

Λογισμος II, Σειρές *Fourier*

Α. Ν. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής

Ο.Π.Α

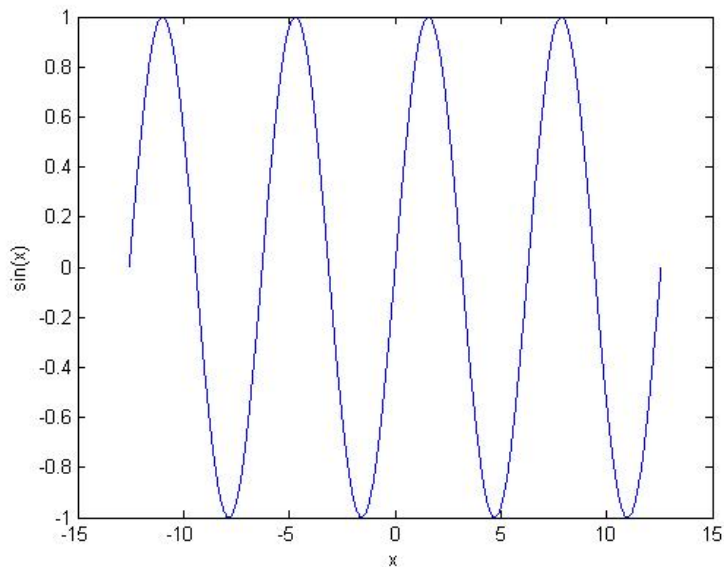
Εαρινό Εξάμηνο 2018

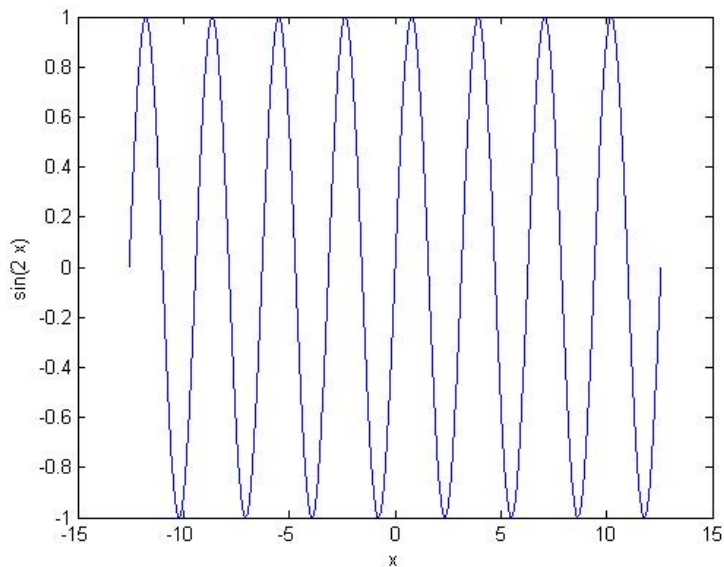
Οι συναρτήσεις $\cos(nx)$ και $\sin(nx)$, $n \in \mathbb{N}$.

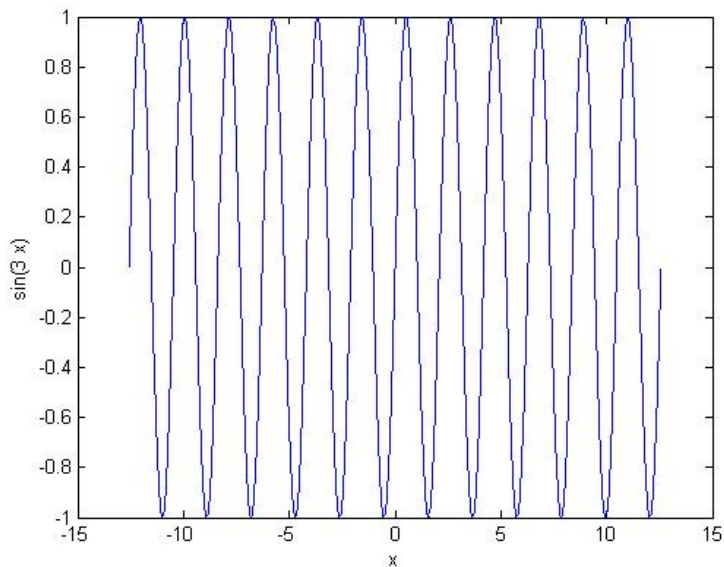
Οι συναρτήσεις αυτές είναι περιοδικές με περίοδο $T_n = \frac{2\pi}{n}$.

