Εισαγωγικές Διαλέξεις στην Θεωρία των Αλυσίδων Markov και των Στοχαστικών Ανελίξεων

Μιχάλης Ζαζάνης
Τμήμα Στατιστικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

Κεφάλαιο 1

Διακριτές Τυχαίες Μεταβλητές

Το κεφάλαιο αυτό είναι μια σύντομη υπενθύμιση των βασικών εννοιών των διακριτών τυχαίων μεταβλητών μέσα από ένα πρίσμα που τονίζει τα χαρακτηριστικά που θα είναι χρήσιμα για την μελέτη στοχαστικών ανελίξεων.

1.1 Μέση τιμή μιας διακριτής κατανομής

Έστω N τυχαία μεταβλητή (τ.μ.) με τιμές στους φυσικούς $\mathbb{N}_0 := \{0, 1, 2, \ldots\}$ και

$$p_n := P(N = n)$$

η κατανομή της. Υπενθυμίζουμε ότι η μέση τιμή της ορίζεται ως

$$EN = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot p_1 + 2 \cdot p_2 + \cdots .$$

Η ροπή τάξεως r της N (όπου r φυσικός) ορίζεται ως

$$EN^r = \sum_{n=0}^{\infty} n^r p_n.$$

Η διασπορά της N ορίζεται ως $\mathsf{Var}(N) = E[N^2] - (EN)^2$.

Πρόταση 1.1. *Η μέση τιμή μιας διακριτής τ.μ. μπορεί να εκφρασθεί με τους εξής τρόπους*

$$EN \;:=\; \sum_{n=0}^{\infty} n p_n \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} P(N > n) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n).$$

Απόδειξη: Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι τα δύο τελευταία αθροίσματα έχουν την ίδια τιμή αφού η N παίρνει τιμές στους φυσικούς. Επομένως αρκεί να αποδείξουμε ότι το τρίτο άθροισμα είναι ίσο με το πρώτο. Πράγματι $P(N \geq n) = p_n + p_{n+1} + p_{n+2} + \cdots$ και

$$\begin{array}{rcccccccccccccc}
\sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n) & = & p_1 & + & p_2 & + & p_3 & + & p_4 & + & \cdots & + & p_n & + & \cdots \\
 & & & + & p_2 & + & p_3 & + & p_4 & + & \cdots & + & p_n & + & \cdots \\
 & & & & & + & p_3 & + & p_4 & + & \cdots & + & p_n & + & \cdots \\
 & & & & & & & + & p_4 & + & \cdots & + & p_n & + & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & \vdots & & \vdots & \\
 & & & & & & & & & & & & p_n & + & \cdots \\
 & & & & & & & & & & & & & \vdots & \\
\hline
 & = & p_1 & + & 2p_2 & + & 3p_3 & + & 4p_4 & + & \cdots & + & np_n & + & \cdots
\end{array}$$

Αυτό το επιχείρημα συμπληρώνει την απόδειξη. ∎

Ο παραπάνω υπολογισμός καθίσταται απλούστερος με τη χρήση δεικτριών.

Ορισμός 1.1. Η δείκτρια ενός ενδεχομένου A ορίζεται ως

$$\mathbf{1}(A) := \begin{cases} 1 & \text{αν η } A \text{ είναι αληθής,} \\ 0 & \text{αν η } A \text{ είναι ψευδής.} \end{cases}$$

Για παράδειγμα η δείκτρια $\mathbf{1}(N \leq 4)$ είναι μία τυχαία μεταβλητή που παίρνει την τιμή 1 αν η τ.μ. N είναι μικρότερη ή ίση του 4 και την τιμή 0 διαφορετικά.

Παρατήρηση 1.1. Η μέση τιμή μιας δείκτριας είναι προφανώς η πιθανότητα του αντίστοιχου ενδεχομένου: Πράγματι

$$E\mathbf{1}(A) = 1 \times P(A) \ + \ 0 \times P(A^C) = P(A).$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν δείκτριες, παρατηρούμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty} E[\mathbf{1}(N \geq n)].$$

Βασιζόμενοι στο θεώρημα 1.1 μπορούμε να γράψουμε το δεξιό μέλος της παραπάνω εξίσωσης ως

$$E\left[\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(N \geq n)\right].$$

Αλλά το άπειρο άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(N \geq n)$ ισούται με N. (Μπορείτε να το διαπιστώσετε παίρνοντας π.χ. $N = 3$ (ή οποιοδήποτε άλλο ακέραιο) και βλέποντας ότι όλες οι δείκτριες εκτός από τις τρεις πρώτες μηδενίζονται.) Συνεπώς $\sum_{n=1}^{\infty} P(N \geq n) = EN$.

Με παρόμοιο τρόπο υπολογίζουμε για παράδειγμα και το άθροισμα $\sum_{n=1}^{\infty} nP(N \geq n)$ το οποίο γράφουμε ως

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} nE[\mathbf{1}(N \geq n)] &= E\left[\sum_{n=1}^{\infty} n\mathbf{1}(N \geq n)\right] = E\left[\sum_{n=1}^{N} n\right] = E\left[\frac{N(N+1)}{2}\right] \\
&= \frac{E[N^2] + EN}{2}
\end{aligned}$$

(όπου χρησιμοποιήσαμε τον γνωστό τύπο για την αριθμητική πρόοδο).

