

Λογισμος II, \mathbb{R}^3

A. N. Γιαννακόπουλος
Τμήμα Στατιστικής

Ο.Π.Α

Εαρινό Εξάμηνο 2018

Το \mathbb{R}^3 .

$$\mathbb{R}^3 = \{x = (x_1, x_2, x_3) : x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3\} = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

Το σύνολο των αντικειμένων που χρειάζονται 3 πραγματικούς αριθμούς για να περιγραφούν πλήρως.

Παράδειγμα

Ένα σημείο της αίθουσας που για να περιγραφεί χρειάζεται μήκος, πλάτος και ύψος είναι ένα στοιχείο του \mathbb{R}^3 .

Η εξίσωση της ευθείας

Ας θεωρήσουμε ένα σημείο με διάνυσμα θέσης $b = (b_1, b_2, b_3)$ και ένα διάνυσμα κατεύθυνσης $a = (a_1, a_2, a_3)$.

Η ευθεία που περνάει από το b και είναι παράλληλη στην κατεύθυνση a δίνεται από την σχέση

$$x = b + t a, \quad t \in \mathbb{R},$$

ή κατά συνιστώσες

$$x_1(t) = b_1 + t a_1,$$

$$x_2(t) = b_2 + t a_2,$$

$$x_3(t) = b_3 + t a_3.$$

Ας θεωρήσουμε δυο σημεία με διανύσματα θέσης $a = (a_1, a_2, a_3)$ και $b = (b_1, b_2, b_3)$.

Η ευθεία που περνάει από τα a και b δίνεται από την σχέση

$$x = a + t(b - a), \quad t \in \mathbb{R},$$

ή κατά συνιστώσες

$$x_1(t) = a_1 + t(b_1 - a_1),$$

$$x_2(t) = a_2 + t(b_2 - a_2),$$

$$x_3(t) = a_3 + t(b_3 - a_3).$$

Το εξωτερικό γινόμενο στον \mathbb{R}^3

Αν έχουμε δύο διανύσματα $x = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$ και $y = y_1e_1 + y_2e_2 + y_3e_3$ στον \mathbb{R}^3 , μπορούμε να ορίσουμε ένα τρίτο διάνυσμα ως

$$\begin{aligned}x \times y &= \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2y_3 - x_3y_2)e_1 + (x_3y_1 - x_1y_3)e_2 + (x_1y_2 - x_2y_3)e_3.\end{aligned}$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}x \times y &= -y \times x, \\ x \times x &= 0\end{aligned}$$

Το διάνυσμα $x \times y$ είναι **καθετό** στο επίπεδο που παράγουν τα διανύσματα x και y και μήκος $\|x\| \|y\| \sin(\theta)$.

Η εξίσωση του επιπέδου

Έστω E ένα επίπεδο στον \mathbb{R}^3 , a ένα διάνυσμα σε αυτό, και h ένα διάνυσμα κάθετο σε αυτό.

Το x είναι οποιοδήποτε διάνυσμα στο P , αν και μόνο αν

$$x - a \text{ παράλληλο στο } P$$

ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$\langle x - a, h \rangle = 0.$$

Αυτο μας δείχνει ότι αν $x = (x_1, x_2, x_3)$ τότε

$$C_1x_1 + C_2x_2 + C_3x_3 + D = 0,$$

για κατάλληλες σταθερές C_1, C_2, C_3, D .

Απο 3 σημεία a, b, c περνάει ένα και μόνο ένα επίπεδο P .

Για να κάθορίσουμε το επίπεδο αυτό αρκεί να σκεφτούμε ότι οποιοδήποτε διάνυσμα που είναι κάθετο στο P θα πρέπει να είναι κάθετο στα διανύσματα $a - b$ και $c - b$.

Συνεπώς το διάνυσμα

$$n = (a - b) \times (c - b)$$

είναι κάθετο στο επίπεδο.

Η εξίσωση του επιπέδου λοιπόν είναι

$$\langle x - a, n \rangle = 0.$$

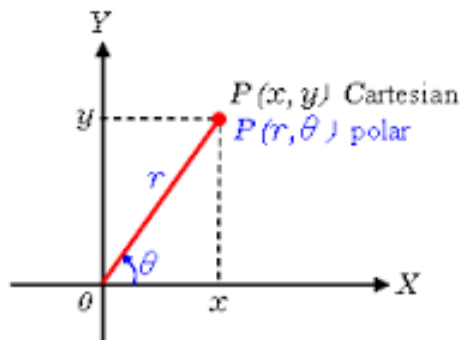
Συστήματα συντεταγμένων

Στις περιπτώσεις $n = 2, 3$ ένα διάνυσμα x μπορεί να ερμηνευθεί σαν το διάνυσμα θέσης ενός σημείου στο επίπεδο ή στο χώρο αντίστοιχα.

Όταν μιλάμε για το $x = (x_1, x_2, x_3)$ στο μυαλό μας έχουμε το σημείο A με καρτεσιανές συντεταγμένες (x_1, x_2, x_3) .

Ας ταυτίσουμε τώρα το διάνυσμα με την θέση αυτού του σημείου και ας προσπαθήσουμε να δούμε εναλλακτικούς τρόπους περιγραφής της θέσης του σημείου A .

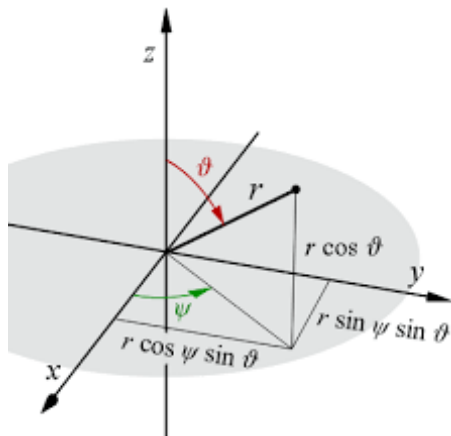
Πολικές συντεταγμένες



$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

$$r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right).$$

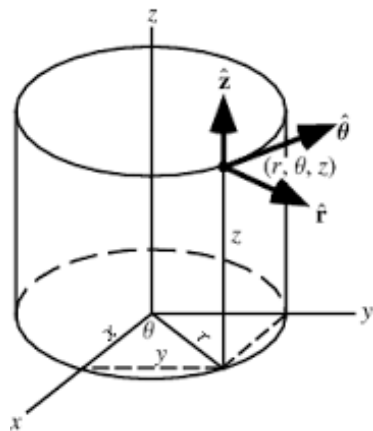
Σφαιρικές συντεταγμένες



$$x_1 = r \cos(\psi) \sin(\theta), \quad x_2 = r \sin(\psi) \sin(\theta), \quad x_3 = r \cos(\theta)$$



Κυλινδρικές συντεταγμένες



$$x_1 = r \cos(\theta), \quad x_2 = r \sin(\theta), \quad x_3 = z.$$