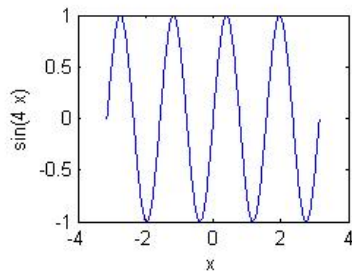
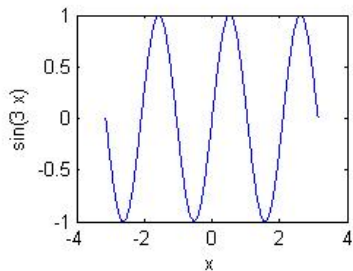
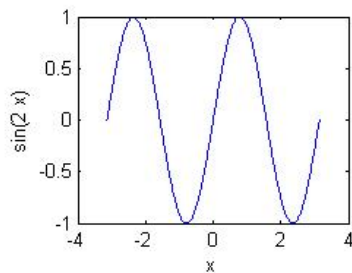
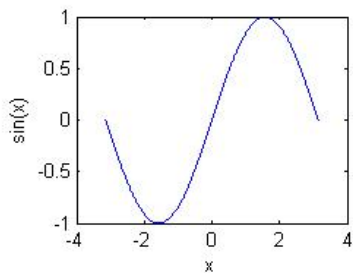
Έχουν την ιδιότητα

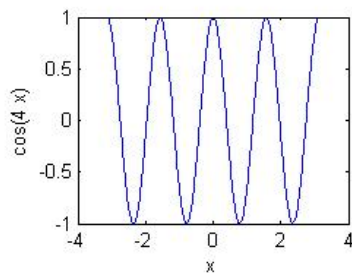
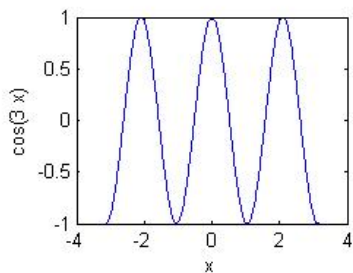
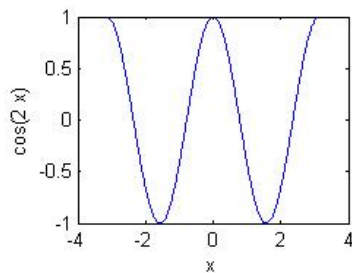
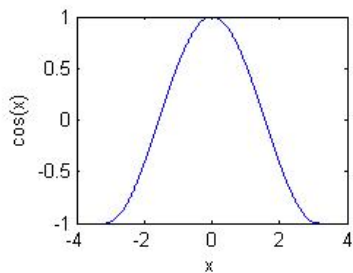
$$\int_{-\pi}^{\pi} \pi \sin(nx) \sin(mx) dx = \int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos(nx) \cos(mx) dx = \pi \delta_{n,m},$$
$$\int_{-\pi}^{\pi} \pi \cos(nx) \sin(mx) dx = 0$$

