Οι ποσότητες $Cov(R_i, R_j)$ παίρνουν θετικες και αρνητικές τιμές ανάλογα με το αν ο τίτλος i και ο τίτλος j έχουν μεταβολές οι οποίες κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση ή προς την αντίθετη κατεύθυνση. Αν δηλαδή πραγματοποιήσεις τιμών του R_i οι οποίες είναι μεγαλύτερες από την μέση τιμή έχουν μεγάλη πιθανότητα να οδηγήσουν και σε πραγματοποιήσεις τιμών του R_j οι οποίες θα είναι μεγαλύτερες από την αναμενόμενη τιμή τότε η ποσότητα $Cov(R_i, R_j)$ θα είναι θετική. Λέμε ότι οι τίτλοι αυτοί είναι θετικά συσχετισμένοι. Το αντίθετο φαινόμενο θα οδηγούσε σε τίτλου που είναι αρνητικά συσχετισμένοι.

Από τον τύπο που δίνει την διασπορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου βλέπουμε ότι αν στο χαρτοφυλάκιο έχουμε χρησιμοποιήσει τίτλους οι οποίοι είναι αρνητικά συσχετισμένοι, τότε η συνολική διασπορά θα είναι μικρότερη από το αν είχαμε χρησιμοποιήσει τίτλους οι οποίοι είναι θετικά συσχετισμένοι. Αυτό οφείλεται στο ότι αν έρθει



Σχήμα 7.6: $\mathbb{E}[R]$-σ_p για χαρτοφυλάκιο δύο τίτλων και διαφορετικές συσχετίσεις μεταξύ των τίτλων

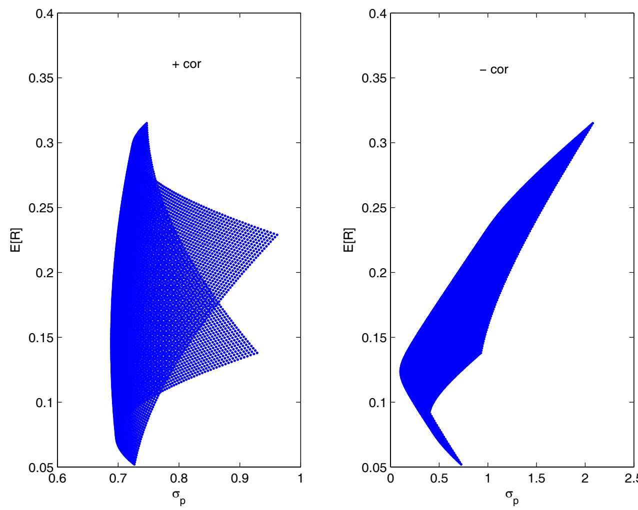
μία κατάσταση του κόσμου στην οποία πχ ο τίτλος i θα έχει αποδόσεις μικρότερες της αναμενόμενης απόδοσης του, ο τίτλος j θα έχει μεγάλη πιθανότητα να έχει απόδοση μεγαλύτερη της αναμενόμενης, λόγω της αρνητικής συσχέτισης του με το τίτλο i. Αυτό θα οδηγήσει στην μείωση της συνολικής διασποράς. Με τα λόγια του ίδιου του Markowitz

> ... it is generally more likely for firms within the same industry to do poorly at the same time than for firms in dissimilar industries

Στο σχήμα 7.6 βλέπουμε την συνολική διασπορά της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται απο δύο τίτλους σαν συνάρτηση της συνολικής αναμενόμενης αποδόσεως του. Κάθε σημείο της καθεμιάς καμπύλης αντιστοιχεί σε μία επιλογή των βαρών του χαρτοφυλακίου (w_1, w_2) (για τα οποία φυσικά ισχύει ο περιορισμός $w_1 + w_2 = 1$. Η αριστερή καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου οι δύο τίτλοι είναι αρνητικά συσχετισμένοι, η μεσαία καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου οι τίτλοι δεν είναι συσχετισμένοι μεταξύ τους και η δεξιά καμπύλη αντιστοιχεί στην περίπτωση όπου οι τίτλοι είναι θετικά συσχετισμένοι μεταξύ τους. Παρατηρούμε ότι για δεδομένη τιμή του $E[R]$ μπορούμε να επιτύχουμε την ελάχιστη διασπορά, δηλαδή τον ελάχιστο κίνδυνο στην περίπτωση όπου οι τίτλοι είναι αρνητικά συσχετισμένοι μεταξύ τους. Στην κατασκευή του σχήματος αυτού θεωρήσαμε ότι δεν επιτρέπονται οι ανοικτές θέσεις, δηλαδή ότι $w_1, w_2 \in [0, 1]$. Η εικόνα αυτή θα αλλάξει κάπως αλλά όχι σημαντικά αν υποθέσουμε ότι επιτρέπονται οι ανοικτές θέσεις.

Η βασική αυτή εικόνα δεν θα αλλάξει επίσης και αν θεωρήσουμε χαρτοφυλάκια τα οποία περιέχουν περισσότερους των δύο τίτλων. Για παράδειγμα στο σχήμα 7.7 δείχνουμε το ίδιο αποτέλεσμα αλλά για χαρτοφυλάκια τα οποία αποτελούνται από 3 διαφορετικούς τίτλους. Στο αριστερό σχήμα έχουμε το αποτέλεσμα για θετικά συσχετισμένους τίτλους και στο δεξιό σχήμα έχουμε το αποτέλεσμα για αρνητικά συσχετισμένους τίτλους. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση των αρνητικών συσχετίσεων μπορούμε να πάρουμε την ίδια αναμενόμενη απόδοση με μικρότερο κίνδυνο (μικρότερη διασπορά).

Ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο έχει συνολική διασπορά που μειώνεται όσο περισσότεροι τίτλοι περιέχονται σε αυτό. Αυτό μπορεί να φανεί απο την ακόλουθη παρατήρηση. Ας πάρουμε ένα καλά διαφοροποιημένο χαρτοφυλάκιο δηλαδή ένα χαρτοφυλάκιο για το οποίο ισχύει $w_i = \frac{1}{N}$ για κάθε i. Σε ένα τέτοιο χαρτοφυλάκιο έχουμε μοιράσει τον πλούτο μας ίσα σε όλους τους διατιθέμενους τίτλους. Η συνολική διασπορά του χαρτοφυλακίου



Σχήμα 7.7: $\mathbb{E}[R]$-σ_p για χαρτοφυλάκιο τριών τίτλων και διαφορετικές συσχετίσεις μεταξύ των τίτλων

μπορεί να γραφεί ως

$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 = Var(P) &= \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{N}\frac{1}{N}\sum_{i=1}\sigma_i^2 + \frac{N-1}{N}\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, j\neq i}^{N}\sigma_{ij} \\
&= \frac{1}{N}\bar{\sigma}^2 + \frac{N-1}{N}\bar{c} \\
&= \bar{c} + \frac{1}{N}(\bar{\sigma}^2 - \bar{c})
\end{aligned}$$

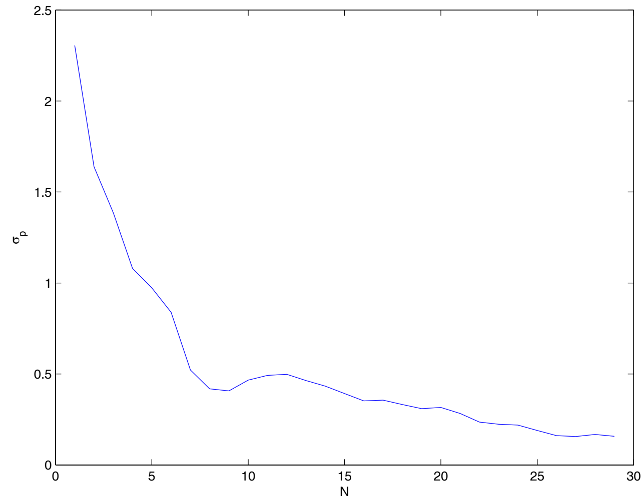
Ο όρος $\bar{\sigma}^2$ αντιπροσωπεύει τον μέσο όρο των διασπορών των αποδόσεων των N τίτλων. Ο όρος $\bar{c}$ αντιπροσωπεύει τον μέσο όρο των $N(N-1)$ συνδιακυμάνσεων του τίτλου i (όπου $i = 1, \cdots, N$) με τους υπόλοιπους $N-1$ τίτλους $j \neq i$. Όσο μεγαλώνει το N ο δεύτερος όρος μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρός και για μεγαλο αριθμό τίτλων ο συνολικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου θα είναι ίσος προς την μέση συνδιακύμανση $\bar{c}$.

Η παρατήρηση αυτή φαίνεται στο σχήμα 7.8 στο οποίο βλέπουμε ότι η συνολική διασπορά του χαρτοφυλακίου μειώνεται με την αύξηση του αριθμού των τίτλων. Η συνολική διασπορά δεν θα γίνει ποτέ μηδενική! Το κομμάτι που δεν θα εξαφανιστεί ποτέ αντιστοιχεί στον κίνδυνο ο οποίος δεν είναι διαφοροποιήσιμος και ο οποίος ονομάζεται συστηματικός κίνδυνος. Θα επανέλθουμε σε αυτό το θέμα αργότερα.

7.5 Το πρόβλημα του *Markowitz*

7.5.1 Μαθηματική περιγραφή και επίλυση

Το πρόβλημα του Markowitz είναι η επιλογή του χαρτοφυλακίου το οποίο για δεδομένη μέση απόδοση δίνει την ελάχιστη διασπορά. Με άλλα λόγια, είναι η επιλογή ενός χαρτοφυλακίου το οποίο με τον ελάχιστο δυνατό κίνδυνο, θα μας δίνει μία σταθερή αναμενόμενη απόδοση.



Σχήμα 7.8: σ_p για χαρτοφυλάκιο N τίτλων

Το προβλημα αυτό μαθηματικά μπορεί να εκφραστεί ως εξής:

$$\min_{\{w_i\}} \sum_{i=1}^{N} w_i^2\sigma_i^2 + \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1, i\neq j}^{N} w_i\, w_j\, Cov(R_i, R_j)$$

υπό τους περιορισμούς

$$\mu = \sum_{i=1}^{N} w_i E[R_i]$$

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

για δεδομένα $\mathbb{E}[R_i]$,$\sigma_i^2 = \mathbb{E}[(R_i - E[R_i])^2]$, $Cov(R_i, R_j)$ και $\mu \in \mathbb{R}$.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με την χρήση της συνάρτησης Lagrange

$$L = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij} w_i w_j + \lambda_1(\sum_{i=1}^{N} w_i E[R_i] - \mu) + \lambda_2(\sum_{i=1}^{N} w_i - 1)$$

όπου λ_1, λ_2 είναι πολλαπλασιαστές του Lagrange που θα καθοριστούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί.

Το πρόβλημα αυτό μπορεί να γραφεί και με πιο συμπαγή μορφή χρησιμοποιώντας πίνακες. Η εναλλακτική μορφή του προβλήματος είναι

$$\min_{w} w^{'}\Sigma w$$

υπό τους περιορισμούς

$$w^{'}M = m$$

$$w^{'}\mathbf{1} = 1$$

όπου $\Sigma = (\sigma_{ij})$ είναι ο πίνακας $N \times N$ που περιέχει τις συσχετίσεις μεταξύ των αποδόσεων των τίτλων, $M = (\mathbb{E}[R_1], \cdots, \mathbb{E}[R_N])$ και $\mathbf{1}$ είναι το διάνυσμα που έχει N συνιστώσες από τις οποίες όλες είναι μονάδες.

Οι συνθήκες πρώτης τάξης για την Lagrangian

$$L = w^{'}\Sigma w + \lambda_1(w^{'}M - m) + \lambda_2(w^{'}\mathbf{1} - 1)$$

δίνουν

$$\Sigma w = -\frac{1}{2}(\lambda_1 M + \lambda_2 \mathbf{1})$$

Η εξίσωση αυτή είναι ένα σύστημα N εξισώσεων με N άγνωστους (τα w_i). Λόγω του ότι ο πίνακας Σ είναι ένας πίνακας που περιέχει συσχετίσεις τυχαίων μεταβλητών, είναι αντιστρέψιμος οπότε μπορούμε να λύσουμε την εξίσωση αυτή και να δώσουμε την τιμή των w (δηλαδή να καθορίσουμε το χαρτοφυλάκιο το οποίο θα έχει την ιδιότητα του ελαχίστου κινδύνου για δεδομένη μέση απόδοση) ως εξής

$$w = -\frac{1}{2}(\lambda_1 \Sigma^{-1} M + \lambda_2 \Sigma^{-1}\mathbf{1})$$

όπου Σ^{-1} είναι ο αντίστροφος του πίνακα Σ.

Η λύση αυτή δίνεται συναρτήσει των πολλαπλασιαστών Lagrange οι οποίοι θα πρέπει να επιλεγούν κατά τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιούνται οι περιορισμοί του προβλήματος.