Ορισμός 1.2. Η κατιούσα παραγοντική ροπή τάξης k μιας ακέραιας τ.μ. N ορίζεται ως $E[N(N-1)\cdots(N-k+1)]$. Παρομοίως, η ανιούσα παραγοντική ροπή τάξης k της N ορίζεται ως $E[N(N+1)\cdots(N+k-1)]$.

Για παράδειγμα η κατιούσα παραγοντική ροπή τάξης k μιας τ.μ. Poisson είναι

$$\begin{aligned} EN(N-1)\cdots(N-k+1) &= \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\frac{\alpha^n}{n!}e^{-\alpha} \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n-k)!}e^{-\alpha} \\ &= e^{-\alpha}\alpha^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} \\ &= \alpha^k. \end{aligned}$$

Επομένως από την παραπάνω σχέση, για $k = 1, 2, 3, 4$ έχουμε

$$\begin{aligned} EN &= \alpha \\ E[N(N-1)] = E[N^2] - EN &= \alpha^2 \\ E[N(N-1)(N-2)] = E[N^3] - 3E[N^2] + 2EN &= \alpha^3 \\ E[N(N-1)(N-2)(N-3)] = E[N^4] - 6E[N^3] + 11E[N^2] - 6EN &= \alpha^4, \end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτουν εύκολα οι ροπές της Poisson

$$\begin{aligned} E[N^2] &= \alpha^2 + \alpha \\ E[N^3] &= \alpha^3 + 3\alpha^2 + \alpha \\ E[N^4] &= \alpha^4 + 6\alpha^3 + 7\alpha^2 + \alpha. \end{aligned}$$

1.2 Από κοινού κατανομή

Η στατιστική συμπεριφορά δύο τ.μ. X_1, X_2, με τιμές στους φυσικούς προσδιορίζεται από την *από κοινού κατανομή τους*,

$$p_{n_1 n_2} := P(X_1 = n_1, X_2 = n_2).$$

Αν η από κοινού κατανομή των δύο τ.μ. είναι γνωστή, τότε η *περιθώριος κατανομή* της κάθε μιας απ΄ αυτές υπολογίζεται εύκολα από το θεώρημα ολικής πιθανότητας ως εξής

$$P(X_1 = n_1) = \sum_{n_2=0}^{\infty} P(X_1 = n_1, X_2 = n_2) = \sum_{n_2=0}^{\infty} p_{n_1 n_2}.$$

Έστω f μία συνάρτηση δύο μεταβλητών, $f : \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \longrightarrow \mathbb{R}$, από τους φυσικούς αριθμούς στους πραγματικούς. Τότε η $f(X_1, X_2)$ είναι μια τ.μ. με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς και μέση τιμή

$$E[f(X_1, X_2)] = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} f(n_1, n_2) p_{n_1 n_2}. \tag{1.1}$$

Θεώρημα 1.1. *Η μέση τιμή του αθροίσματος δύο οιωνδήποτε τ.μ. ισούται πάντα με το άθροισμα των μέσων τους τιμών, δηλαδή $E[X_1 + X_2] = EX_1 + EX_2$. Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται σε αθροίσματα n τυχαίων μεταβλητών επαγωγικά και επομένως*

$$E[X_1 + X_2 + \cdots + X_n] = EX_1 + EX_2 + \cdots + EX_n. \tag{1.2}$$

Απόδειξη: Αρκεί να αποδείξουμε το αποτέλεσμα για δύο τ.μ. Έστω λοιπόν $p_{n_1 n_2}$ η από κοινού κατανομή των X_1, X_2. Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.1), όπου $f(n_1, n_2) = n_1 + n_2$,

$$\begin{aligned}
E[X_1 + X_2] &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_1 + n_2) p_{n_1 n_2} = \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_1 \, p_{n_1 n_2} + \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 \, p_{n_1 n_2} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} n_1 \sum_{n_2=0}^{\infty} p_{n_1 n_2} + \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 \sum_{n_1=0}^{\infty} p_{n_1 n_2} \\
&= \sum_{n_1=0}^{\infty} n_1 P(X_1 = n_1) + \sum_{n_2=0}^{\infty} n_2 P(X_2 = n_2) \\
&= EX_1 + EX_2.
\end{aligned}$$

Ορισμός 1.3. Δύο τ.μ. X_1, X_2, ονομάζονται *ανεξάρτητες* αν η από κοινού κατανομή τους έχει την μορφή $P(X_1 = n_1, X_2 = n_2) = P(X_1 = n_1) P(X_2 = n_2)$ (δηλαδή αν τα γεγονότα $\{X_1 = n_1\}$, $\{X_2 = n_2\}$ είναι ανεξάρτητα) για κάθε n_1, n_2.

Θεώρημα 1.2. *Έστω f_i, $i = 1, 2$, δύο συναρτήσεις από τους φυσικούς στους πραγματικούς και X_1, X_2, δύο ανεξάρτητες τ.μ. Τότε*

$$E[f_1(X_1) f_2(X_2)] = E[f_1(X_1)] \, E[f_2(X_2)]. \tag{1.3}$$

Το αποτέλεσμα αυτό επεκτείνεται επαγωγικά για οποιοδήποτε αριθμό τ.μ.