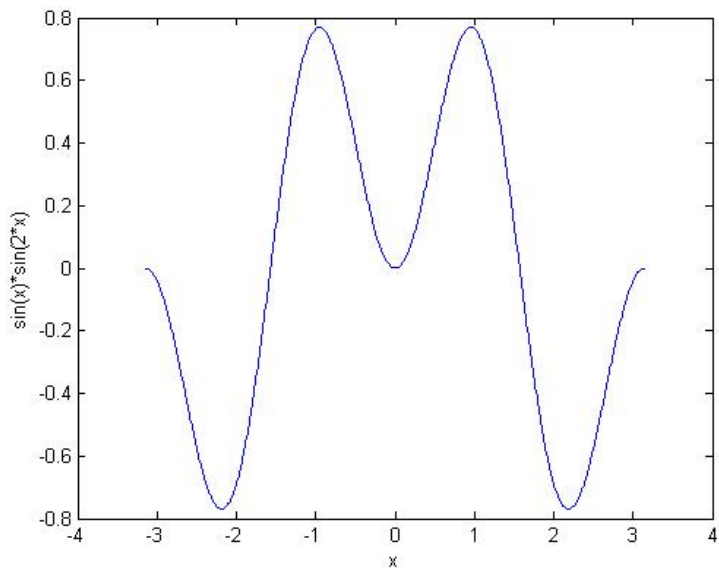


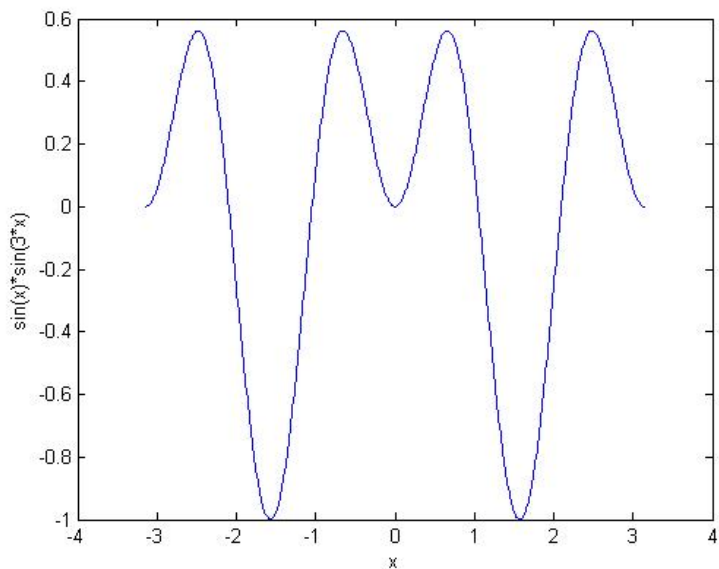


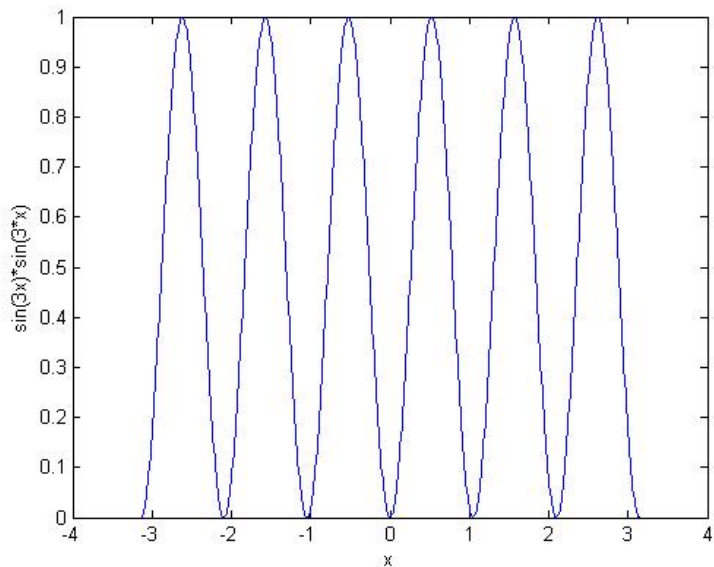












Σειρές Fourier

Αν f κατά τμήματα συνεχής στο $[-\pi, \pi]$ η σειρά Fourier της f είναι η σειρά

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

με συντελεστές,

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(nx) dx,$$

Παράδειγμα

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \alpha\nu \quad -\pi \leq x < 0, \\ 1 & \alpha\nu \quad 0 \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

με $f(x + 2\pi) = f(x)$.

Μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές της σειράς

$$a_0 = 1,$$

$$a_n = 0,$$

$$b_n = -\frac{1}{n\pi}(\cos(n\pi) - 1) = \begin{cases} 0 & \text{αν } n \text{ αρτιο} \\ \frac{2}{n\pi} & \text{αν } n \text{ περιττό} \end{cases}$$

Η σειρά Fourier της f είναι η

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin(x) + \frac{2}{3\pi} \sin(3x) + \frac{2}{5\pi} \sin(5x) + \dots \\ = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x) \end{aligned}$$

όπου αναπαραστήσαμε τους περιττούς με $n = 2k - 1$, $k = 1, 2, \dots$

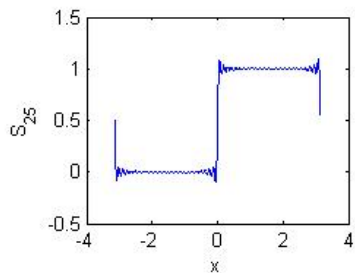
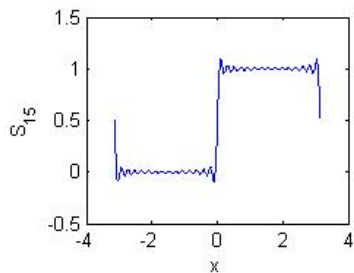
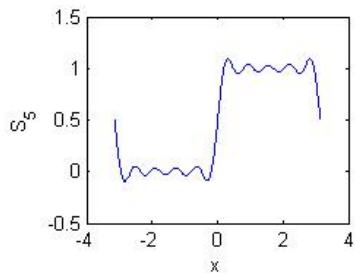
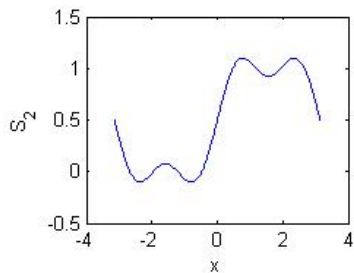
Τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier για την f προσεγγίζουν την συνάρτηση f .

Αν

$$S_K(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^K \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin((2k-1)x), \quad x \in [-\pi, \pi],$$

τότε όσο πιο μεγάλο γίνεται το K τόσο πιο μικρό το σφάλμα

$$|S_K(s) - f(x)|$$



Θεώρημα

Έστω $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση κατά τμήματα αυνεχης και

$$F(x) := \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

η σειρά *Fourier* που παράγεται απο την συνάρτηση αυτή.

- Αν το σημείο $x \in [-\pi, \pi]$ είναι **σημείο συνέχειας** της f τότε $F(x) = f(x)$.
- Αν το σημείο $x \in [-\pi, \pi]$ είναι **σημείο ασυνέχειας** της f τότε $F(x) = \frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

Η ταυτότητα του Parseval

Αν $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ συνάρτηση για την οποία ισχύει ότι $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx < \infty$, και

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)),$$

η σειρά Fourier για την συνάρτηση f , τότε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2).$$

Άρτιες και περιττές συναρτήσεις

Ορισμός

Μία συνάρτηση $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζεται

- **άρτια** αν $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in I$,
- **περιττή** αν $f(-x) = -f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Παράδειγμα

- Οι συναρτήσεις $\cos(nx)$ είναι άρτιες συναρτήσεις ενώ οι $\sin(nx)$ είναι περιττές.
- Οι συναρτήσεις x^{2m} είναι άρτιες συναρτήσεις ενώ οι x^{2m+1} είναι περιττές.

Ας πάρουμε μια συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$.

Αν f άρτια τότε η σειρά Fourier της f θα περιλαμβάνει μονο όρους $\cos(nx)$ και τον σταθερό ορο!

Αν f περιττή τότε η σειρά Fourier της f θα περιλαμβάνει μονο όρους $\sin(nx)$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία ορίζεται ως $f(x) = x^2$.