Για τον υπολογισμό των πολλαπλασιαστών του Lagrange ακολουθούμε την εξής μεθοδολογία:

1. Πολλαπλασιάζουμε πρώτα την λύση με το διάνυσμα M. Πρώτα βρίσκουμε το $w^{'}$ το οποίο από τον λογισμό των πινάκων είναι

$$w^{'} = -\frac{1}{2}(\lambda_1 M^{'}\Sigma^{-1} + \lambda_2 \mathbf{1}^{'}\Sigma^{-1})$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα $\Sigma = \Sigma^{'}$. Πολλαπλασιάζοντας απο δεξιά με M παίρνουμε

$$m = w^{'}M = -\frac{1}{2}(\lambda_1 M^{'}\Sigma^{-1}M + \lambda_2 \mathbf{1}^{'}\Sigma^{-1}M) \tag{7.1}$$

2. Πολλαπλασιάζουμε την έκφραση για το $w^{'}$ απο δεξιά με το $\mathbf{1}$ και παιρνουμε

$$1 = w^{'}\mathbf{1} = -\frac{1}{2}(\lambda_1 M^{'}\Sigma^{-1}\mathbf{1} + \lambda_2 \mathbf{1}^{'}\Sigma^{-1}\mathbf{1}) \tag{7.2}$$

3. Οι σχέσεις (7.1), (7.2) συνιστούν ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων που η επίλυση του δίνει τις τιμές των πολλαπλασιαστών Lagrange. Η λύση του συστήματος δίνει

$$\begin{aligned}\lambda_1^* &= 2\frac{-m(\mathbf{1}^{'}\Sigma^{-1}\mathbf{1}) + \mathbf{1}^{'}\Sigma^{-1}M}{(M'\Sigma^{-1}M)(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}) - (M'\Sigma^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}M)}\\ \lambda_2^* &= 2\frac{-M^{'}\Sigma^{-1}M + m(M^{'}\Sigma^{-1}\mathbf{1})}{(M'\Sigma^{-1}M)(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}) - (M'\Sigma^{-1}\mathbf{1})(\mathbf{1}'\Sigma^{-1}M)}\end{aligned}$$

4. Το χαρτοφυλάκιο που επιλύει το πρόβλημα του Markowitz ειναι το

$$w^* = -\frac{1}{2}(\lambda_1^* \Sigma^{-1} M + \lambda_2^* \Sigma^{-1}\mathbf{1})$$

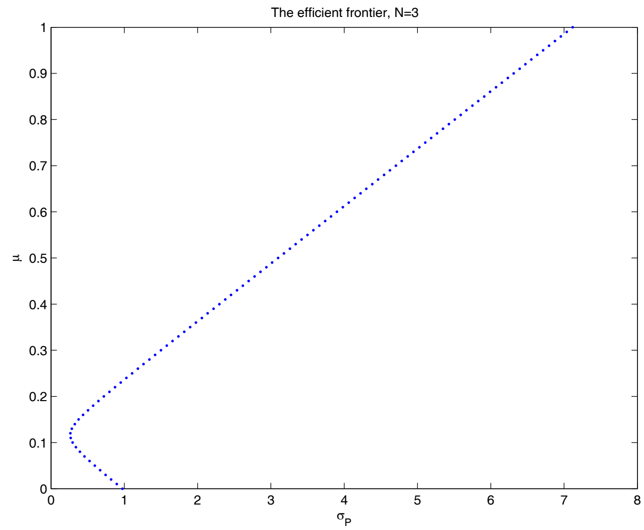
Παράδειγμα 7.5.1 (Το πρόβλημα του Markowitz για 3 τίτλους) Ας μελετήσουμε πιο λεπτομερώς το πρόβλημα του Markowitz για 3 τίτλους. Στην περίπτωση αυτή ζητάμε να

$$\begin{aligned}&\min_{w_1,w_2,w_3} w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3\sigma_3^2 + w_1w_2\sigma_{1,2} + w_1w_3\sigma_{1,3} + w_2w_3\sigma_{2,3}\\ &\text{υπό τους περιορισμούς}\\ &w_1 + w_2 + w_3 = 1\\ &w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + w_3\mu_3 = \mu\end{aligned} \tag{7.3}$$

Το προβλημα αυτό μπορεί να λυθεί αριθμητικά και να μας δώσει το χαρτοφυλάκιο με την μικρότερη διασπορά, για δεδομένη μέση αποδοση μ. Στο σχήμα 7.9 σχεδιάζουμε στον οριζόντιο άξονα την μικρότερη διασπορά που μπορεί να πάρουμε αν αρχίσουμε να μεταβάλλουμε την μέση απόδοση που ζητάμε. Το σχήμα που παίρνουμε είναι μία προσέγγιση του αποτελεσματικού συνόρου.

Ας δούμε πιο λεπτομερώς το πως μπορούμε να βρούμε ένα σημείο επάνω στο διάγραμμα αυτό. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε 3 τίτλους με μέσες αποδόσεις

$$m = (0.229, 0.138, 0.052)$$



Σχήμα 7.9: Το αποτελεσματικό σύνορο για N=3, επιτρέποντας ανοιχτές θέσεις.

και πίνακα συνδιακυμάνσεων

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 0.924 & 0.063 & -0.582 \\ 0.063 & 0.862 & -0.359 \\ -0.582 & -0.359 & 0.528 \end{pmatrix}$$

Οι τίτλοι $(1,3)$ και $(2,3)$ είναι αρνητικά συσχετισμένοι μεταξύ τους. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο έχει μέση απόδοση ίση προς $m = 0.18$ και την μικροτερη δυνατή διασπορά.

Η λύση του προβλήματος μπορεί να γίνει με την εφαρμογή των παραπάνω γενικών τύπων. Μπορούμε να υπολογίσουμε τον αντίστροφο του πίνακα Σ

$$\Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 9.6783 & 5.2113 & 14.2114 \\ 5.2113 & 4.4244 & 8.7526 \\ 14.2114 & 8.7526 & 23.5098 \end{pmatrix}$$

και απο αυτόν τις ποσότητες

$$\begin{aligned} \mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1} &= 93.9631 \\ \mathbf{1}'\Sigma^{-1}M &= 11.6183 \\ M'\Sigma^{-1}M &= 1.4488 \\ M'\Sigma^{-1}\mathbf{1} &= 11.6183 \end{aligned}$$

Από αυτές μπορούμε να βρούμε τους πολλαπλασιαστές του Lagrange

$$\begin{aligned} \lambda_1^* &= -9.2128 \\ \lambda_2^* &= 1.1179 \end{aligned}$$

Συνεπως το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο δίνεται απο το διάνυσμα

$$w = (0.6607, 0.1285, 0.2108)$$

Η συνολική διασπορά του χαρτοφυλακίου είναι

$$\sigma_P^2 = 0.2702$$

που είναι μικρότερη απο την διασπορά του κάθε τίτλου χωριστά.

7.5.2 Μέτρηση και καθορισμός των παραμέτρων του μοντέλου

Το μοντέλο του Markowitz δίνει την πλήρη λύση στο πρόβλημα της επιλογής αρκεί να είναι γνωστά οι μέσες αποδόσεις των διαφορετικών τίτλων που μπορούμε να έχουμε στο χαρτοφυλάκιο και οι διασπορές και συνδιακυμάνσεις τους. Αυτές μπορεί να καθοριστούν από στατιστικά στοιχεία της αγοράς. Αν θεωρήσουμε για παράδειγμα ότι τα στατιστικά στοιχεία της αγοράς παράγονται από μία στάσιμη στον χρονο κατανομή μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε ιστορικά δεδομένα των αποδόσεων των διαφορών τίτλων για τον υπολογισμό των παραμέτρων του μοντέλου του Markowitz. Η υπόθεση της στασιμότητας μπορεί να γραφεί και ως εξής

$$R_{i,t} = \mathbb{E}[R_i] + \epsilon_{i,t}$$

όπου $R_{i,t}$ είναι η απόδοση του τίτλου i την χρονική περίοδο t, $E[R_i]$ είναι η αναμενόμενη απόδοση για τον τίτλο i και $\epsilon_{i,t}$ είναι ένας όρος σφάλματος, τέτοιος ώστε $E[\epsilon_{i,t}] = 0$.

Οι ακόλουθοι εκτιμητές μπορεί να χρησιμοποιηθούν για τις μέσες τιμές και τις διακυμάνσεισ-συνδιακυμάνσεις

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[R_i]_{est} &= \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_{i,t}, \\
(\sigma_{ii})^2_{est} &= \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(R_{i,t} - E[R_i]_{est})^2 \\
(\sigma_{ij})_{est} &= \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}(R_{i,t} - E[R_i]_{est})(R_{j,t} - E[R_j]_{est})
\end{aligned}$$

όπου θεωρήσαμε ότι η κατανομή πιθανότητας των αποδόσεων είναι αμετάβλητη στον χρονο για τις τελευταίες T χρονικές περιόδους και χρησιμοποιήσαμε τα στοιχεία αυτά για την εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου. Οι εκτιμητές αυτοί είναι αμερόληπτοι (unbiased) εκτιμητές αλλά οι εκτιμήσεις αυτές υπόκεινται σε στατιστικά σφάλματα που σχετίζονται με την μέτρηση οπότε η τίμη που παίρνουμε από αυτους τους εκτιμητές είναι προσεγγιστική για τις ποσότητες που μας ενδιαφέρουν.

Άλλοι τρόποι εκτίμησης είναι επίσης δυνατοί. Για παράδειγμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εκτιμητές που βασίζονται στην έννοια της πιθανοφάνειας και της μεγιστοποίησης της.

Έχοντας εκτιμήσει τους παραμέτρους μπορούμε να εφαρμοσουμε την αναλυτική λύση του προβλήματος του Markowitz για την επιλογή του χαρτοφυλακίου. Εναλλακτικά μπορούμε να εφαρμόσουμε κάποιον αλγόριθμο τετραγωνικού προγραμματισμού (quadratic programming) για την επίλυση του προβλήματος.

Εναλλακτικές προσεγγίσεις προτείνονται στην συνέχεια.

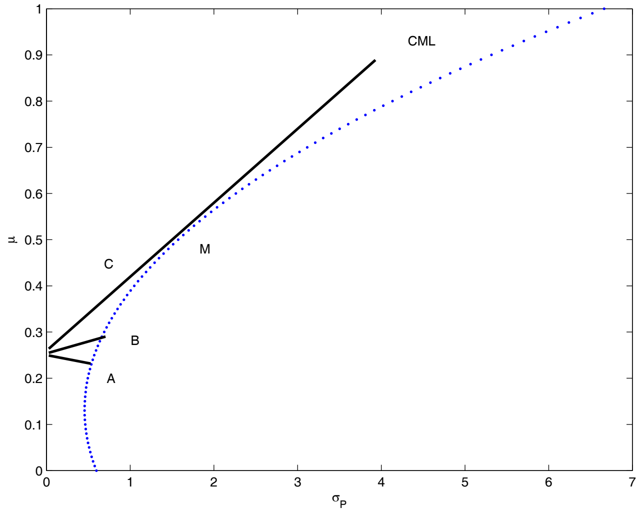
7.5.3 Γενικεύσεις του μοντέλου

Το μοντέλο του Markowitz έχει δεχθεί πολλές γενικεύσεις. Μία ενδιαφέρουσα γενίκευσή[2] είναι να τοποθετήσουμε περιορισμούς στις θέσεις του χαρτοφυλακίου που μπορεί πάρει ένας επενδυτής, όπως π.χ. να μην επιτρέπονται οι ανοικτές θέσεις. Στην περίπτωση αυτή το πρόβλημα θα πρέπει να επιλυθεί λαμβάνοντας υπ'οψιν και τον έξτρα περιορισμό $0 \leq w_i \leq 1$, για $i = 1, \cdots, N$. Άλλοι περιορισμοί μπορεί να είναι του τύπου ότι δεν επιτρέπεται να τοποθετηθεί μεγαλύτερο ποσοστό απο κάποιο καθορισμένο ποσοστό σε συγκέκριμένους τίτλους. Για παράδειγμα αν δεν επιτρέπεται να τοποθετήσουμε παραπάνω απο το 20% του συνολικού μας πλούτου στον τίτλο 2, τότε το πρόβλημα του Markowitz θα πρέπει να λυθεί με τον περιορισμό $w_2 \leq 0.2$. Περιορισμοί αυτής της μορφής είναι πολύ συνηθισμένοι στην διαχείριση ασφαλιστικών ταμείων. Τα προβλήματα βελτιστοποίησης με περιορισμούς είναι πολύ πιο δύσκολα απο τα προβλήματα βελτιστοποίησης χωρίς περιορισμούς και χρειάζονται ειδικές αριθμητικές τεχνικές για την επίλυση τους.

7.6 Η εισαγωγή ενός βέβαιου τίτλου

Μία ενδιαφέρουσα γενίκευση είναι η εισαγωγή ενός τίτλου οι αποδόσεις του οποίου δεν περιέχουν κίνδυνο στον οποιο οι επενδυτές μπορεί να τοποθετηθούνε παράλληλα με τις τοποθετήσεις τους στοσυ αβέβαιους τίτλους. Το μοντελο αυτό οφείλεται στον James Tobin. Αν για απλούστευση δεχθούμε ότι έχουμε δύο τίτλους τον τίτλο 1

[2] Για να είμαστε ακριβείς το αρχικό μοντέλο του Markowitz περιείχε τους περιορισμούς και αργότερα ο Black τους αφαίρεσε για να μπορεί να πάρει την αναλυτική λύση που παρουσιάσαμε εδώ



Σχήμα 7.10: Το αποτελεσματικό σύνορο και η γραμμή της αγοράς.

που έχει βέβαιη απόδοση r και τον τίτλο 2 που έχει αποδοση την τυχαία μεταβλητή R τέτοια ώστε $\mathbb{E}[R] = \mu_u$ και $Var(R) = \sigma^2$ τότε η συνολική διασπορά του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$\sigma_P^2 = (1-w)^2\sigma^2$$

ένω η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$\mu_P = w\,r + (1-w)\mu_u$$

όπου w είναι το ποσοστό του πλούτου που έχει τοποθετηθεί στον βέβαιο τίτλο.