Απόδειξη: Χρησιμοποιώντας τον τύπο (1.1) έχουμε

$$\begin{aligned}
E[f_1(X_1) f_2(X_2)] &= \sum_{n_1=0}^{\infty} \sum_{n_2=0}^{\infty} f_1(n_1) f_2(n_2) P(X_1 = n_1) P(X_2 = n_2) \\
&= \left. \sum_{n_1=0}^{\infty} f_1(n_1) P(X_1 = n_1) \right) \left. \sum_{n_2=0}^{\infty} f_2(n_2) P(X_2 = n_2) \right) \\
&= E[f_1(X_1)] \, E[f_2(X_2)].
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

Η *συνδιακύμανση* δύο τυχαίων μεταβλητών, X_1, X_2, ορίζεται ως

$$\mathsf{Cov}(X_1, X_2) = E\left[(X_1 - EX_1)(X_2 - EX_2)\right] = E[X_1X_2] - (EX_1)(EX_2).$$

Δυο τ.μ. των οποίων η συνδιακύμανση είναι 0 ονομάζονται *ασυσχέτιστες*. Από την (1.3) προκύπτει ότι όταν δύο τ.μ. είναι ανεξάρτητες τότε είναι και ασυσχέτιστες αφού σ' αυτή την περίπτωση $E[X_1X_2] = (EX_1)(EX_2)$. (Το αντίθετο όμως δεν ισχύει, δηλαδή δύο ασυσχέτιστες τ.μ. δεν είναι υποχρεωτικά ανεξάρτητες.)

Θεώρημα 1.3. *Για δύο οποιεσδήποτε τ.μ. X_1, X_2,*

$$\mathsf{Var}(X_1 + X_2) = \mathsf{Var}(X_1) + \mathsf{Var}(X_2) + 2\mathsf{Cov}(X_1, X_2).$$

Όταν οι X_1, X_2 είναι ασυσχέτιστες, $\mathsf{Var}(X_1 + X_2) = \mathsf{Var}(X_1) + \mathsf{Var}(X_2)$. Γενικά, για οποιεσδήποτε n τ.μ. έχουμε

$$\mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(X_i) + \sum_{i\neq j} \mathsf{Cov}(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(X_i) + 2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i} \mathsf{Cov}(X_i, X_j). \quad (1.4)$$

(Το διπλό άθροισμα $\sum_{i\neq j}$ περιέχει συνολικά $n(n-1)$ όρους. Χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός ότι $\mathsf{Cov}(X_i, X_j) = \mathsf{Cov}(X_j, X_i)$.) Η απόδειξη του θεωρήματος αυτού αφήνεται ως άσκηση.

1.3 Κατανομή του αθροίσματος ανεξαρτήτων τ.μ.

Έστω N, M, ανεξάρτητες τ.μ. με δεδομένες κατανομές $P(N = n)$, $P(M = m)$, $n, m = 0, 1, 2, \ldots$. Έστω $K = N + M$, το άθροισμα των δύο τ.μ. Η κατανομή της K υπολογίζεται ως εξής

$$\begin{aligned} P(K = k) &= P(N + M = k) = \sum_{n=0}^{k} P(N = n, M = k - n) \\ &= \sum_{n=0}^{k} P(N = n)P(M = k - n). \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση οφείλεται στην ανεξαρτησία των M και N το δε άθροισμα ονομάζεται *συνέλιξη* των δύο κατανομών.

Παράδειγμα 1.1. Έστω N διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους n και p δηλαδή $P(N = i) = \binom{n}{i}p^iq^{n-i}$, για $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, όπου $q = 1 - p$. Η τ.μ. M είναι επίσης διωνυμική με παραμέτρους m και p και ανεξάρτητη από την N. Η κατανομή της $K := N + M$ δίνεται τότε από την συνέλιξη των δύο διωνυμικών κατανομών δηλαδή

$$\begin{aligned}
P(K=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(N=i)P(M=k-i) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i q^{n-i} \binom{m}{k-i} p^{k-i} q^{m-k+i} \\
&= p^k q^{m+n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} \\
&= \binom{m+n}{k} p^k q^{m+n-k}.
\end{aligned}$$

Στην τελευταία εξίσωση της παραπάνω σχέσης χρησιμοποιήσαμε την συνδυαστική ταυτότητα

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \binom{m}{k-i} = \binom{m+n}{k}. \tag{1.5}$$

που μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής. Το δεξιό μέλος της (1.5) θα μπορούσε να είναι ο αριθμός των επιτροπών k ατόμων που μπορούν να επιλεγούν από $n+m$ άτομα, n από τα οποία είναι άνδρες και m γυναίκες. Στο αριστερό μέλος $\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}$ είναι ο συνολικός αριθμός των επιτροπών που αποτελούνται από i άνδρες και $k-i$ γυναίκες. (Υπενθυμίζουμε ότι το σύμβολο $\binom{n}{m}$, όπου m, n, φυσικοί αριθμοί ορίζεται ως $\frac{n!}{m!(n-m)!}$ αν $0 \le m \le n$ και 0 αν $m < 0$ ή $m > n$.)

