

Πρόβλημα 1: Ένας παίκτης στοιχηματίζει κάθε μέρα το ίδιο ποσό, x , σε κάποιο στοίχημα το οποίο κερδίζει με πιθανότητα $p = 0.6$ ή χάνει 0 με πιθανότητα $q = 1 - p$. Η αρχική περιουσία του παίκτη είναι 2 και ο παίκτης εξακολουθεί να παίζει μέχρι να καταστραφεί ή να αποκτήσει περιουσία 10.

α) Αν το μέγεθος του στοιχήματος είναι 1, να υπολογίσετε την πιθανότητα επιτυχίας καθώς και τον μέσο αριθμό ημερών που θα απαιτηθούν μέχρι να τελειώσει το παιχνίδι.

β) Επαναλάβετε αν το μέγεθος του στοιχήματος είναι 2. Ποιό από τα δύο μεγέθη συμφέρει;

Πρόβλημα 2: Έστω $\{X_n\}$ απλός τυχαίος περίπατος με $X_0 = m \in \mathbb{N}$ και $X_n = X_{n-1} + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$, όπου $\{\xi_n\}$ είναι ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $P(\xi_n = +1) = p$, $P(\xi_n = -1) = q := 1 - p$.

α) Αν $m > 0$ να υπολογίσετε την πιθανότητα ο τυχαίος περίπατος να παραμείνει θετικός για τα πρώτα n βήματα, δηλαδή να υπολογίσετε την $\pi_n := P(X_k > 0; k = 1, 2, \dots, n)$.

β) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{n \rightarrow \infty} \pi_n$.

Πρόβλημα 3: Να βρείτε ένα τύπο για τον γενικό όρο των ακόλουθων αναδρομικών σχέσεων

α) $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, με αρχικές συνθήκες $F_0 = 1, F_1 = 2$.

β) $a_{n+2} = 2a_{n+1} + 3a_n$, με αρχικές συνθήκες $a_0 = 0, a_1 = 1$.