Οι παραπάνω σχέσεις μας δίνουν μία γραμμικη σχέση μεταξύ της απόδοσης του χαρτοφυλακίου και της διασποράς του

$$\mu_P = r + (\mu_u - r)\frac{\sigma_P}{\sigma}$$

Στο επίπεδο του $sigma_P - \mu_P$ η σχέση αυτή απεικονίζεται σε μία ευθεία γραμμή στην οποία βρίσκονται τα χαρακτηριστικά όλων των χαρτοφυλακίων που μπορεί να κατασκευαστούν απο τον βέβαιο τίτλο και τον αβέβαιο τίτλο. Στο σημείο αυτό μπορεί να υποθέσουμε ότι ο αβέβαιος τίτλος, δεν είναι ένας απλός τίτλος αλλά ένα χαρτοφυλάκιο απο αβέβαιους τίτλους το οποίο έχει επιλεγεί κάνοντας χρήση της θεωρίας του Markowitz. Μπορούμε λοιπόν να πάρουμε το ακόλουθο σχήμα (βλ. σχήμα **;;**). Οι ευθείες γραμμές που ενώνουν το σημείο $(r, 0)$ στον κάθετο άξονα με τα σημεία του αποτελεσματικού συνόρου περιέχουν τα χαρακτηριστικά όλων των χαρτοφυλακίων που μπορεί να κατασκευαστούν μοιράζοντας τον πλούτο μεταξύ του βέβαιου τίτλου και του χαρτοφυλακίου που έχει σχεδιαστεί με την μέθοδολογία του Markowitz. Τα χαρτοφυλάκια που βρίσκονται επάνω σε αυτό το ευθύγραμμο τμήμα, κυριαρχούν επάνω σε όλα τα χαρτοφυλάκια τα οποία αποτελούνται απο αβέβαιους τίτλους και μόνο και βρίσκονται επάνω στο αποτελεσματικό σύνορο, αριστερά απο το σημείο το οποίο έχουμε επιλέξει. Μία πολύ ενδιαφέρουσα απο τις ευθείες είναι αυτή η οποία ξεκινάει απο τον κάθετο άξονα και είναι εφαπτομένη σε ένα σημείο του αποτελεσματικού συνόρου. Αυτή περιέχει τα χαρτοφυλάκια τα οποία αποτελούνται απο τον βέβαιο τίτλο και ένα χαρτοφυλάκιο αποκλειστικά απο αβέβαιους τίτλους, που κυριαρχούν επάνω σε όλα τα χαρτοφυλάκια τύπου Markowitz. Η ευθεία αυτή ονομάζεται capital market line. Το σημείο M στο οποίο εφάπτεται η ευθεία με το αποτελεσματικό σύνορο αντιστοιχεί σε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο ονομάζεται χαρτοφυλάκιο της αγοράς (market portfolio). Το αν η γραμμή της αγοράς συνεχιστεί πέρα απο το σημείο M ή όχι εξαρτάται απο το αν το w είναι περιορισμένο να παίρνει τιμές και εκτός απο το διάστημα $[0, 1]$ (επιτρέπονται δηλαδή οι ανοικτές θέσεις στον βέβαιο τίτλο) ή είναι περιορισμένο στο διάστημα $[0, 1]$ (δηλαδή δεν επιτρέπονται οι ανοικτές θέσεις στον βέβαιο τίτλο). Οι ανοικτές θέσεις (θέσεις δανεισμού) στον βέβαιο τίτλο, βλέπουμε ότι επιτρέπουν μεγαλύτερη αναμενόμενη απόδοση του χαρτοφυλακίου αλλά βέβαια ενέχουν και περισσότερου κινδύνου.

Τα παραπάνω επιχειρήματα μας δείχνουν ότι ένας επενδυτής έχει λόγους να επιλέξει τα χαρτοφυλάκια τα οποία βρίσκονται επάνω στην γραμμή της αγοράς. Η κατασκευή του χαρτοφυλακίου μπορεί να χωριστεί σε δύο διαδικασίες.

- Πρώτα κατασκευάζεται το χαρτοφυλάκιο M το οποίο ανήκει στο αποτελεσματικο σύνορο. Με αυτό τον τρόπο έχει καθοριστεί η γραμμή της αγοράς.

- Στην συνέχεια ο κάθε επενδυτής, επιλέγει ανάλογα με τις προτιμήσεις του ως προς τον κίνδυνο την θέση του επάνω στην γραμμή της αγοράς. Αυτό σημαίνει οτι θα επιλέξει το ποσό που θα τοποθετήσει στο βέβαιο τίτλο ανάλογα με τον κίνδυνο που θα θελήσει να αναλάβει.

Η παρατήρηση αυτή αποκαλείται στην θεωρία χαρτοφυλακίου, θέωρημα διαχωρισμού (portfolio separation theorem).

Η γραμμή της αγοράς μπορεί να χαρακτηριστεί απο την κλίση της η οποία είναι ίση προς

$$b = \frac{\mathbb{E}[R_M] - r}{\sigma_M}$$

όπου R_M είναι η (τυχαία) απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς και $\sigma_M^2 = Var(R_M)$.

Ο λόγος b για κάποιο χαρτοφυλάκιο ονομάζεται το πηλίκο του Sharpe και χαρακτηρίζει τις έξτρα αποδόσεις του χαρτοφυλακίου σχετικά με τον βέβαιο τίτλο σε μονάδες του κινδύνου που είναι στην περίπτωση αυτή η τυπική απόκλιση.

Το χαρτοφυλάκιο της αγοράς θα είναι αυτό το χαρτοφυλάκιο το οποίο μεγιστοποιεί το πηλίκο του Sharpe. Αυτό μπορεί να γραφεί μαθηματικά σαν το πρόβλημα

$$\max_{\{w_1,\cdots,w_N\}} = \frac{\mathbb{E}[r_P] - r}{\sigma_P}$$

υπό τον περιορισμό

$$\sum_{i=1}^{N} w_i = 1$$

όπου

$$\mathbb{E}[r_P] = \sum_{i=1}^{N} w_i \mathbb{E}[R_i]$$

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} w_i w_j \sigma_{ij}$$

Το προβλημα αυτό μπορεί να λυθεί με την χρήση των πολλαπλασιαστών του Lagrange στην γενική περίπτωση όπου έχουμε N τίτλους που περιέχουν κινδυνο.

Θα περιοριστούμε εδώ να γράψουμε την μορφή της λύσης όταν έχουμε μόνο δύο τίτλους ($N = 2$). Τότε μετά απο επίπονη άλγεβρα καταλήγουμε στο

$$\begin{aligned} w_1 &= \frac{[\mathbb{E}[R_1] - r]\sigma_2^2 - \mathbb{E}[\mathbb{E}[R_2] - r]Cov(R_1, R_2)}{[\mathbb{E}[R_1] - r]\sigma_2^2 + [\mathbb{E}[R_2] - r]\sigma_1^2 - [\mathbb{E}[R_1] - r - \mathbb{E}[R_2] - r]Cov(R_1, R_2)} \\ w_2 &= 1 - w_1 \end{aligned}$$

Οι αριθμοί αυτοί μας δίνουν την σύνθεση του χαρτοφυλακίου της αγοράς.

Παράδειγμα 7.6.1 (Ο δείκτης του Sharpe για ένα χαρτοφυλάκιο με 2 τιτλους) Ας προσπαθήσουμε να δούμε την συμπεριφορά του πηλίκου του Sharpe για ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο 2 τίτλους. Στην περίπτωση αυτή το χαρτοφυλάκιο μπορεί να περιγραφεί απο το διάνυσμα $w = (w_1, w_2)$ για το οποίο ισχύει $w_1 + w_2 = 1$. Θα θεωρήσουμε οτι στο χαρτοφυλάκιο έχουμε περιορισμό στις ανοικτές θέσεις άρα $0 \leq w_1 \leq 1$ και το ίδιο και για το w_2. Λόγω του περιορισμού αν γνωρίζουμε το w_1 μπορούμε αμέσως να βρούμε και το $w_2 = 1 - w_1$.

Η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου είναι ίση προς

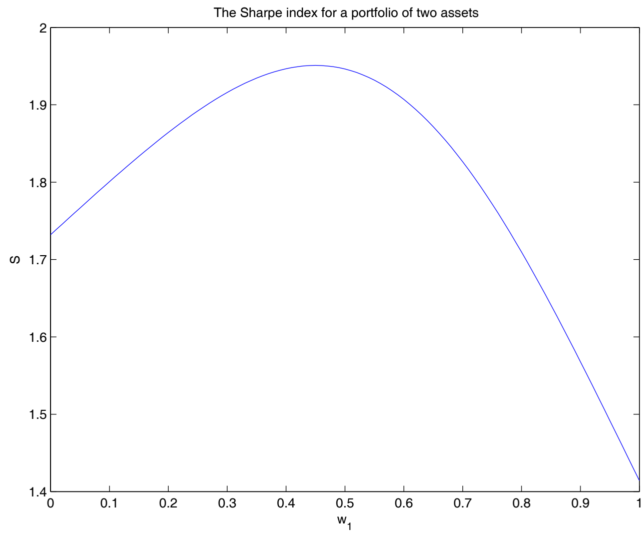
$$\mathbb{E}[R_P] = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 = w_1\mu_1 + (1 - w_1)\mu_2$$

και η συνολική διασπορά του χαρτοφυλακίου είναι ίση προς

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\sigma_{12} \\ &= w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1)\sigma_{12} \end{aligned}$$

Το πηλίκο του Sharpe λοιπόν μπορεί να θεωρηθεί σαν μια συνάρτηση του w_1 της μορφής

$$S(w_1) = \frac{w_1\mu_1 + (1 - w_1)\mu_2 - r}{\sqrt{w_1^2\sigma_1^2 + (1 - w_1)^2\sigma_2^2 + 2w_1(1 - w_1)\sigma_{12}}}$$



Σχήμα 7.11: Το πηλίκο του Sharpe για χαρτοφυλάκιο που αποτελείται απο 2 τιτλους.

Στο σχήμα 7.11 σχεδιάζουμε τον δείκτη του Sharpe σαν συνάρτηση της θέσης μας στον τίτλο 1. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση αυτή παρουσιάζει μέγιστο για κάποια τιμή του $w_1 = w_1^*$. Το χαρτοφυλάκιο $w_1 = w_1^*$, $w_2 = 1 - w_1^*$ είναι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Παράδειγμα 7.6.2 (Ο δείκτης του Sharpe για 3 τίτλους) Ας δούμε τώρα την συμπεριφορά του πηλίκου του Sharpe για ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο 3 τίτλους. Το χαρτοφυλάκιο αυτό θα περιγράφεται απο το διάνυσμα $w = (w_1, w_2, w_3)$ το οποίο θα είναι τέτοιο ώστε $w_1 + w_2 + w_3 = 1$. Εξαιτίας του περιορισμού αυτού το πηλίκου του Sharpe μπορεί να θεωρηθεί σαν συνάρτηση δύο μόνο μεταβλητών, π.χ. των w_1 και w_2.

Η μέση απόδοση του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση προς

$$\mathbb{E}[R_P] = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + w_3\mu_3 = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 + (1 - w_1 - w_2)\mu_3$$

και η συνολική διασπορά του χαρτοφυλακίου είναι ίση προς

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + w_3^2\sigma_3^2 \\ &+ 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_2w_3\sigma_{23} + 2w_1w_3\sigma_{13} \\ &= w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + (1 - w_1 - w_2)^2\sigma_3^2 \\ &+ 2w_1w_2\sigma_{12} + 2w_2(1 - w_1 - w_2)\sigma_{23} + 2w_1(1 - w_1 - w_2)\sigma_{13} \end{aligned}$$

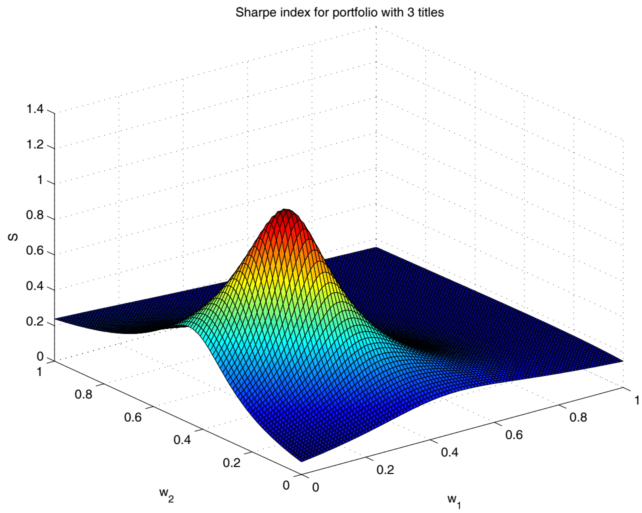
Το πηλίκο του Sharpe μπορεί λοιπόν να γραφεί σαν μία συνάρτηση 2 μεταβλητών, της w_1 και w_2 η οποία δινεται στο σχήμα 7.12. Παρατηρούμε ότι το πηλίκο του Sharpe παρουσιάζει μεγιστο για κάποιο χαρτοφυλάκιο, το οποίο ειναι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

7.7 Το μοντέλο της αγοράς και το μοντέλο $CAPM$

Η βασική υπόθεση του μοντέλου CAPM είναι ότι η αγορά αποτελείται από επενδυτές οι οποίοι είναι ορθολογικά άτομα, το καθένα απο τα οποία λύνει το πρόβλημα χαρτοφυλακίου του Markowitz δηλαδή επιλέγει χαρτοφυλάκιο με συγκεκριμένη αναμενομενη αποδοση και τον ελάχιστο κίνδυνο, όπου σαν μέτρο του κινδύνου έχουμε επιλέξει την διασπορά της απόδοσης του χαρτοφυλακίου.

Με βάση την υπόθεση αυτή μπορεί να αποδειχθεί ότι οι αποδόσεις όλων των τίτλων στην αγορά αυτή δεν μπορεί να είναι ανεξάρτητες αλλά θα πρέπει να υπάρχει μία συσχέτιση μεταξύ του κάθε τίτλου στην αγορά με ένα συγκεκριμένο χαρτοφυλάκιο από τίτλους το οποίο είδαμε παραπάνω και ονομάζεται το χαρτοφυλάκιο της αγοράς (market portfolio). Το χαρτοφυλάκιο αυτό θεωρούμε ότι είναι το χαρτοφυλάκιο το οποίο επιλύει το πρόβλημα της βελτιστοποίησης δηλαδή είναι το χαρτοφυλάκιο το οποίο εξασφαλίζει με τον ελάχιστο δυνατό κίνδυνο κάποια αναμενομενη απόδοση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι το περίφημο μοντέλο CAPM σύμφωνα με το οποίο αν R_i είναι η απόδοση του τίτλου i και R_M είναι η απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς τότε ισχύει η σχέση

$$R_i = a_i + b_i R_M + \epsilon$$



Σχήμα 7.12: Το πηλίκο του Sharpe για χαρτοφυλάκιο που αποτελείται απο 3 τιτλους.