Υπολογίστε την σειρά Fourier και χρησιμοποιήστε την για να δείξετε ότι

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12},$$

και ότι

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots = \frac{\pi^2}{6}.$$

Η συνάρτηση f είναι **άρτια** συνεπώς η σειρά Fourier θα περιέχει **μόνο** **συνημίτονα**.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2}{3} \pi^2,$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cos(nx) dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{n} \sin(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2x}{n} \sin(nx) dx \\ &= 0 + \frac{1}{\pi} \left[\frac{2x}{n^2} \cos(nx) \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{n} \cos(nx) dx \\ &= \frac{4}{n^2} (-1)^n. \end{aligned}$$

Η σειρά Fourier για την f είναι η

$$F(x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(nx).$$

Για $x = 0$ η σειρά Fourier $F(0)$ συγκλίνει στην τιμή $f(0) = 0$, συνεπώς

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(n0),$$

και επειδή $\cos(n0) = 1$ έχουμε ότι

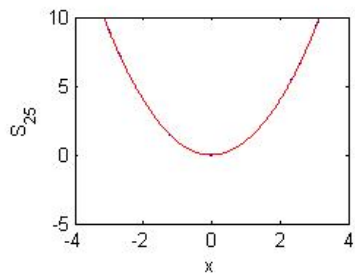
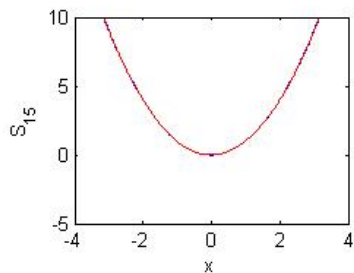
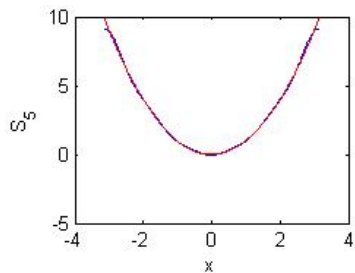
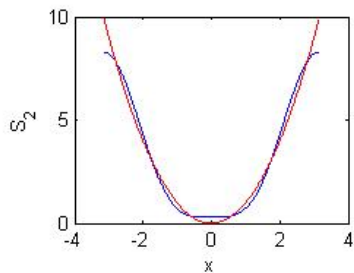
$$\frac{\pi^2}{12} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$$

Για $x = \pi$ η σειρά Fourier $F(0)$ συγκλίνει στην τιμή $f(\pi) = \pi^2$, συνεπώς

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2} (-1)^n \cos(n\pi),$$

και επειδή $\cos(n\pi) = (-1)^n$ έχουμε ότι

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$



Τι συμβαίνει αν $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$;

Ο μετασχηματισμός $y = \frac{\pi}{L}x$ απεικονίζει το διάστημα $[-L, L]$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Σύμφωνα με την παρατήρηση αυτή η σειρά Fourier για μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο $2L$, με βασικό πεδίο ορισμού $f : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ θα έχει την μορφή,

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \right)$$

για

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx,$$

Άρτιες επεκτάσεις συναρτήσεων και συνημιτονοειδείς σειρές

Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση ορίζεται μόνο στο $[0, L]$ και όχι σε όλο το $[-L, L]$, δηλαδή $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ορισμός

Η άρτια επέκταση της $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση $f_e : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως

$$f_e(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{για } x \in [L, 0), \\ f(x) & \text{για } x \in [0, L], \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή επεκτείνεται περιοδικά για $x \notin [-L, L]$ σύμφωνα με τον κανόνα $f(x + 2L) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f_e είναι μια άρτια συνάρτηση η οποία ταυτίζεται με την αρχική συνάρτηση f στο διάστημα $[0, L]$

Η σειρά Fourier για την f_e θα είναι μια σειρά που θα περιέχει μόνο όρους $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ και τον σταθερό όρο και ονομάζεται σειρά συνημιτόνων (half range cosine series)

Η σειρά αυτή αποτελεί μια προσέγγιση της αρχικής συνάρτησης f στο διάστημα $[0, L]$, μόνο απο συνημίτονα και τον σταθερό όρο,

$$F_c = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$
$$a_0 = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$
$$a_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Περιττες επεκτάσεις συναρτήσεων και ημιτονοειδείς σειρές

Ας υποθέσουμε ότι μια συνάρτηση ορίζεται μόνο στο $[0, L]$ και όχι σε όλο το $[-L, L]$, δηλαδή $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$.