Παράδειγμα 1.2. Έστω N, M ανεξάρτητες γεωμετρικές τ.μ. με παράμετρο p. Η κατανομή της $K := N + M$ δίνεται από την συνέλιξη

$$\begin{aligned}
P(K=k) &= \sum_{i=0}^{k} P(N=i)P(M=k-i) = \sum_{i=1}^{k-1} pq^i pq^{k-i} \\
&= (k-1)q^k p^2.
\end{aligned}$$

(Η κατανομή αυτή όπως θα δούμε αργότερα είναι μια ειδική περίπτωση της αρνητικής διωνυμικής κατανομής ή κατανομής Pascal.)

Παράδειγμα 1.3. Έστω N τ.μ. Poisson με παράμετρο α_1, δηλαδή $P(N=k) = \frac{\alpha_1^k}{k!}e^{-\alpha_1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Η τ.μ. M είναι επίσης Poisson με παράμετρο α_2 και ανεξάρτητη της N. Η κατανομή της $K := N + M$ δίνεται τότε από την συνέλιξη των δύο κατανομών Poisson δηλαδή

$$\begin{aligned}
P(K=k) &= \sum_{n=0}^{k} P(N=n)P(M=k-n) = \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha_1^n}{n!} e^{-\alpha_1} \frac{\alpha_2^{k-n}}{(k-n)!} e^{-\alpha_2} \\
&= e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \sum_{n=0}^{k} \frac{\alpha_1^n}{n!} \frac{\alpha_2^{k-n}}{(k-n)!} = \frac{1}{k!} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)} \sum_{n=0}^{k} \binom{k}{n} \alpha_1^n \alpha_2^{k-n} \\
&= \frac{(\alpha_1+\alpha_2)^k}{k!} e^{-(\alpha_1+\alpha_2)}.
\end{aligned}$$

Επομένως το άθροισμα δύο ανεξαρτήτων τ.μ. Poisson είναι πάλι Poisson με παράμετρο το άθροισμα των παραμέτρων.

1.4 Η Γεωμετρική Κατανομή και Συγγενείς Κατανομές

Έστω X ο *αριθμός των ανεξαρτήτων επαναλήψεων* που απαιτείται για να επιτευχθεί μια επιτυχία όταν η πιθανότητα επιτυχίας είναι p (και η πιθανότητα αποτυχίας $q = 1 - p$). Η X έχει *γεωμετρική κατανομή* η οποία δίνεται από τη σχέση

$$P(X = k) = (1 - p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2, \ldots. \tag{1.6}$$

Όταν αναφερόμαστε στην γεωμετρική κατανομή χωρίς επιπλέον διευκρίνιση εννοούμε την κατανομή (1.6).

Μερικές φορές μπορεί να μας ενδιαφέρει ο αριθμός των *αποτυχιών* μέχρι την πρώτη επιτυχία ο οποίος είναι φυσικά μικρότερος κατά 1 από τον συνολικό αριθμό δοκιμών. Αν Y είναι *ο αριθμός των αποτυχιών μέχρι την πρώτη επιτυχία* τότε η κατανομή του Y δίνεται από την σχέση

$$P(Y = k) = (1 - p)^k p, \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Η κατανομή του Y ονομάζεται συχνά επίσης γεωμετρική αλλά συνήθως αυτή τη ασάφεια δεν δημιουργεί προβλήματα εφ' όσον δίνονται οι απαραίτητες διευκρινήσεις. Παρατηρείστε ότι σ' αυτή την περίπτωση το μηδέν έχει θετική πιθανότητα.

Τέλος, μερικές φορές χρήσιμη είναι και η λεγόμενη γενικευμένη γεωμετρική κατανομή η οποία έχει μια αυθαίρετη μάζα πιθανότητας στο 0 και ορίζεται ως εξής: Η τ.μ. Z έχει γενικευμέμη γεωμετρική κατανομή αν

$$P(Z = k) = \begin{cases} r & \text{όταν } k = 0 \\ (1 - r) q^{k-1} p & \text{όταν } k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases} \tag{1.7}$$

όπου $0 \leq r \leq 1$, $0 < p \leq 1$, και $q = 1 - p$. Παρατηρείστε ότι η κατανομή αυτή, σε αντίθεση με την γεωμετρική, έχει δύο ανεξάρτητες παραμέτρους, την r που προσδιορίζει την μάζα στο 0 και την πιθανότητα p. Οι δύο προηγούμενες κανομές προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις για $r = 0$ και $r = p$ αντίστοιχα.