όπου a_i, b_i είναι σταθεροί όροι και ϵ είναι ένας τυχαίος όρος σφάλματος. Θεωρούμε συνήθως ότι $\epsilon \sim N(0, \Sigma^2)$, όπου η διασπορά Σ^2 καθορίζεται από τα δεδομένα της αγοράς. Η σχέση ισχύει σε δεδομένες χρονικές στιγμές, αλλά υπάρχουν στην βιβλιογραφία επεκτάσεις του μοντέλου CAPM οι οποίες ισχύουν και σε βάθος χρονου.

Για την διασπορά του R_i ισχύει

$$Var(R_i) = Var(b_i R_M) + Var(\epsilon)$$

Ο πρώτος όρος σχετίζεται με την διασπορά του χαρτοφυλακίου της αγοράς και ονομάζεται συστηματικός κίνδυνος. Ο συντελεστής β_i μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα κανονικοποιημένο μέτρο του συστηματικού κινδύνου. Υπενθυμίζουμε ότι σαν συστηματικό κινδυνο ονομάζουμε τον κίνδυνο αυτό που σεν μπορεί να διαφοροποιηθεί. Ο δεύτερος όρος ονομάζεται μη συστηματικός κίνδυνος και σχετίζεται με τα χαρακτηριστικά του συγκεκριμένου τίτλου.

Το μοντέλο CAPM ισχύει και για κάθε πιθανό χαρτοφυλάκιο τίτλων, το οποίο φυσικά δεν είναι λύση του ανωτέρω προβλήματος βελτιστοποίησης. Αν λοιπόν R είναι οι αποδόσεις οποιουδήποτε χαρτοφυλακίου τότε πρέπει να ισχυει η ακόλουθη σχέση

$$R = a + bR_M + \epsilon$$

Ο συντελεστής b ονομάζεται beta του χαρτοφυλακίου και παίρνει θετικές ή αρνητικές τιμές ανάλογα με το αν οι αποδόσεις του χαρτοφυλακίου κινούνται στην ίδια κατεύθυνση ή σε αντίθετη κατεύθυνση με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι βέβαια το ποιο μπορεί να θεωρηθεί το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Μία καλή επιλογή για το χαρτοφυλάκιο της αγοράς μπορεί να είναι κάποιος δείκτης της αγοράς όπως π.χ. ο δείκτης FTSE ή ο δείκτης NIKEI κ.α. Αν έχουμε καταφέρει να αναγνωρίσουμε ποιός δείκτης της αγοράς είναι τα κατάλληλο R_M για κάποιους συγκεκριμένους τίτλους τότε η παραπάνω σχέση μας παρέχει ένα πολύ καλό ποσοτικό εργαλείο για την πρόβλεψη των αποδόσεων των διαφόρων τίτλων ή των διαφόρων χαρτοφυλακίων (π.χ. αμοιβαία κεφάλαια) αν γνωρίζουμε τις κινήσεις του συγκεκριμένου δείκτη. Το CAPM είναι ένα πολύ χρήσιμο εργαλείο τιμολόγησης περιουσιακών στοιχείων εφόσον ισχύει.

Οι συντελεστές a και b μπορεί να εκτιμηθούν χρησιμοποιώντας ανάλυση παλινδρομησης.

Το παραπάνω μοντέλο μπορεί να γραφεί και με την παρακάτω μορφή που εμφανίζεται πολύ συχνά στην βιβλιογραφία

$$\mathbb{E}[R_i] - r = \frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}(R_M - r)$$

όπου r είναι η αποδοση του τίτλου που δεν περιέχει κίνδυνο. Ο λόγος $\frac{cov(R_i, R_M)}{\sigma_M^2}$ ονομάζεται β του τίτλου i και μπορεί να θεωρηθεί σαν ένα κανονικοποιημένο μέτρο του συστηματικού κινδύνου (εφόσον διαιρείται με το σ_M^2 που είναι τό μέτρο κινδύνου του χαρτοφυλακίου της αγοράς).

Η γραμμή της αγοράς: Παρατηρούμε άπό την παραπάνω σχέση ότι η αναμενόμενη αποδοση $\mathbb{E}[R_i]$ ενός τίτλου που περιέχει κίνδυνο εξαρτάται γραμμικά από την διασπορά του χαρτοφυλακίου της αγοράς σ_M^2. Η ευθεία αυτή ονομάζεται η γραμμή της αγοράς.

7.7.1 Η θεωρία χαρτοφυλακίου με την χρήση του $CAPM$

Το μοντέλο CAPM μπορεί να χρησιμοποιηθεί (εφόσον ισχύει) για την απλοποίηση της θεωρίας χαρτοφυλακίου. Αν υποθέσουμε οτι όλοι οι τίτλοι έχουν αποδοσεις που είναι συσχετισμένες με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς δηλαδή

$$R_i = \alpha_i + \beta_i R_M + \epsilon_i$$

τότε μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τον πίνακα συνδιακυμάνσεων των τίτλων.
Πράγματι, για τις μέσες αποδόσεις ισχύει

$$\mathbb{E}[R_i] = \alpha_i + \beta_i \mathbb{E}[R_M]$$

ενώ για τις διακυμάνσεις

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \beta_i^2 \sigma_M^2 + \sigma_{\epsilon_i}^2 \\ \sigma_{ij} &= \beta_i \beta_j \sigma_M^2 \end{aligned}$$

Συνεπώς, ολόκληρος ο πίνακας των συνδιακυμάνσεων μπορεί να κατασκευαστεί απο την γνώση των συντελεστών β_i, α_i και σ_{ϵ_i}, δηλαδή απο την γνώση $3N$ συντελεστών. Το πλήρες μοντέλο χρειάζεται συνολικά $(n^2 + 3n)/2$ παραμέτρους. Ο αριθμός $3N$ είναι σαφώς μικρότερος απο τον αριθμό παραμέτρων του πλήρους μοντέλου για μεγάλο N.

Αυτή δεν είναι όμως η μόνη απλοποίηση. Η χρήση του μοντέλου μπορεί να οδηγήσει σε σημαντική απλοποίηση των υπολογισμών για το βέλτιστο χαρτοφυλάκιο. Ας υποθέσουμε ότι κατασκευάζουμε ένα χαρτοφυλάκιο $w = (w_1, w_2, \cdots, w_N)$ από N τίτλους οι οποίοιακολουθούν το παραπάνω μοντελο. Υποθέσουμε επίσης ότι $Cov(\epsilon_i, \epsilon_j) = \sigma_i^2 \delta_{ij}$ δηλαδή οι 'θόρυβοι' που έχουν διαφορετικοί τίτλοι είναι ασυσχέστιστοι μεταξύ τους.

Η μέση αποδοση του χαρτοφυλακίου αυτού θα είναι ίση προς

$$\mathbb{E}[R_P] = \sum_{i=1}^{N} w_i(\alpha_i + \beta_i \mathbb{E}[R_M])$$

Μπορούμε τώρα, ακολουθώντας τον Sharpe να γράψουμε την απόδοση του χαρτοφυλακίου της αγοράς στην μορφή

$$R_M = \mathbb{E}[R_M] + \epsilon_M$$

δηλαδή σαν την μέση τιμή και τις τυχαίες αυξομειώσεις γύρω απο αυτή. Θεωρούμε ότι το χαρτοφυλάκιο της αγοράς είναι ένας πλασματικός τίτλος, ο τίτλος $N+1$ στον οποίο μπορούμε να τοποθετηθούμε. Σύμφωνα με τον Sharpe η τοποθέτηση μας στον τίτλο αυτό θα είναι ίση προς

$$w_{N+1} = \sum_{i=1}^{N} w_i \beta_i$$

Με τις νέες ονομασίες των τίτλων το χαρτοφυλάκιο θα έχει μέση απόδοση

$$\mathbb{E}[R_P] = \sum_{i=1}^{N+1} w_i \mathbb{E}[R_i] = \sum_{i=1}^{N+1} w_i \alpha_i$$

όπου $\alpha_{N+1} := \mathbb{E}[R_M]$.

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε την διασπορά του χαρτοφυλακίου. Μετά απο λίγες πράξεις καταλήγουμε ότι

$$\begin{aligned} \sigma_P^2 &= \mathbb{E}\left[(\sum_{i=1}^{N+1} w_i \epsilon_i)^2 \right] \\ &= Var(\sum_{i=1}^{N+1} w_i \epsilon_i) \end{aligned}$$

Θεωρώντας το ότι τα ϵ_i είναι ασυσχέτιστα μεταξύ τους η παραπάνω σχέση για την διασπορά του χαρτοφυλακίου απλοποιείται στην

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{N+1} w_i^2 \sigma_{\epsilon_i}^2$$

όπου τώρα παρατηρούμε πως δεν υπάρχουν παρα μόνο διαγώνιοι όροι. Αυτό μας εξασφαλίζει πολύ πιο εύκολη επίλυση το προβλήματος βελτιστοποίησης το οποίο και θα χαρακτηρίσει το χαρτοφυλάκιο.

7.7.2 Αιτιολόγηση του μοντέλου CAPM

Το μοντέλο CAPM μπορεί να 'αποδειχθεί' με τα ακόλουθα απλά επιχειρήματα. Ας υποθέσουμε οτι φτιάχνουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο τον τίτλο i που περιέχει κίνδυνο, και το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Η σύνθεση του χαρτοφυλακίου αυτού είναι $a\%$ του πλούτου στον τίτλο i και $(1-a)\%$ στο χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Ας συμβολίσουμε το χαρτοφυλάκιο αυτο $P(a)$. Είναι προφανές ότι για την αναμενόμενη απόδοση και την διασπορά του χαρτοφυλακίου $P(a)$ ισχύει

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[R(a)] &:= \mathbb{E}[R_{P(a)}] = a\mathbb{E}[R_i] + (1-a)\mathbb{E}[r_M] \\ \sigma(a)^2 &:= \sigma^2_{P(a)} = a^2\sigma_i^2 + (1-a)^2\sigma_M^2 + 2a(1-a)\sigma_{iM}\end{aligned}$$

Είναι φανερό ότι για $a=0$ το χαρτοφυλάκιο $P(0)$ ταυτίζεται με το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Επίσης μεταβάλλοντας το a και σχεδιάζοντας την αναμενόμενη απόδοση και την διασπορά του $P(a)$ θα πάρουμε μία καμπύλη $L(a)$ στο επίπεδο $\sigma-\mu$ η οποία θα είναι κάτω απο το αποτελεσματικό σύνορο, και θα εφάπτεται σε αυτό για $a=0$. Η κλίση της εφαπτομένης στην καμπύλη $L(a)$ στο σημείο $a=0$ θα είναι ίση προς της κλίση της γραμμής της αγοράς.

Από στοιχειώδη αναλυτική γεωμετρία μπορούμε να βρούμε ότι η κλίση της $L(a)$ στο $a=0$ είναι ίση προς την παράγωγο

$$\left.\frac{\partial \mathbb{E}[R(a)]}{\partial \sigma(a)}\right|_{a=0} = \left.\frac{\frac{\partial \mathbb{E}[R(a)]}{\partial a}}{\frac{\partial \sigma(a)}{\partial a}}\right|_{a=0}$$

Κάνοντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbb{E}[R(a)]}{\partial a} &= \mathbb{E}[R_i] - \mathbb{E}[r_M] \\ \frac{\partial \sigma(a)}{\partial a} &= \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sigma(a)}}(2a\sigma_i^2 - 2(1-a)\sigma_M^2 + 2(1-2a)\sigma_{iM}\end{aligned}$$

από όπου καταλήγουμε ότι

$$\left.\frac{\partial \mathbb{E}[R(a)]}{\partial \sigma(a)}\right|_{a=0} = \frac{\mathbb{E}[R_i] - \mathbb{E}[r_M]}{\frac{\sigma_{iM}-\sigma_M^2}{\sigma_M}} = \frac{\mathbb{E}[r_M] - r}{\sigma_M}$$

όπου στην τελευταία ισότητα αντικαταστήσαμε την κλίση της γραμμής της αγοράς.

Η σχέση αυτή με δίνει ότι η αναμενόμενη απόδοση του τίτλου i πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$\mathbb{E}[R_i] = r + \beta_i\{\mathbb{E}[r_M] - r\}$$

όπου ο συντελεστής αναλογίας β_i που χαρακτηρίζει τον τίτλο i δίνεται απο την σχέση

$$\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2} = \frac{cov(R_i, R_M)}{Var(r_M}$$

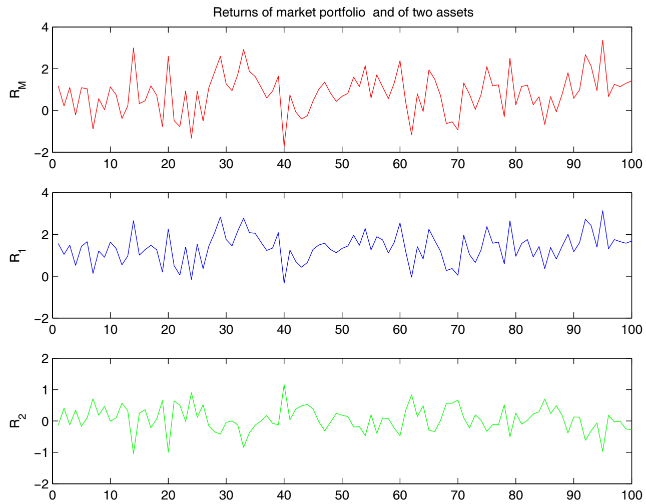
Αυτό είναι το μοντέλο CAPM.