Ορισμός

Η περιττή επέκταση της $f : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση $f_o : [-L, L] \rightarrow \mathbb{R}$ η οποία ορίζεται ως

$$f_o(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{για } x \in [L, 0), \\ f(x) & \text{για } x \in [0, L], \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή επεκτείνεται περιοδικά για $x \notin [-L, L]$ σύμφωνα με τον κανόνα $f(x + 2L) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Η f_e είναι μια περιττή συνάρτηση η οποία ταυτίζεται με την αρχική συνάρτηση f στο διάστημα $[0, L]$

Η σειρά Fourier για την f_o θα είναι μια σειρά που θα περιέχει μόνο όρους $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$ και και ονομάζεται σειρά ημιτόνων (half range sine series)

Η σειρά αυτή αποτελεί μια προσέγγιση της αρχικής συναρτησης f στο διάστημα $[0, L]$, μόνο απο ημίτονα,

$$F_s = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right),$$

$$b_n = \frac{2}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx.$$

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ με τύπο $f(x) = x + x^2$.

Βρείτε την άρτια και την περιττή επέκταση της συνάρτησης αυτής στο διάστημα $[-\pi, \pi]$.

Υπολογίστε την σειρά συνημιτόνων και την σειρά ημιτόνων (half range series) για την συνάρτηση f .

Η άρτια επέκταση f_e ορίζεται ως

$$f_e(x) = \begin{cases} f(-x) & \text{για } x \in [-\pi, 0), \\ f(x) & \text{για } x \in [0, \pi], \end{cases}$$

Επειδή $f(-x) = (-x) + (-x)^2 = -x + x^2$, έχουμε ότι

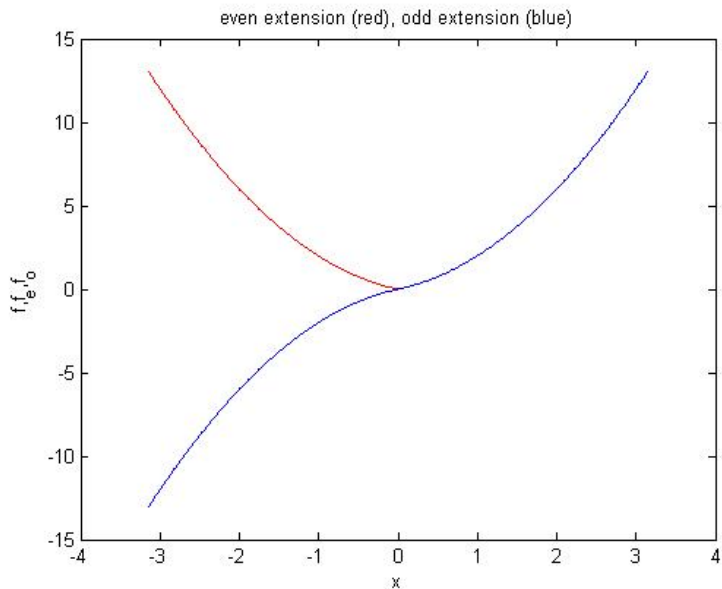
$$f_e(x) = \begin{cases} -x + x^2 & \text{για } x \in [-\pi, 0), \\ x + x^2 & \text{για } x \in [0, \pi], \end{cases}$$

Η περιττή επέκταση f_o ορίζεται ως

$$f_o(x) = \begin{cases} -f(-x) & \text{για } x \in [-\pi, 0), \\ f(x) & \text{για } x \in [0, \pi], \end{cases}$$