Μια διαφορετική (και πιο ενδιαφέρουσα) γενίκευση της γεωμετρικής κατανομής προκύπτει αν εξετάσουμε τον αριθμό των επαναλήψεων N που απαιτείται σε ένα ανεξάρτητα επαναλαμβανόμενο πείραμα που έχει πιθανότητα επιτυχίας p και αποτυχίας $q = 1 - p$ έως ότου καταγράψουμε r επιτυχίες. Η κατανομή της τ.μ. N δίνεται από τον τύπο

$$P(N = n) = \binom{n-1}{r-1} q^{n-r} p^r. \tag{1.8}$$

Η κατανομή αυτή ονομάζεται *αρνητική διωνυμική ή Pascal*. Η παραπάνω έκφραση για την κατανομή Pascal μπορεί να εξαχθεί από το εξής συνδυαστικό επιχείρημα: Προκειμένου να χρειασθούν n δοκιμές για r επιτυχίες θα πρέπει οι πρώτες $n - 1$ δοκιμές να περιέχουν $r - 1$ επιτυχίες (ανεξαρτήτως σειράς) και η δοκιμή n να είναι υποχρεωτικά επιτυχία. Η πιθανότητα για το πρώτο ενδεχόμενο δίνεται από τον τύπο της διωνυμικής ως $\binom{n-1}{r-1} q^{(n-1)-(r-1)} p^{r-1}$ ενώ η πιθανότητα του δευτέρου ενδεχομένου (που είναι ανεξάρτητο από το πρώτο) είναι p. Πολλαπλασιάζοντας αυτές τις δύο πιθανότητες προκύπτει η (1.8).

1.5 Η δεσμευμένη μέση τιμή ως τυχαία μεταβλητή

Έστω X, Y δύο ακέραιες τ.μ. με από κοινού κατανομή $P(X = m, Y = n)$, $n, m \in \mathbb{N}$. Η δεσμευμένη κατανομή της X, δεδομένου ότι $Y = n$, δίνεται βεβαίως από την έκφραση $P(X = m|Y = n) = \frac{P(X=m,Y=n)}{P(Y=n)}$. Η δεσμευμένη μέση τιμή της X *δεδομένου ότι* $Y = n$ δίνεται τότε από την έκφραση

$$E[X|Y = n] = \sum_{m=0}^{\infty} mP(X = m|Y = n).$$

Παρατήρηση: Για δεδομένο n η παραπάνω μέση τιμή είναι βέβαια ένας πραγματικός αριθμός, αν επιτρέψουμε όμως στο n να μεταβάλλεται ($n \in \mathbb{N}$) τότε η $E[X|Y = n]$ γίνεται μία *συνάρτηση του* n, μπορούμε δηλαδή να γράψουμε $E[X|Y = n] = g(n)$ για κάποια συνάρτηση g που ορίζεται από την σχέση

$$g(n) = \sum_{m=0}^{\infty} mP(X = m|Y = n) \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{1.9}$$

Όπως βλέπουμε η g εξαρτάται βέβαια από την από κοινού κατανομή των X, Y. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι η από κοινού κατανομή των X, Y δίνεται από τη σχέση

$$P(X = m, Y = n) = \begin{cases} \frac{\alpha^m}{m!}e^{-\alpha}\frac{\beta^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\beta} & \text{για } n \geq m \geq 0, \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}. \tag{1.10}$$

Οι περιθώριες κατανομές των X και Y δίδονται από τις $P(X = m) = \frac{\alpha^m}{m!}e^{-\alpha}$, $P(Y = n) = \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}e^{-(\alpha+\beta)}$ (παρατηρείστε ότι και οι δύο κατανομές είναι Poisson). Η δεσμευμένη κατανομή

$$\begin{aligned} P(X = m|Y = n) &= \frac{P(X = m, Y = n)}{P(Y = n)} = \frac{\frac{\alpha^m}{m!}e^{-\alpha}\frac{\beta^{n-m}}{(n-m)!}e^{-\beta}}{\frac{(\alpha+\beta)^n}{n!}e^{-(\alpha+\beta)}} \\ &= \binom{n}{m}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^m \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-m}, \quad m = 0, 1, 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

όπως παρατηρούμε είναι διωνυμική. Η δεσμευμένη μέση τιμή είναι επομένως

$$E[X|Y = n] = \sum_{m=0}^{n} m\binom{n}{m}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^m \left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{n-m} = n\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}.$$

Κατά συνέπεια, στη συγκεκριμένη περίπτωση, $E[X|Y = n] = g(n)$ με $g(n) = n\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Αφού η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|Y = n]$ είναι μια συνάρτηση του n, $g(n)$, αλλάζοντας ελαφρά οπτική γωνία μπορούμε να μιλήσουμε για την δεσμευμένη μέση τιμή *όχι ως προς το γεγονός* $\{Y = n\}$ *αλλά ως προς την τ.μ.* Y. Την δεσμευμένη μέση τιμή ως προς την τ.μ. Y την συμβολίζουμε με $E[X|Y]$ και βεβαίως είναι ίση με $g(Y)$. Στο προηγούμενο παράδειγμα, $E[X|Y] = Y\,\frac{\alpha}{\alpha+\beta}$. Παρατηρείστε ότι η $E[X|Y]$ είναι τυχαία μεταβλητή.

Γενικότερα, αν $X, Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ είναι τυχαίες μεταβλητές με από κοινού κατανομή $P(X = m, Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \ldots, Y_k = n_k)$ τότε η δεσμευμένη μέση τιμή $E[X|Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \ldots, Y_k = n_k]$ ορίζεται ως

$$
\begin{aligned}
E[X|Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \ldots, Y_k = n_k] &= \sum_{m=0}^{\infty} mP(X = m|Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \ldots, Y_k = n_k) \\
&= g(n_1, n_2, \ldots, n_k),
\end{aligned}
$$

όπου, σ' αυτή την περίπτωση η g είναι η συνάρτηση k μεταβλητών που ορίζεται από την παραπάνω σχέση. Όμοια, $E[X|Y_1, Y_2, \ldots, Y_k] = g(Y_1, Y_2, \ldots, Y_k)$.