7.7.3 Εκτίμηση των παραμέτρων του μοντέλου $CAPM$

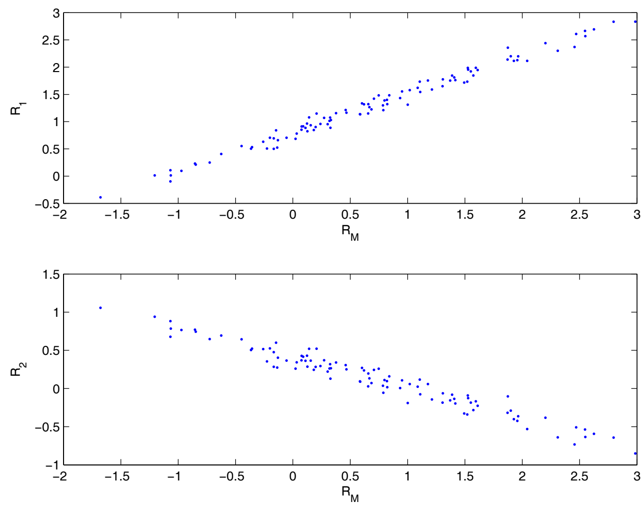
Για τις παραμέτρους του μοντέλου CAPM μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τους ακόλουθους εκτιμητές:

$$\begin{aligned}(\beta_i)_{est} &= \frac{\sum_{i=1}^T (R_{M,t} - (\mathbb{E}[R_M])_{est})R_{i,t}}{\sum_{t=1}^T (R_{M,t} - (\mathbb{E}[R_M])_{est})^2} \\ (a_i)_{est} &= (\mathbb{E}[R_i])_{est} - (\beta_i)_{est}(\mathbb{E}[R_M])_{est} \\ (\sigma_{ei}^2)_{est} &= \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^T [R_{i,t} - ((a_i)_{est} + (\beta_i)_{est}R_{M,t})]^2\end{aligned}$$

Παράδειγμα 7.7.1 Ας θεωρήσουμε ότι έχουμε τις παρατηρήσεις απο τις αποδοσεις του χαρτοφυλακίου της αγοράς και απο δύο τίτλους που φαίνονται στο σχήμα 7.13. Τα δεδομένα αυτά κατασκευάστηκαν με προσομοίωση μια γνωστής διδιάστατης απο κοινού κατανομής για τις αποδόσεις ενός τίτλου, R_i και του δείκτη που έχουμε



Σχήμα 7.13: Παρατηρήσεις των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς και δύο τίτλων



Σχήμα 7.14: Παρατηρήσεις των αποδόσεων του χαρτοφυλακίου της αγοράς και δύο τίτλων

θεωρήσει ως χαρτοφυλάκιο της αγοράς, R_M. Θα χρησιμοποιήσουμε τώρα τους παραπάνω εκτιμητές για να δούμε αν οι αποδόσεις των τίτλων αυτών είναι πράγματι συσχετισμένες με τις αποδόσεις του χαρτοφυλακίου της αγοράς. Η γραφική αναπαράσταση των δεδομένων στο σχήμα 7.14 μας δείχνει ότι αναμένουμε οι αποδόσεις του τίτλου 1 να είναι θετικά συσχετισμένες με τις αποδόσεις του δείκτη ενώ οι αποδόσεις του τίτλου 2 να είναι αρνητικά συσχετισμένες με τις αποδόσεις του δείκτη.

Η εκτίμηση του μοντέλου CAPM γίνεται χρησιμοποιώντας του παραπάνω τύπους και δίνει τις τιμές

$$a_1 = 0,7988, \;\; b_1 = 0.6995$$
$$a_2 = 0.3988, \;\; b_2 = -0.4005$$

ενώ η διασπορά του θορύβου και στις δύο περιπτώσεις βγαίνει ίση προς 0.01. Η εκτίμηση αυτή είναι σύμφωνη με την (γνωστή) κατανομή απο την οποία και δημιουργήσαμε τα προσομοιωμένα δεδομένα. Φυσικά το παράδειγμα αυτό είναι τελείως τετριμένο και παρατίθεται μόνο για να δώσουμε μια ιδέα του πως λειτουργεί η εκτίμηση των παραμέτρων. Στην πραξη αυτό θα γίνει απο πραγματικά δεδομένα, την κατανομή των οποίων δεν θα γνωρίζουμε, και οι εκτιμήτριες που εισάγαμε παραπάνω θα μας δώσει ορισμένες πληροφορίες για την κατανομή αυτή.

Πολλές οικονομετρικές μελέτες έχουν αφιερωθεί στον εμπειρικό έλεγχο του μοντέλου CAPM. Σε ορισμένες περιπτώσεις το μοντέλο επαληθεύεται αλλά μία γενική παρατήρηση είναι οτι οι συντελεστές β δεν είναι σταθεροί στον χρονο αλλά μπορεί να μεταβάλλονται και μάλιστα να δείχνουν και κάποια τάση επιστροφής στον μέσο. Άλλη παρατήρηση είναι ότι το β μεταβάλλεται ανάλογα με το ποιός δείκτης ή το ποιό χαρτοφυλάκιο χρησιμοποιείται για να προσεγγίσουμε το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Για παράδειγμα, οι εκτιμήσεις του β για διάφορους τίτλους που εκδίδει περιοδικά η εταιρεία Merrill Lynch χρησιμοποιούν σαν χαρτοφυλάκιο της αγοράς τον δείκτη S&P 500 ενώ οι εκτιμήσεις του β που εκδίδει η εταιρεία Value Line χρησιμοποιεί τον δείκτη NYSE σαν το χαρτοφυλάκιο της αγοράς. Οι εμπειρικές αποκλίσεις απο το μοντέλο CAPM μπορεί να αποδοθούν π.χ. σε διαφορά μεταξύ του επιτοκίου με το οποίο κάποιος οργανισμός δανείζει και αυτού με τον οποίο δανείζεται, ή ακόμα και σε πιο θεμελιώδεις λόγους, όπως η απόκλιση των αποδόσεων των τίτλων απο την κανονική κατανομή και συνεπώς στην ανάγκη συμπλήρωσης του μοντέλου χαρτοφυλακίου που χρησιμοποιεί τον μέσο και την διασπορά σαν βασικές μεταβλητές που χαρακτηρίζουν το χαρτοφυλάκιο, από συμπληρωματικά μέτρα όπως π.χ. το skewness.

7.8 Δείκτες της απόδοσης χαρτοφυλακίων

Μπορούμε τώρα να αναφέρουμε ορισμένους δείκτες που μπορεί να χρησιμοποιηθούν για την μελέτη της απόδοσης ενός χαρτοφυλακίου.

1. Ο δείκτης του Sharpe $S = \frac{\mathbb{E}[R_P]-r}{\sigma_P}$
2. Ο δείκτης του Treynor $T = \frac{\mathbb{E}[R_P]-r}{\beta_P}$
3. Ο δείκτης του Jensen ή το άλφα a_P
4. Ο λόγος αξιολόγησης (appraisal ratio) $\frac{\alpha_P}{\sigma(\epsilon_P)}$ όπου $\sigma(\epsilon_P)$ είναι ο μη συστηματικός κίνδυνος του χαρτοφυλακίου.

Οι δείκτες αυτοί συνδέονται μεταξύ τους και μεταξύ των αντίστοιχων δεικτών για το χαρτοφυλάκιο της αγοράς.

7.9 Μοντέλα της αγοράς πολλών παραγόντων

Το βασικό μοντέλο αυτού του τύπου αναπτύχθηκε από τον Stephen Ross την δεκαετία του 1970. Σύμφωνα με το μοντέλο αυτό οι αποδόσεις όλων των τίτλων στην άγορα εξαρτώνται γραμμικά από την τιμή K στοχαστικών παραγόντων της οικονομίας (risk factors) οι οποίοι είναι κοινοί για όλους τους τίτλους, σύμφωνα με την παρακάτω σχέση

$$R_i = \mathbb{E}[R_i] + b_{i1}F_1 + \cdots + b_{iK}F_K + \epsilon_i, \quad i = 1, \cdots, N$$

όπου $(F_1, \cdots, F_K)$ είναι οι K στοχαστικοί παράγοντες της οικονομίας που επηρεάζουν τις αποδόσεις των N τίτλων που μας ενδιαφέρουν, b_{ij} είναι αριθμοί που μας δίνουν το πόσο οι αποδόσεις του τίτλου i επηρεάζονται από τον παράγοντα της οικονομίας j και ϵ_i είναι όροι σφάλματος. Αν $b_{ij} > 0$ λέμε ότι οι αποδόσεις του τίτλου i επηρεάζονται θετικά από τις μεταβολές του παράγοντα j υπό την έννοια ότι αύξηση της τιμής του παράγοντα j οδηγεί σε αύξηση των αποδόσεων του τίτλου i. Αν $b_{ij} < 0$ λέμε ότι οι αποδόσεις του τίτλου i επηρεάζονται αρνητικά από τις μεταβολές του παράγοντα j υπο την έννοια ότι αύξηση της τιμής του παράγοντα j οδηγέι σε ελάττωση των αποδόσεων του τίτλου i. Οι όροι b_{ij} εκφράζουν την ευαισθησία των αποδόσεων των διαφόρων τίτλων στους διαφορετικούς παράγοντες κινδύνου που επηρεάζουν την οικονομία.

Το μοντέλο αυτό μπορεί να γραφεί και σε πιο συμπαγή μορφή ως

$$R = \mathbb{E}[R] + bF + \epsilon$$

όπου $R \in \mathbb{R}^{1\times N}$, $b \in \mathbb{R}^{N\times K}$, $F \in \mathbb{R}^{K\times 1}$, $\epsilon \in \mathbb{R}^{N\times 1}$. Οι όροι bF εκφράζουν συστηματικό κίνδυνο ενώ οι όροι ϵ εκφράζουν μη συστηματικό κίνδυνο. Ο μη συστηματικός κίνδυνος θεωρούμε ότι μπορεί να εξαλειφθεί σε ένα αρκετά μεγάλο χαρτοφυλάκιο. Εναλλακτικά μπορούμε να πούμε ότι $\mathbb{E}[\epsilon] = 0$.

Οι παράγοντες της οικονομίας μπορεί να είναι είτε μακροοικονομικοί παράγοντες (π.χ. ακαθάριστο εθνικό προιόν, πληθωρισμός κλπ), είτε δειktες της αγοράς (π.χ. χρηματιστηριακοί δείκτες) κ.α. Οι παράγοντες δεν είναι εν γένει γνωστοί απο πριν και από στατιστικούς ελέγχους μπορούμε να επαληθεύουμε κάθε φορά το αν συγκεκριμένοι παράγοντες οι οποίοι θεωρούμε ότι πρέπει να επηρεάζουν τις αποδόσεις των διαφόρων τίτλων πράγματικα επηρεάζουν ή όχι.

Ο έλεγχος και η βαθμονόμηση μοντέλων σαν το παραπάνω γίνεται με μεθόδους πολλαπλής παλινδρόμησης στην στατιστική. Εναλλακτικοί τρόποι βαθμονόμησης του μοντέλου μπορεί να βασίστουν σε μεθόδους μέγιστης πιθανοφάνειας.

Η απουσία arbitrage επιβάλλει τη σχέση

$$\mathbb{E}[R_i] = \lambda_0 + \lambda_1 b_{i1} + \cdots + \lambda_K b_{iK}$$

όπου λ_0 είναι η αναμενόμενη απολαβή ενός τίτλου με μηδενικό συστηματικό κίνδυνο και λ_j είναι το risk premium το οποίο σχετίζεται με τον παράγοντα j.

Η σχέση αυτή θυμίζει το μοντέλο CAPM και μπορεί να θεωρηθεί σαν μία γενίκευση του. Μπορούμε να ξαναγράψουμε την παραπάνω σχεση ως

Για κάθε τίτλο $i = 1, \cdots, N$ υπάρχουν μη μηδενικές σταθερές $\lambda_0, \cdots, \lambda_K$ τέτοιες ώστε

$$\mathbb{E}[R_i] - \lambda_0 = \lambda_1 b_{i1} + \cdots + \lambda_K b_{iK}$$

Κεφάλαιο 8

Βασικές έννοιες διαχείρισης κινδύνου

8.1 Μέτρα κινδύνου: Αξία στον κίνδυνο ($Value\, at\, Risk - VaR$)

Στην παραπάνω ανάλυση χρησιμοποιήσαμε σαν μέτρο του κινδύνου την απόκλιση των πραγματοποιήσεων των αποδόσεων των τίτλων, σε κάποιες καταστάσεις του κόσμου από την αναμενόμενη απόδοση, δηλαδή την τυπική απόκλιση. Αυτό είναι ένα μέτρο κινδύνου, το οποίο όπως γνωρίζουμε από την στατιστική είναι το πλήρες μέτρο αν οι αποδόσεις των τίτλων ακολουθούν την κανονική κατανομή. Κάτι τέτοιο όμως δεν είναι πάντοτε μία καλή υπόθεση. Είμαστε λοιπόν αναγκασμένοι να ορίσουμε διαφορετικά μέτρα κινδύνου τα οποία να δίνουν καλή περιγραφή της κατάστασης αν οι αποδόσεις των τίτλων δεν ακολουθούν την κανονική κατανομή.