Επειδή $-f(-x) = -(-x) - (-x)^2 = x - x^2$, έχουμε ότι

$$f_o(x) = \begin{cases} x - x^2 & \text{για } x \in [-\pi, 0), \\ x + x^2 & \text{για } x \in [0, \pi], \end{cases}$$



Η σειρά συνημιτόνων για την f είναι

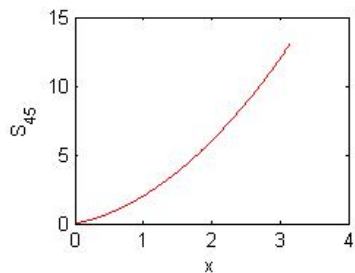
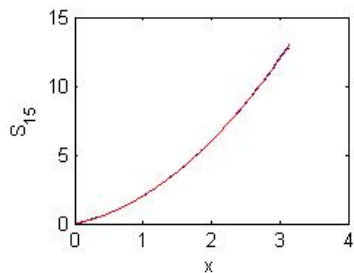
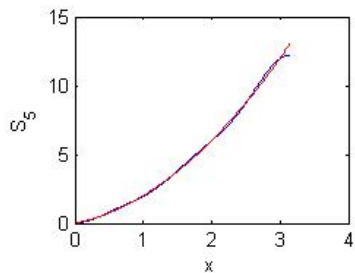
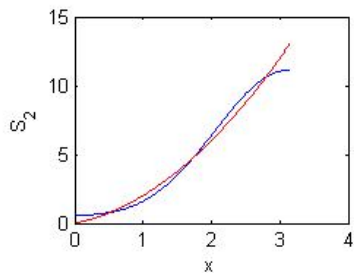
$$F_c(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \quad x \in (0, \pi),$$

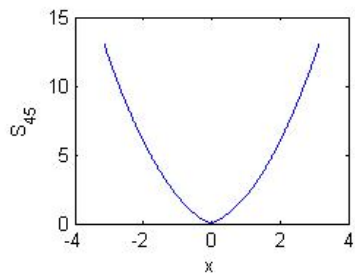
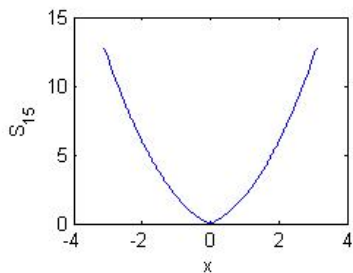
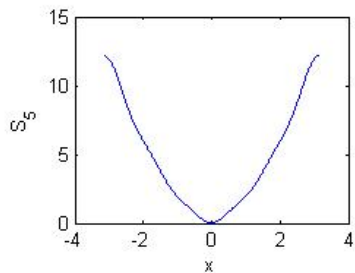
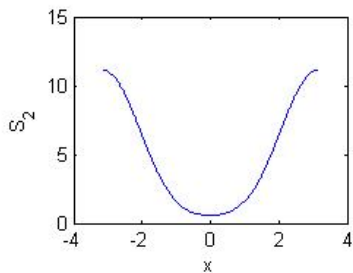
$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + x^2) dx = 2 \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2} \right),$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + x^2) \cos(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{2\pi + 1}{n^2} (-1)^n - \frac{1}{n^2} \right] \end{aligned}$$

Άρα

$$F_c(x) = \left(\frac{\pi^2}{3} + \frac{\pi}{2} \right) + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2\pi + 1}{n^2} (-1)^n - \frac{1}{n^2} \right] \cos(nx), \quad x \in (0, \pi).$$





Η σειρά ημιτόνων για την f είναι

$$F_s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx), \quad x \in (0, \pi),$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (x + x^2) \sin(nx) dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left[\frac{\pi^2 + \pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right] \end{aligned}$$

Άρα

$$F_s(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\pi^2 + \pi}{n} (-1)^{n+1} + \frac{2}{n^3} ((-1)^n - 1) \right] \sin(nx), \quad x \in (0, \pi).$$