Θεώρημα 1.4. *Για την δεσμευμένη μέση τιμή ισχύει ότι*

$$
E[E[X|Y]] = E[X]. \tag{1.11}
$$

Η εξίσωση αυτή έχει την εξής έννοια. Η $E[X|Y]$ είναι, όπως είδαμε, μια τυχαία μεταβλητή. Παίρνοντας τη μέση τιμή αυτής της τ.μ. θα ανακτήσουμε την μέση τιμή της X.

Απόδειξη: Έχουμε $E[X|Y] = g(Y)$ (όπου η g δίνεται από την (1.9) και επομένως

$$
\begin{aligned}
E[E[X|Y]] &= \sum_{n=0}^{\infty} g(n)P(Y = n) = \sum_{n=0}^{\infty} \quad \sum_{m=0}^{\infty} mP(X = m|Y = n)\Bigg) P(Y = n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} mP(X = m, Y = n) = \sum_{m=0}^{\infty} mP(X = m) = E[X].
\end{aligned}
$$

∎

Σαν μια εφαρμογή της έννοιας της δεσμευμένης μέσης τιμής θα εξετάσουμε το εξής πρόβλημα. Έστω N μια ακέραια τ.μ. και $X_1, X_2, X_3, \ldots$ μια άπειρη ακολουθία από τ.μ. ανεξάρτητες μεταξύ τους και με την ίδια κατανομή. Θα κάνουμε επίσης την υπόθεση ότι η N είναι ανεξάρτητη από τις $\{X_n; n = 1, 2, \ldots\}$. Ορίζουμε την τ.μ. $Y := \sum_{n=1}^{N} X_n$. Για να υπολογίσουμε την μέση τιμή της Y δεσμεύουμε πρώτα ως προς N:

$$
E[\sum_{n=1}^{N} X_n|N] = \sum_{n=1}^{N} E[X_n|N].
$$

Λόγω της ανεξαρτησίας της N από τις $\{X_n\}$, $E[X_n|N] = EX_n$. Αλλά επειδή οι $\{X_n\}$ είναι ισόνομες, $EX_n = EX_1$ και συνεπώς

$$
E[\sum_{n=1}^{N} X_n|N] = NEX_1.
$$

Επομένως

$$
E[\sum_{n=1}^{N} X_n] = E[E[\sum_{n=1}^{N} X_n|N]] = E[NEX_1] = ENEX_1.
$$

1.6 Πιθανογεννήτριες συναρτήσεις: Παραδείγματα και εφαρμογές

Ορισμός 1.4. *Θεωρούμε την τ.μ. N με τιμές στους φυσικούς αριθμούς, δηλαδή στο σύνολο $\{0,1,2,3,\ldots\}$. Έστω $p_k = P(N=k)$ η πιθανότητα η τ.μ. να ισούται με $k = 0,1,2,\ldots$. Έστω επίσης z μια πραγματική μεταβλητή που παίρνει τιμές στο διάστημα $[-1,1]$. Η έκφραση z^N είναι τότε μια τυχαία συνάρτηση (εφ' όσον το N είναι τυχαία μεταβλητή) και η μέση της τιμή μια απλή συνάρτηση του z. Η συνάρτηση αυτή, $\phi(z) := Ez^N$, ονομάζεται πιθανογεννήτρια του N.*

Στα ακόλουθα παραδείγματα υπολογίζουμε τις πιθανογεννήτριες απλών διακριτών τ.μ.

Παράδειγμα 1.4. Έστω N τ.μ. Bernoulli που παίρνει την τιμή 1 μ.π. (με πιθανότητα) p και 0 μ.π. $q = 1-p$. Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση δίνεται από την σχέση

$$Ez^N = q + zp.$$

Παράδειγμα 1.5. Έστω N το αποτέλεσμα της ρίψης ενός τιμίου ζαριού, δηλαδή $N = k$ μ.π. $1/6$, $k = 1,2,\ldots,6$. Σ' αυτή την περίπτωση,

$$Ez^N = \frac{1}{6}\left(z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6\right).$$

Παράδειγμα 1.6. Έστω N διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους n και p δηλαδή $P(N=k) = \binom{n}{k}p^k q^{n-k}$, για $k = 0,1,2,\ldots,n$, όπου $q = 1-p$. Τότε

$$Ez^N = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} z^k = (q+zp)^n.$$

Παράδειγμα 1.7. Έστω N γεωμετρική τ.μ. με παράμετρο p δηλαδή $P(N=k) = q^{k-1}p$, $k = 1,2,\ldots,$. Τότε

$$Ez^N = \sum_{k=1}^{\infty} q^{k-1} p z^k = \frac{pz}{1-qz}.$$

Παράδειγμα 1.8. Έστω Q τ.μ. με την γενικευμένη γεωμετρική κατανομή της (1.7). Η πιθανογεννήτρια αυτής της κατανομής δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} E[z^X] &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)z^k = r + (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1}z^k = r + (1-r)pz\frac{1}{1-qz} \\ &= \frac{r+(p-r)z}{1-qz}. \end{aligned} \tag{1.12}$$