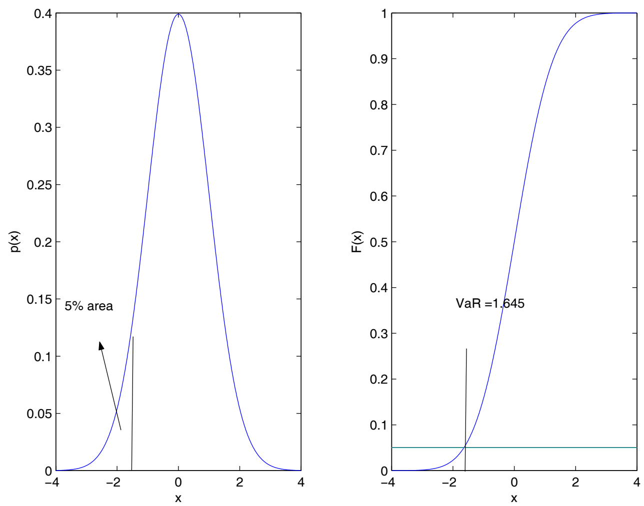
Ένα τέτοιο μέτρο είναι η αξία στον κίνδυνο. Η αξία στον κίνδυνο είναι ένα μέτρο κινδύνου που επικεντρώνει στην ουρά της κατανομής των αποδόσεων ή των απολαβών. Ας υποθέσουμε π.χ. ότι η απόδοση ενος περιουσιακού στοιχείου έχει μία κατανομή $p(r)$ και μας ενδιαφέρει να βρούμε ποιά είναι η ελάχιστη απόδοση που μπορούμε να περιμένουμε για τον τίτλο αυτό για ένα δεδομένο διάστημα εμπιστοσύνης. Για παράδειγμα ποιά είναι η ελάχιστη αποδοση που μπορούμε να περιμένουμε με πιθανοτητα $a\%$; Ή το αλλιώς το VaR_a είναι το ποσό κάτω από το οποίο δεν περιμένουμε να έχουμε αποδόσεις με πιθανοτητα $1-a$.

Αυτό μπορεί να φανεί στο σχήμα 8.1. Στο σχήμα αυτό υποθέτουμε ότι οι αποδόσεις είναι κανονικά κατανεμημένες $R \sim N(0,1)$. Το Var_a είναι η απόδοση x^* για την οποία $P(x < x^*) = a$ ή ισοδύναμα $P(x > x^*) = 1-a$. Αυτό μπορεί να βρεθεί από την αθροιστική συνάρτηση κατανομής και την αντιστροφή της. Αν $F(x) = \int_{-\infty}^{x} P(x^{'})dx^{'}$ είναι η αθροιστική συνάρτηση κατανομής της $P(x)$ τότε η αξία στον κίνδυνο που αντιστοιχεί στην κατανομή αυτή για το επίπεδο εμπιστοσύνης a θα βρίσκεται από την επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης $F(x) = a$. Η λύση της εξίσωσης, ως προς x, αυτής θα μας δώσει την αξία στον κίνδυνο VaR_a για την κατανομή αυτή. Στην περίπτωση που $R \sim N(0,1)$ επιλύοντας αριθμητικά την εξίσωση αυτή βρίσκουμε ότι $VaR_{0.05} = -1.645$. Το matlab επιλύει αυτόματα την εξίσωση αυτή με την εντολή $norminv(0.05, 0, 1)$. Η αριθμητική επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης μπορεί να γίνει με μία επαναληπτική μέθοδο τύπου π.χ. Newton-Raphson.

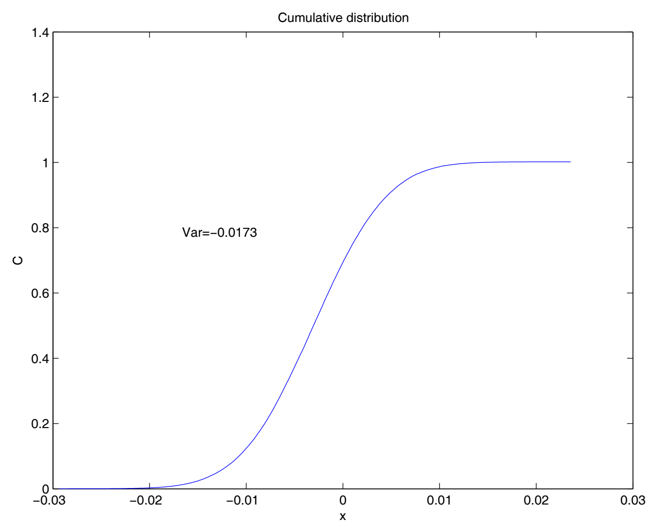
Μία εναλλακτική μεθοδολογία υπολογισμού της αξίας στον κίνδυνο μπορεί να γίνει κάνοντας χρήση της μεθόδου προσομοίωσης Monte-Carlo βάσει της οποίας προσομοιώνουμε δεδομένα που ακολουθούν την κατανομή της αξίας του τίτλου. Απο τα προσομοιώμενα δεδομένα κατασκευάζουμε την αθροιστική συνάρτηση κατανομή και με την επίλυση της αλγεβρικής εξίσωσης μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία στον κίνδυνο. Η μεθοδολογία αυτή χρησιμοποιείται στο πρόγραμμα matlab normalvar.m το οποίο δίνεται στο παράρτημα. Η μέθοδος Monte-Carlo είναι μία πολύ καλή μεθοδος για τον υπολογισμό της αξίας στον κίνδυνο εφόσον μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό της αξίας στον κίνδυνο περίπλοκων χαρτοφυλακίων που αποτελούνται απο μεγάλη ποικιλία διαφορετικών τίτλων. Για παράδειγμα στο σχήμα 8.2 φαίνεται ο υπολογισμός της αξίας στον κίνδυνο μιάς επένδυσης που η αξία της είναι κατανεμημένη με την κανονική κατανομή με μέσο $\mu = -0.3\%$ και διασπορά $\sigma = 0.6\%$ κάνοντας χρήση της μεθόδου αυτής.

Η αξία στον κίνδυνο είναι ένα ενδιαφέρον μέτρο κινδύνου γιατί μας δίνει κατευθείαν ένα χρηματικο ποσό και όχι μία πιθανότητα. Συνεπώς είναι πιο απλό να γίνει κατανοητό το τι σημαίνει από ανθρώπους της αγοράς παρά διάφορες ποσότητες που σχετίζονται με την ίδια την κατανομή πιθανότητας όπως π.χ. η διασπορά.

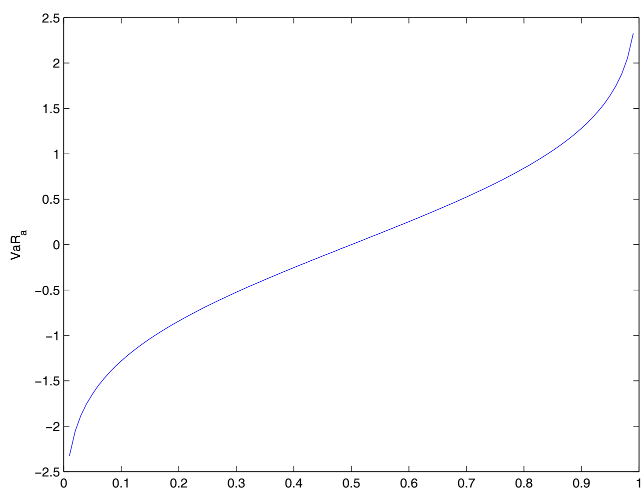
Στο σχήμα 8.3 δείχνουμε το πως μεταβάλλεται η αξία στον κίνδυνο αν μεταβάλλεται το επίπεδο εμπιστοσύνης a.



Σχήμα 8.1: Ο υπολογισμός της αξίας στον κίνδυνο



Σχήμα 8.2: Ο υπολογισμός της αξίας στον κίνδυνο με την μέθοδο $Monte - Carlo$



Σχήμα 8.3: Η μεταβολή της αξίας στον κίνδυνο σαν συνάρτηση του επιπέδου εμπιστοσύνης a

8.2 Αξία στον κίνδυνο θέσεων από μία μετοχή

Θα υπολογίσουμε τώρα την αξία στον κίνδυνο θέσεων που αποτελούνται απο μετοχές ενός είδους μόνο.

Θα δείξουμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία στον κίνδυνο σαν συνάρτηση των χαρακτηριστικών της μετοχής δηλαδή της πτητικοτητας (volatility) και του συνολικού ποσού που έχουμε επενδύσει στην μετοχή. Επίσης επειδή η αξία στον κίνδυνο θα πρέπει να υπολογιστεί για συγκεκριμένη χρονική διάρκεια.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επενδύσει το ποσο X σε μετοχές ενος είδους οι οποίες έχουν ημερήσια μεταβλητότητα σ_d και ότι θέλουμε να κρατήσουμε αυτή την θέση για N ημέρες. Ποιά θα είναι η αξία στον κίνδυνο της θέσης αυτής με επίπεδο εμπιστοσύνης a;

Ας αρχικά κάνουμε την απλουστευμένη υπόθεση ότι οι αποδοσεις της μετοχής μπορεί να μοντελοποιηθούν απο την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά όπως αυτή εκφράζεται από την ημερήσια μεταβλητότητα.

Η υπόθεση αυτή μπορεί να αιτιολογηθεί γιατί συνήθως η αναμενόμενη αποδοση μετοχών είναι πολύ μικροτερη απο την τυπική απόκλιση των αποδοσεων.

Για να απαντήσουμε την ερώτηση που θέσαμε πρέπει να υπολογίσουμε την συνολική τυπική αποκλιση του χαρτοφυλακίου μας στο διάστημα των N ημερών, η οποία είναι

$$STD = X\sigma_d\sqrt{N}$$

Απο τους πίνακες της κανονικής κατανομής ή κάνοντας χρήση μιας επαναληπτικής μεθόδου, υπολογίζουμε την λύση της εξίσωσης

$$N(b) = 1 - a$$

(ως προς b).

Η αξία στον κίνδυνο του παραπάνω χαρτοφυλακίου θα είναι

$$VaR_{a,N} = bX\sigma_d\sqrt{N}$$

Το $VaR_{a,N}$ αντιστοιχεί σε κάποιο χρηματικό ποσό. Πως θα ερμηνεύσουμε αυτό το ποσό;

Το $VaR_{a,N}$ είναι το ποσό το οποίο είμαστε κατά $a\%$ βέβαιοι ότι το χαρτοφυλάκιο μας δεν θα μειωθεί σε αξία παραπάνω απο αυτό, ή ισοδύναμα, έχουμε $1 - a\%$ πιθανότητα να μειωθεί σε αξία παραπάνω απο αυτό.

Παράδειγμα 8.2.1 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επενδύσει το ποσό των 10000 ευρω σε μία μετοχή με ημερήσια πτητικοτητα 3%. Αν κρατήσουμε αυτή την θέση για 20 ημερες ποια θα είναι η αξία στον κίνδυνο για το χαρτοφυλάκιο αυτό με διάστημα εμπιστοσύνης 99%; Με άλλα λόγια βρείτε ένα ποσό για το οποίο να μπορείτε να πείτε με βεβαιότητα κατά 99% ότι το χαρτοφυλάκιο δεν θα υποχωρήσει σε αξία παραπάνω από το ποσό αυτό. Ισοδύναμα, βρείτε ένα ποσό για το οποίο μπορείτε να πείτε ότι με πιθανοτητα 1% θα εχετε υποχώρηση της αξίας του χαρτοφυλακίου περισσότερο απο αυτό.

Από τα παραπάνω

$$VaR_{99\%,20} = 10000\frac{3}{100}\sqrt{20}b$$

όπου b είναι η λύση της εξίσωσης $N(b) = 0.01$. Με την μέθοδο Newton-Raphson ή με την χρήση πινάκων, βρίσκουμε ότι $N(2.33) = 0.01$ δηλαδή $b = 2.33$.

Συνεπώς,

$$VaR_{99\%,20} = 10000\frac{3}{100}\sqrt{20}2.33 = 3126$$

Συνεπώς με βεβαιότητα 99% το χαρτοφυλάκιο αυτό δεν θα υποχωρήσει σε αξία περισοτερο από 3126 ευρώ, και με πιθανότητα 1% θα υποχωρήσει περισσότερο απο 3126 ευρώ.

Φυσικά η παραπάνω εκτίμηση έγινε με την υποθεση ότι η απόδοση της μετοχής μπορεί να μοντελοποιηθεί σαν μία τυχαία μεταβλητή που ακολουθεί την κανονική κατανομή με μέσο 0 και διασπορά που αντιστοιχεί στην ημερήσια πτητικοτητα.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι αντί για μία μετοχή έχουμε π.χ. δύο μετοχές οι οποίες έχουν ένα παράγοντα συσχέτισης μεταξύ τους ρ. Ποιο θα είναι το VaR ενός χαρτοφυλακιου που αποτελείται απο θέσεις στις δύο αυτές μετοχές και το οποίο θέλουμε να κρατήσουμε για διάστημα N ημερών;

Έστω ότι οι ημερήσιες πτητικότητες είναι $\sigma_{1,d}$ και $\sigma_{2,d}$ αντίστοιχα και ότι έχουμε επενδύσει τα ποσά X_1 και X_2 μετοχές αυτές. Τότε οι τυπικές αποκλίσεις των χαρτοφυλακίων για το διάστημα των N ημερων είναι αντίστοιχα

$$\sigma_{X_1} = \sqrt{N}\sigma_{1,d}X_1$$

και

$$\sigma_{X_2} = \sqrt{N}\sigma_{2,d}X_2$$

Εφόσον οι X_1 και X_2 είναι κανονικές τυχαίες μεταβλητές με μέσο 0 και η $X_1 + X_2$ θα είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέσο 0 και διασπορά

$$\sigma_{X_1+X_2} = \sqrt{\sigma^2_{X_1} + \sigma^2_{X_2} + 2\rho\sigma_{X_1}\sigma_{X_2}}$$

Η αξία στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$VaR_{a,N} = b\sigma_{X_1+X_2}$$

όπου $N(b) = 1 - a$.

