

Πρόβλημα 1: Παρατηρούμε τις διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος που έρχεται κορώνα με πιθανότητα p και γράμματα με πιθανότητα q .

- α) Αν T_2 είναι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να εμφανισθούν δύο διαδοχικές κορώνες να υπολογίσετε την μέση τιμή ET_2 .
- β) Θεωρούμε την αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων τον $\{0, 1, 2, \dots, k\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον $(k+1) \times (k+1)$ πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & \\ q & 0 & 0 & 0 & & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Να κατατάξετε τις καταστάσεις της και να υπολογίσετε την στάσιμη κατανομή.

- γ) Η αλυσίδα του ερωτήματος β) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο μέχρι να παρατηρήσουμε k διαδοχικές κορώνες. Να περιγράψετε την διαδικασία και να υπολογίσετε τον ET_k , δηλαδή τον μέσο χρόνο που απαιτείται μέχρι να εμφανιστούν k κορώνες.

Πρόβλημα 2: Θεωρείστε μια αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- α) Ποιά είναι η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 4 αν το αρχικό σημείο εκκίνησης η κατάσταση 1;
- β) Ποιός είναι ο μέσος χρόνος μέχρι την απορρόφηση είτε στην 0 είτε στην 4;

Πρόβλημα 3: Ένα σωματίδιο κινείται στο χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ σύμφωνα με τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & \dots \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2/3 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Να κατατάξετε τις καταστάσεις της αλυσίδας Markov και να βρείτε τη στάσιμη κατανομή της.