Παράδειγμα 1.9. Έστω N τ.μ. Poisson με παράμετρο α, δηλαδή $P(N=k) = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$, $k = 0,1,2,\ldots,$. Η πιθανογεννήτρια συνάρτηση σ' αυτή την περίπτωση δίνεται από τη σχέση

$$Ez^N = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}z^k = e^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha z)^k}{k!} = e^{-\alpha(1-z)}.$$

Πρόταση 1.2. Συμβολίζοντας με $\phi^{(k)}(0)$ την παράγωγο τάξης k της πιθανογεννήτριας υπολογισμένη στο 0, ισχύει ότι

$$p_k = \frac{\phi^{(k)}(0)}{k!}. \tag{1.13}$$

Απόδειξη: Παραγωγίζοντας k φορές τους όρους της δυναμοσειράς $\sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ έχουμε

$$\phi^{(k)}(z) = \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)(i-2)\cdots(i-k+1)p_i z^{i-k}. \tag{1.14}$$

(Παρατηρείστε ότι οι όροι που αντιστοιχούν σε $i = 0, 1, 2, \ldots k-1$ στη σειρά (1.14) μηδενίζονται.) Θέτοντας $z = 0$ στην (1.14) βλέπουμε ότι μηδενίζονται επίσης και οι όροι που αντιστοιχούν σε $i = k+1, k+2, k+3, \ldots$ και συνεπώς ο μόνος μη μηδενικός όρος είναι ο αντιστοιχών σε $i = k$. Έτσι προκύπτει η (1.13). ∎

Πρόταση 1.3. *Η παράγωγος τάξης k της πιθανογεννήτριας υπολογισμένη στο 1, $\phi^{(k)}(1)$ δίνει την κατιούσα παραγοντική ροπή τάξης k:*

$$E[N(N-1)(N-2)\cdots(N-k+1)] = \phi^{(k)}(1). \tag{1.15}$$

Απόδειξη: Θέτοντας στην σειρά (1.14) $z = 1$

$$\phi^{(k)}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)p_n \tag{1.16}$$

η οποία ισοδυναμεί με την (1.15). ∎

Παράδειγμα 1.10. Οι παράγωγοι της πιθανογεννήτριας υπολογισμένες στο 1 συχνά χρησιμοποιούνται για τον υπολογισμό των ροπών. Για παράδειγμα, αν X είναι γεωμετρικά κατανεμημένη τ.μ. τότε

$$EX = \frac{d}{dz}\frac{pz}{1-qz}\bigg|_{z=1} = \left(\frac{p}{1-qz} + \frac{pqz}{(1-qz)^2}\right)\bigg|_{z=1} = 1 + \frac{q}{p} = \frac{1}{p},$$

$$E[X(X-1)] = \frac{d^2}{dz^2}\frac{pz}{1-qz}\bigg|_{z=1} = \left(\frac{2pq}{(1-qz)^2} + \frac{2pq^2 z}{(1-qz)^3}\right)\bigg|_{z=1} = 2\frac{q}{p} + \frac{2q^2}{p^2} = 2\frac{q}{p^2},$$

και συνεπώς

$$EX^2 = E[X(X-1)] - EX = \frac{1+q}{p^2}, \qquad \mathsf{Var}(X) = \frac{q}{p^2}.$$

Οι πιθανογεννήτριες αποτελούν χρήσιμο εργαλείο για την μελέτη αθροισμάτων ανεξαρτήτων τ.μ. όπως φαίνεται από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.5. *Αν M, N είναι ανεξάρτητες ακέραιες τ.μ. με πιθανογεννήτριες $\phi_M(z)$, $\phi_N(z)$ αντίστοιχα τότε η πιθανογεννήτρια της $K = M+N$ είναι το γινόμενο των δύο πιθανογεννητριών δηλαδή*

$$\phi_K(z) = Ez^K = \phi_M(z)\phi_N(z).$$

Απόδειξη:

$$\begin{aligned}
Ez^K &= \sum_{k=0}^{\infty} P(K=k)z^k = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{k} P(N=n)P(M=k-n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} z^n P(N=n) z^{k-n} P(M=k-n) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_M(z) z^n P(N=n) \\
&= \phi_M(z)\phi_N(z).
\end{aligned}$$

∎

Παρατήρηση 1.2. Μια απλούστερη απόδειξη βασίζεται στο θεώρημα 1.2: $Ez^{M+N} = E[z^M z^N] = E[z^M]E[z^N] = \phi_M(z)\phi_N(z)$.

Το παραπάνω θεώρημα γενικεύεται άμεσα στην περίπτωση οσωνδήποτε ανεξάρτητων τ.μ.: Αν X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. με πιθανογενήτριες συναρτήσεις $\phi_i(z) := Ez^{X_i}$ και $S := X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ το άθροισμά τους, τότε $Ez^S = \prod_{i=1}^n \phi_i(z)$.