Παράδειγμα 8.2.2 Θεωρείστε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο 10000 ευρώ σε μία μετοχη με ημερήσια μεταβλητότητα 3% και απο 2000 ευρώ σε μία μετοχη με ημερήσια μεταβλητότητα 5%. Θεωρούμε ότι οι αποδόσεις των μετοχών έχουν παράγοντα συσχέτισης 0.5. Βρείτε την αξία στον κίνδυνο με διάστημα εμπιστοσύνης 99% του χαρτοφυλακίου αυτού για 20 ημέρες. Βρείτε επίσης τις αξίες στον κίνδυνο των ξεχωριστών χαρτοφυλακίων αυτών και συγκρίνετε το άθροισμα τους με την αξια στον κίνδυνο του συνολικού χαρτοφυλακίου.

Έχουμε ότι

$$\sigma_{X_1} = 10000\frac{3}{100}\sqrt{20} = 1341.6$$

$$\sigma_{X_2} = 2000\frac{5}{100}\sqrt{20} = 447.21$$

$$\sigma_{X_1+X_2} = \sqrt{1341.6^2 + 447.21^2 + 2 \times 0.5 \times 1341.6 \times 447.21} = 1612.5$$

Συνεπώς

$$VaR_{99\%,20,X_1+X_2} = 2.33\sigma_{X_1+X_2} = 3757$$

Μπορούμε να δούμε ότι

$$VaR_{99\%,20,X_1} = 2.33\sigma_{X_1} = 3126$$

$$VaR_{99\%,20,X_2} = 2.33\sigma_{X_2} = 1042$$

Παρατηρούμε ότι

$$VaR_{99\%,20,X_1+X_2} < VaR_{99\%,20,X_1} + VaR_{99\%,20,X_2}$$

Η ιδιοτητα αυτή του VaR ονομάζεται υπο-αθροιστικοτητα και η διαφορά μεταξύ του $VaR_{99\%,20,X_1+X_2}$ και $VaR_{99\%,20,X_1} + VaR_{99\%,20,X_2}$ αποτελεί το ώφελος της διαφοροποίησης. Η διαφορά αυτή θα αλλάζει όταν θα αλλάζει ο συντελεστή συσχέτισης των μετοχών και θα γίνεται μεγαλύτερη αν το ρ είναι αρνητικό.

Σχόλιο 8.2.1 *Η υποαθροιστικοτητα, αν και είναι μία ιδιότητα που πρέπει να έχει ένα μέτρο κινδύνου, δεν ισχύει πάντοτε για την αξία στον κίνδυνο. Μπορεί κα νείς να κατασκευάσει χαρτοφυλάκια για τα οποία η υποαθροιστικότητα δεν ισχύει για την αξία στον κίνδυνο.*

Το παραπάνω πλαίσιο μπορεί να επεκταθεί και στην περίπτωση οποιουδήποτε αριθμού μετοχών.

Στην περίπτωση αυτή η συνολική ημερήσια μεταβλητότητα του χαρτοφυλακίου θα είναι ίση προς

$$\sigma^2_P = \sum_i \sum_j \rho_{ij} a_i a_j \sigma_i \sigma_j$$

όπου a_i είναι το ποσό το οποίο έχει τοποθετηθεί στον τίτλο i. Για N ημέρες η πτητικοτητα θα είναι $\sigma_P\sqrt{N}$ οπότε η αξία στον κίνδυνο σε επίπεδο εμπιστοσύνης 99% θα είναι ίση προς $2.33\sigma_P\sqrt{N}$.

8.3 Επίδραση της μεταβολής των επιτοκίων στην αξία χαρτοφυλακίων ομολόγων

Για να υπολογίσουμε την επίδραση της μεταβολής των επιτοκίων στην αξία χαρτοφυλακίων που περιέχουν ομόλογα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε την έννοια της διάρκειας (duration) που συναντήσαμε προηγουμένως.

Η μεταβολή της αξίας ενος χαρτοφυλακίου που αποτελείται απο ομόλογα αν μεταβληθεί η αποδοση δινεται απο την σχέση

$$\Delta P = -D_m P \Delta y$$

όπου Δy είναι η μεταβολή της αποδοσης του ομολόγου και D_m η τροποποιημένη διάρκεια του.

Παράδειγμα 8.3.1 Έστω ένα ομόλογο με διάρκεια $D = 8y$ και $y = 8\%$. Ποιά θα είναι η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής του αν μεταβληθεί η απόδοση και πάει στο $y = 7.5\%$;

Η τροποποιημένη διάρκεια θα είναι $D_m = 8/(1 + 0.08) = 7.4074$. Η ποσοστιαία μεταβολή της τιμής θα είναι ίση προς

$$\frac{\Delta P}{P} = -7.4074 \times (0.075 - 0.08) = 0.037 = 3.7\%$$

Συνεπώς η πτώση των αποδόσεων θα οδηγήσει σε αύξηση της τιμής του ομολόγου κατά 3.7%.

Η μεταβολές της αποδοσης Δy είναι αυτές που στοιχειοθετούν την μεταβλητότητα των αποδόσεων. Μέσω της παραπάνω σχέσης αυτές θα οδηγήσουν στην μεταβλητότητα της τιμής του ομολόγου και συνεπώς στην μεταβλητότητα της αξίας ενός χαρτοφυλακίου απο ομόλογα. Σαν μονάδα της μεταβλητότητας θα θεωρήσουμε την ημερήσια μεταβλητότητα.

Συνεπώς η τυπική απόκλιση της αξίας του χαρτοφυλακιου θα δίνεται απο την σχέση

$$\sigma_P = D_m P \sigma_y$$

όπου σ_y είναι η ημερήσια μεταβλητότητα της αποδόσεως του ομολόγου [1].

Κάνοντας χρήση της παραπάνω σχέσης μπορούμε να υπολογίσουμε την αξία στον κίνδυνο ενός χαρτοφυλακίου που αποτελείται απο ομόλογα και η οποία είναι

$$VaR_{99\%} = 2.33\sigma_P\sqrt{N}$$

όπου N είναι ο αριθμος των ημερών που κρατάμε την θέση αυτή.

Παράδειγμα 8.3.2 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μία θέση 100000 ευρώ σε ένα ομόλογο διάρκειας 5 ετών (προσοχή αυτή δεν είναι η λήξη του ομολόγου!) και οτι η ημερήσια μεταβλητότητα της απόδοσης των πενταετών ομολογων είναι 1%. Ποιά είναι η αξία στον κίνδυνο της θέσης αυτής αν την κρατήσουμε για 10 ημέρες;

Σύμφωνα με τα παραπάνω,

$$\sigma_P = DP\sigma_y = 5 \times 100000 \times \frac{1}{100} = 5000$$

ημερησίως.

Συνεπώς, η αξία στον κίνδυνο για το χαρτοφυλάκιο αυτο αν το κρατήσουμε για 10 ημέρες θα είναι

$$5000 \times 2.33 \times \sqrt{10} = 36841$$

Για πιο μεγάλες μεταβολές στην απόδοση αυτή η γραμμική προσέγγιση δεν είναι επαρκής, οπότε χρειάζεται να διορθώσουμε την παραπάνω προσέγγιση με ένα τετραγωνικό όρο στο (Δy) ο οποίος πολλαπλασιάζεται με την κυρτότητα του ομολόγου. Ο τύπος αυτός είναι ουσιαστικά μία εφαρμογή του αναπτύγματος Taylor.

Στην περίπτωση που έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο διαφορετικά ομόλογα, μία προσέγγιση της αξίας στον κίνδυνο θα ήταν το σύνολο της παρούσας αξίας των διαφορετικών πληρωμών ζυγισμένο με την μεταβλητότητα των διαφορετικών αποδόσεων. Αυτό αποτελεί μία προσέγγιση, η οποία δεν είναι και η μοναδική προσέγγιση. Μία διαφορετική προσέγγιση είναι η μέθοδος της απεικόνισης κατά την οποία απεικονίζουμε την θέση μας στα ομόλογα σε ισοδύναμες θέσεις απο συγκεκριμένα ομόλογα τα οποία συναλλάσσονται στις αγορές (π.χ.

[1] Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε την μεταβλητότητα σαν την τυπική απόκλιση της ημερήσια τιμής του λόγου $\frac{\Delta y}{y}$. Τότε η τυπική απόκλιση της αξία του χαρτοφυλακίου θα δίνεται απο τον τύπο $\sigma_P = D_m P y \sigma_y$.

ομόλογα του 1 μηνός, 3 μηνών, 1 έτους, 2 ετών, 5 ετών, 7 ετών, 10 ετών και 30 ετών). Από την μεταβλητότητα των τιμών αυτών των ομολόγων μπορούμε να υπολογίσουμε την μεταβλητότητα της αξίας της θέσης μας και κατά συνέπεια και την αξία στον κίνδυνο για το χαρτοφυλάκιο μας. Μία άλλη προσέγγιση είναι η προσέγγιση της ανάλυσης των principal components η οποία σχετίζεται με την πολυμεταβλητή ανάλυση. Σύμφωνα με αυτή, οι αποδοσεις των υπάρχοντων ομολόγων στην αγορά εκφράζονται σαν γραμμικοί συνδυασμοί ορισμένων στοχαστικών παραγόντων, των οποίων μπορεί να υπολογιστεί η τυπική απόκλιση. Κάνοντας χρήση του στοχαστικού αυτού μοντέλου μπορούμε να κάνουμε τον υπολογισμό της συνολικής διασποράς της θέσης μας και απο εκεί την αξία στον κίνδυνο.

8.4 Αξία στον κίνδυνο χαρτοφυλακίων με παράγωγα

Στις παραπάνω περιπτώσεις υπολογίσαμε την αξία στον κίνδυνο χαρτοφυλακίων που περιέχουν μετοχές και ομόλογα.

Η περίπτωση χαρτοφυλακίων που περιέχουν παράγωγα συμβόλαια παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον, κυρίως λογω της ισχυρής μη γραμμικοτητας που εμφανίζουν οι απολαβές των παραγωγων συμβολαίων ως προς τις μεταβολες των τιμών του υποκείμενου τίτλου (μόχλευση - leverage effect).

Η πρώτη προσέγγιση είναι η γραμμική προσέγγιση του χαρτοφυλακίου, στην οποία χρησιμοποιούμε την έννοια του Δ (θυμηθείτε τα ελληνικά γράμματα στην αποτίμηση παραγώγων).

Η μεταβολή της αξίας ενός παραγώγου ως προς την μεταβολή της τιμής του υποκείμενου τίτλου (της μετοχής) μπορει να προσεγγιστεί απο την σχέση

$$\Delta = \frac{\Delta P}{\Delta S}$$

Το Δ για τα διαφορετικα είδη παραγώγων συμβολαίων μπορεί να υπολογιστεί κάνοντας χρήση π.χ. του μοντέλου Black-Scholes ή άλλων παρεμφερών μοντέλων.

Αν $\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$ είναι η ποσοστιαία μεταβολή της αξίας του υποκειμενου τίτλου, η μεταβολή της αξίας του παραγώγου συμβολαίου είναι

$$\Delta P = S \Delta \Delta x$$

Αν υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποιό αποτελείται απο περισσότερα του ενος παράγωγα συμβόλαια πιθανόν επάνω σε διαφορετικούς βασικούς τίτλους, η μεταοβή της αξίας του συνολικού χαρτοφυλακου θα είναι ίση προς

$$\Delta P = \sum_{i}^{n} S_i \Delta_i \Delta x_i$$

όπου το άθροισμα είναι επάνω στα διαφορετικά παράγωγα συμβόλαια.

Η σχέση αυτή μας δίνει μία σχέση για την μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου αυτού που θυμίζει την σχέση για την μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου μετοχών ειδικά αν ξαναγράψουμε την παραπάνω σχέση με την μορφή

$$\Delta P = \sum_{i=1}^{n} a_i \Delta x_i$$

όπου $a_i = S_i \Delta_i$.

Για τον υπολογισμο της αξίας στον κίνδυνο θα πρέπει να υπολογίσουμε πρώτα την τυπική απόκλιση της μεταβολής της αξίας του χαρτοφυλακίου (ημερησίως) και μετά να πολλαπλασιάσουμε με τον παράγοντα 2.33 και τον παράγοντα $\sqrt{N}$ όπου N είναι ο αριθμος των ημερών που κρατάμε την θέση αυτή.

Παράδειγμα 8.4.1 Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα χαρτοφυλάκιο το οποίο αποτελείται απο παράγωγα συμβόλαια στην μετοχή 1 και στην μετοχή 2. Για χάρην του παραδείγματος ας υποθέσουμε ότι το χαρτοφυλάκιο αποτελείται απο 2 δικαιώματα αγοράς της μετοχής 1 με τιμή άσκησης 100 και απο μία ανοιχτή θέση σε 1 δικαίωμα πώλησης της μετοχής 2 με τιμή άσκησης 50. Και τα δύο δικαιώματα λήγουν σε 1 μήνα απο σήμερα. Αν η τιμή της μετοχής 1 είναι 120 σήμερα και η τιμή της μετοχής 2 είναι 30 και οι ημερήσιες πτητικότητες του είναι αντίστοιχα 2% και 1% ενώ έχουν συντελεστή συσχέτισης 0,5 εκτιμήστε την αξία στον κίνδυνο του χαρτοφυλακίου αυτού αν κρατήσουμε την θέση αυτή για 10 ημέρες.

Θα υποθέσουμε οτι το μοντέλο Black-Scholes ισχύει και θα το χρησιμοποιήσουμε για τον υπολογισμό του Δ των συμβολαίων. Χρησιμοποιώντας τα προγράμματα matlab του μαθήματος 2 μπορούμε να υπολογίσουμε τα Δ του δικαίωματος αγοράς και του δικαιώματος πώλησης.

Μπορούμε να βρούμε ότι $\Delta_c = 0.9572$ και ότι $\Delta_p = -1$. Συνεπώς το συνολικό Δ της θεσης μας στα 2 δικαιώματα αγοράς θα είναι $\Delta_1 = \Delta_{c,tot} = 2 \times 0.9572 = 1.9144$ και το συνολικό Δ της ανοκτής μας θέσης στο 1 δικαίωμα πώλησης της μετοχής 2 θα είναι $\Delta_2 = \Delta_{p,tot} = -1 \times (-1) = 1$.

Η μεταβολή της αξίας του χαρτοφυλακίου θα είναι

$$\Delta P = 120 \times 1.9144 \Delta x_1 + 30 \times 1 \times \Delta x_2 = 229.73 \Delta x_1 + 30 \times \Delta x_2$$

Θεωρούμε τώρα ότι οι Δx_1 και Δx_2 είναι κανονικά κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές, με μέσο 0 (κατά προσέγγιση) και τυπική απόκλιση 2% και 1% αντίστοιχα, ενώ έχουν συσχέτιση 0.5.

Με την βοήθεια αυτών των στοιχείων μπορούμε να βρούμε την τυπική απόκλιση της τυχαίας μεταβλητής ΔP η οποία θα ειναι (ημερησίως)

$$\sigma_P = \sqrt{(229.73 \times 2/100)^2 + (30 \times 1/100)^2 + 2 \times 0.5 \times (229.73 \times 2/100) \times (30 \times 1/100)} = 4.7517$$

Συνεπώς, η αξία στον κίνδυνο για το χαρτοφυλάκιο αυτό στις 10 ημέρες είναι

$$VaR_{99\%,10} = \sigma_P \sqrt{10} 2.33 = 35.0110$$

Φυσικά είναι εύλογη η απορία το κατά πόσον αυτή η εκτίμηση είναι καλή ή όχι δεδομένου ότι σε διάστημα 10 ημερών το Δ του χαρτοφυλακίου θα αλλάξει. Η απάντηση είναι οτι η εκτίμηση αυτή ειναι καλή σαν μία βραχυχρονια εκτίμηση αλλά θα πρέπει να διορθωθεί αν θελήσουμε πιο μακροχρονιες εκτιμήσεις για την αξία στον κίνδυνο, οποτε και θα μεταβληθεί αρκετά το Δ του χαρτοφυλακίου.

8.5 Εκτίμηση της αξίας στον κίνδυνο χρησιμοποιώντας το Γ

Για την εκτίμηση της αξίας στον κίνδυνο όταν η γραμμική προσέγγιση δεν είναι επαρκής μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την λεγόμενη τετραγωνική προσέγγιση η οποία χρησιμοποιεί το ελληνικό γράμμα Γ που σχετίζεται με την κυρτότητα ενός χαρτοφυλακίου παραγώγων ως προς την τιμη της μετοχής που χρησιμοποιείται σαν βασικός τίτλος.

Η μεταβολή της τιμής του παραγώγου για μεταβολή της τιμής της μετοχής κατά ΔS δίνεται απο την σχέση

$$\Delta P = \Delta \, \Delta S + \frac{1}{2} \Gamma (\Delta S)^2$$

όπου τα ελληνικά γράμματα Δ και Γ μπορούν να υπολογιστούν χρησιμοποιώντας π.χ. το μοντέλο Black-Scholes.

Αν ορίσουμε $\Delta x = \frac{\Delta S}{S}$ έχουμε

$$\Delta P = S \Delta \, \Delta x + \frac{1}{2} S^2 \Gamma (\Delta x)^2$$

Ακόμα και αν η τυχαία μεταβλητή Δx μπορεί να προσεγγιστεί απο μία κανονική τυχαία μεταβλητη, η τυχαία μεταβλητή ΔP δεν μπορεί.

Υπάρχουν αρκετές προσεγγιστικές μέθοδοι για τον υπολογισμό των παραμέτρων της κατανομής της ΔP όπως π.χ ο υπολογισμος των πρώτων ροπών της ΔP ή το ανάπτυγμα Cornish -Fisher στα οποία δεν θα επεκταθούμε εδώ.

Μία αρκετά δημοφιλής μέθοδος για τον υπολογισμό της αξίας στον κίνδυνο σε περιπτώσεις χαρτοφυλακίων παραγώγων είναι η μέθοδος Monte-Carlo.

Ο αλγόριθμος για την μέθοδο αυτή δίνεται απο την παρακάτω μεθοδολογία

1. Υπολογίζουμε την αξία του χαρτοφυλακίου με τις σημερινές τιμές των μετοχών P_{old}
2. Παίρνουμε δείγματα απο τις τυχαίες μεταβλητές Δx_i και τις χρησιμοποιούμε για να υπολογίσουμε τις νέες τιμες των τιμών των μετοχών
3. Υπολογίζουμε την νέα αξία του χαρτοφυλακίου P_{new}
4. Υπολογίζουμε την μεταβολή της αξίας $\Delta P_{new} - P_{old}$.
5. Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία πολλές φορές και κατασκευάζουμε μία κατανομή πιθανοτητας για τα ΔP.
6. Από την κατανομή αυτή εκτιμούμε την αξία στον κίνδυνο

8.6 Σχόλια και κριτική σχετικά με το VaR

Οι παραπάνω υπολογισμοί βασίστηκαν στην υπόθεση ότι οι τυχαίες μεταβλητές οι οποίες περιγράφουν τις αποδόσεις των τίτλων είναι κανονικά κατανεμημένες και μάλιστα με μέσο ο οποίος είναι πολύ μικροτερος απο την διακύμανση. Αν το μοντέλο αυτό δεν είναι ακριβές, που πολλές φορές δεν είναι, και οι υπολογισμοί μας για την αξία στον κίνδυνο δεν είναι ακριβείς.

Η αξία στον κίνδυνο μπορεί να υπολογιστεί και με βάση άλλα μοντέλα. Π.χ. μπορούμε να συνεχίσουμε να υποθέτουμε την κανονική κατανομή των αποδόσεων χαλαρώσουμε την υπόθεση ότι η μέση τιμή είναι μηδενική. Στην περίπτωση αυτή θα πρέπει να προσθέσουμε και την μέση τιμή της αξίας του χαρτοφυλακιου στον υπολογισμό της αξίας του στον κίνδυνο.

Μία άλλη υπόθεση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι η κατανομή των αξιών των μετοχών είναι η λογαριθμικοκανονική κατανομή. Η υπόθεση αυτή είναι αρκετά πιο ακριβής και μπορεί να οδηγήσει σε αναλυτικές εκτιμήσεις της αξίας στον κίνδυνο οι οποίες είναι όμως πιο περίπλοκες.

Υπάρχουν όμως και προσεγγίσεις της αξίας στον κίνδυνο οι οποίες είναι ελεύθερες απο την υπόθεση κάποιου μοντέλου για τις τιμές των τίτλων και συνεπώς δεν οδηγούν σε παραμετρική εκτίμηση της αξίας στον κίνδυνο. Η προσέγγιση αυτή ονομάζεται η ιστορική προσέγγιση κατά την οποία οι εκτιμήσεις της αξίας στον κίνδυνο υπολογίζονται μόνο απο τις τιμές που έχουν παρατηρηθεί στην αγορά και υποθέτωντας ότι οι ίδιες διαδικασίες που παράγουν τις τιμές ισχύουν σε όλη την διάρκεια του συγκεκριμενου χρονικού διαστήματος.

Περιορισμοί του Var

Η αξία στον κίνδυνο, αν και είναι ένα πολύ χρήσιμο μέτρο για τον κίνδυνο έχει τους περιορισμούς της.

Οι πιο σοβαροί απο τους περιορισμούς αυτούς δίνονται στον παρακάτω πίνακα

- Το Var δεν δίνει πληροφορία για την ουρά της κατανομής των απωλείων. Μας δίνει πληροφορία σχετικά με το περισσότερο που μπορούμε να χάσουμε αν δεν συμβεί ένα ακραίο γεγονός. Δηλαδή, αν έχουμε πάρει επίπεδο εμπιστοσύνης 99% μας λέει το περισσότερο που μπορούμε να χάσουμε το 99% των φορών αλλά όχι το τι μπορούμε να χάσουμε αν συμβεί το 1%.

- Η χρήση του Var σαν μέτρο κινδύνου μπορεί να αποτρέψει την διαφοροποίηση! Υπάρχουν παραδείγματα διαφοροποιημένων χαρτοφυλακίων τα οποία παρουσιάζουν τιμές του Var οι οποίες είναι μεγαλύτερες από τις αντίστοιχες για τα μη διαφοροοιημένα χαρτοφυλάκια. Η ιδιότητα αυτή οφείλεται στο ότι το Var δεν δίνει πληροφορία για τα ακραία γεγονότα.

8.7 Γενικευμένα μέτρα κινδύνου - $Coherent\, Risk\, Measures$

Μέχρι τώρα είδαμε την εισαγωγή και την χρήση δύο διαφορετικών μέτρων για τον κίνδυνο. Το ένα ήταν ένα γνωστό σε όλους μας στατιστικό μέγεθος, η διασπορά, και το άλλο ήταν ένα διαφορετικό μέγεθος, η αξία στον κίνδυνο. Την τελευταία δεκαετία έχει ξεκινήσει μία μεγάλη συζήτηση σχετικά με το τι θα μπορούμε να ορίσουμε σαν μέτρο κινδύνου, και να το χρησιμοποιήσουμε αξιόπιστα στον σχεδιασμό χαρτοφυλακίων. Η συζήτηση αυτή που ξεκίνησε απο τον Artzner το 1999 οδήγησε στην εισαγωγή των coherent risk measures.

Εν γένει ένα μέτρο κινδύνου θα πρέπει να είναι μία αριθμητική συνάρτηση που θα μας πηγαίνει απο μία τυχαία μεταβλητή σε ένα αριθμό. Όσο μεγαλύτερος είναι αυτός ο αριθμός θα θέλουμε να μπορούμε να αποφανθούμε ότι η επένδυση, η απόδοση της οποίας αντιστοιχεί στην τυχαία μεταβλητή είναι πιο επικίνδυνη. Τόσο την διασπορά της τυχαίας μεταβλητής, όσο και την αξία στον κίνδυνο μπορούμε να την θεωρήσουμε σαν μία τέτοια απεικόνιση.

Για να είναι ένας αξιόπιστος χαρακτηρισμός του κινδύνου η συνάρτηση αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί ορισμένες ιδιότητες. Αυτές δίνονται στον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός 8.7.1 *Έστω $L \in \mathcal{M}$ μία τυχαία μεταβλητή η οποία αντιστοιχεί στις αποδόσεις κάποιας επένδυσης. Ένα coherent risk measure είναι μία απεικόνιση $\rho : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, δηλαδή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να δώσει τον αριθμό $\rho(L)$ που θα χαρακτηρίσει τον κίνδυνο που ενέχει η επένδυση αυτή, η οποία έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

1. *Για κάθε $L \in \mathcal{M}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε ότι $\rho(L + x) = \rho(L) + x$*

2. *Για κάθε $L_1, L_2 \in \mathcal{M}$ έχουμε ότι $\rho(L_1 + L_2) \leq \rho(L_1) + \rho(L_2)$.*

3. *Για κάθε $L \in \mathcal{M}$ και $\lambda > 0$ έχουμε ότι $\rho(\lambda L) = \lambda\rho(L)$*

4. *Αν ισχύει* $L_1 \leq L_2$ *σχεδόν βέβαια τότε* $\rho(L_1) \leq \rho(L_2)$.

Οι παραπάνω ιδιότητες είναι αρκετά αυστηρές. Για παράδειγμα κανένα απο τα δύο μέτρα κινδύνου που είδαμε μέχρι τώρα δεν είναι coherent risk measure. Η αξία στον κίνδυνο για παράδειγμα δεν ικανοποιεί την ιδιότητα της υποαθροιστικοτητας (εκτός αν περιοριστούμε σε συγκεκριμένες κατηγορίες κατανομών των κινδύνων). Αυτή η έλλειψη υποαθροιστικότητας μπορεί να έχει σοβαρές επιπτώσεις στην διαχείριση κινδύνου ενός οργανισμού. Μπορεί για παράδειγμα να οδηγήσει στην τάση ένας οργανισμός να σπασει την συνολική του θέση σε πολλές μικρότερες σε μία προσπάθεια βελτίωσης των περιθωρίων φερεγγυότητας.

Ένα μέτρο κινδύνου το οποίο είναι αρκετα κοντά στο Var αλλά είναι coherent risk measure είναι το tail Var ή ETL. Αυτό εκφράζει την αναμενόμενη απώλεια δεδομένου ότι θα συμβεί απώλεια μεγαλύτερη απο το Var δηλαδή είναι

$$ETL = E[L \mid L \geq Var]$$

Σήμερα, στην ερευνητική βιβλιογραφία μελετάται πολύ διεξοδικά το θέμα της χρήσης αυτών των coherent risk measures στην επιλογή χαρτοφυλακίου. Οι μαθηματικές τεχνικές που χρειάζονται για την επίλυση τέτοιων προβλημάτων είναι αρκετά ως πολύ προχωρημένες, και βασίζονται σε ένα κλάδο των μαθηματικών που ονομάζεται κυρτή ανάλυση. Είναι σίγουρο ότι σε 10-20 χρονια απο σήμερα οι τεχνικές αυτές θα έχουν μπεί στην καθημερινή εταιρικη ρουτίνα, όπως συμβαίνει σήμερα με την χρήση της θεωρίας του Markowitz ή της αξίας στον κίνδυνο.

Βιβλιογραφία

[1] R. E. Bailey *The economics of financial markets* Lecture Notes, Department of Economics, University of Essex 2002

[2] T. S. Campbell *Financial institutions, markets and economic activity* McGraw-Hill Book Company 1982

[3] F. K. Reilly and K. C. Brown, Investment analysis and portfolio management, Thomson, South-Western 7th edition 2003

[4] G. J. Alexander and J. C. Francis, Portfolio analysis, Prentice-Hall, Foundations of Finance Series, 1986

[5] K. Dowd, Measuring Market Risk, Wiley Finance, 2002

[6] A. J. G. Cairns, Interest Rate Models, An introduction, Princeton University Press, 2004

[7] M. Milevsky, The calculus of retirement income, Cambridge University Press 2006

Ευρετήριο