Έχοντας προσδιορίσει την πιθανογεννήτρια του αθροίσματος, ο τύπος (1.13) δεν είναι πάντα ο ευκολότερος τρόπος για τον υπολογισμό της κατανομής. Για παράδειγμα, όταν η πιθανογεννήτρια είναι ρητή συνάρτηση (δηλαδή πηλίκο πολυωνύμων) η ανάλυση σε απλά κλάσματα και το ανάπτυγμα σε σειρά των κλασμάτων αυτών αποτελεί συχνά μια χρήσιμη μέθοδο για τον υπολογισμό της κατανομής. Ένα παράδειγμα της τεχνικής αυτής που είναι ιδιαίτερα χρήσιμη στην πράξη ακολουθεί.

1.6.1 Άθροισμα ανεξάρτητων γεωμετρικών τ.μ.

Έστω X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ανεξάρτητες γεωμετρικές τ.μ. με πιθανότητα επιτυχίας p_i. Θα υπολογίσουμε την κατανομή του αθροίσματος $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ στην περίπτωση που οι πιθανότητες επιτυχίας είναι όλες διαφορετικές μεταξύ τους. Θέτωντας $q_i = 1 - p_i$, η πιθανογεννήτρια του αθροίσματος δίνεται από την

$$Ez^S = \prod_{i=1}^{n} \frac{zp_i}{1-q_i z}.$$

Εφόσον $q_i \neq q_j$ για $i \neq j$, η ανάλυση του γινομένου σε μερικά κλάσματα γίνεται ως εξής: Θέτουμε

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{zp_i}{1-q_i z} = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{zp_i}{1-q_i z}$$

με σκοπό να προσδιορίσουμε τα A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της παραπάνω εξίσωσης με $\prod_{i=1}^n (1 - q_i z)$ έχουμε

$$\prod_{j=1}^{n} zp_j = \sum_{i=1}^{n} A_i z p_i \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} (1 - q_j z).$$

Ας θέσουμε τώρα, όπου $z = q_l^{-1}$ όπου το l είναι ένας ακέραιος από 1 έως n. Παρατηρούμε ότι το γινόμενο $\prod_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{n}(1-q_j/q_l)$ μηδενίζεται εκτός αν $i=l$ (επειδή αν $l \neq i$ τότε θα περιέχει ένα μηδενικό όρο). Επομένως έχουμε

$$\prod_{j=1}^{n} p_j/q_l = A_l p_l/q_l \prod_{\substack{j=1\\j\neq l}}^{n}(1-q_j/q_l)$$

ή

$$A_l = \prod_{\substack{j=1\\j\neq l}} \frac{p_j}{q_l - q_j}, \qquad l = 1,2,\ldots,n. \tag{1.17}$$

Έτσι έχουμε

$$Ez^S = \prod_{i=1}^{n} \frac{zp_i}{1-q_i z} = \sum_{i=1}^{n} A_i \frac{p_i z}{1-zq_i}. \tag{1.18}$$

Η τελευταία αυτή σχέση συνεπάγεται ότι η πιθανογεννήτρια του αθροίσματος των ανεξάρτητων γεωμετρικών τ.μ. (με διαφορετικές πιθανότητες επιτυχίας) μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός των πιθανογεννητριών των όρων του αθροίσματων.

Η κατανομή του αθροίσματος υπολογίζεται εύκολα από την πιθανογεννήτρια ως εξής: Αφού

$$\frac{p_i z}{1-zq_i} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_i q_i^{k-1},$$

αντικαθιστώντας στην (1.18) έχουμε

$$Ez^S = \sum_{i=1}^{n} A_i \sum_{k=1}^{\infty} z^k p_i q_i^{n-1} = \sum_{k=1}^{\infty} z^k \sum_{i=1}^{n} A_i p_i q_i^{k-1}.$$

Από αυτή την έκφραση για την πιθανογεννήτρια προκύπτει ότι

$$P(X_1 + \cdots + X_n = k) = \sum_{i=1}^{n} A_i q_i^{k-1} p_i, \qquad k = 1,2,\ldots.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\sum_{i=1}^{n} A_i q_i^{k-1} p_i \;=\; 0, \qquad k = 1,2,\ldots,n.$$

Για παράδειγμα, αν $n=3$ και $p_1 = 1/4$, $p_2 = 2/4$, $p_3 = 3/4$, τότε

$$\begin{aligned}
A_1 &= \frac{p_2/q_1}{1-q_2/q_1}\frac{p_3/q_1}{1-q_3/q_1} = \frac{2/3}{1-2/3}\frac{3/3}{1-1/3} = 3\\
A_2 &= \frac{p_1/q_2}{1-q_1/q_2}\frac{p_3/q_2}{1-q_3/q_2} = \frac{1/2}{1-3/2}\frac{3/2}{1-1/2} = -3\\
A_3 &= \frac{p_1/q_3}{1-q_1/q_3}\frac{p_2/q_3}{1-q_2/q_3} = \frac{1/1}{1-3/1}\frac{2/1}{1-2/1} = 1
\end{aligned}$$

και συνεπώς η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του αθροίσματος γράφεται σ' αυτήν την περίπτωση ως

$$3\frac{z}{4-3z}-3\frac{z}{2-2z}+\frac{3z}{4-z}.$$

Αναπτύσσοντας τα κλάσματα σε σειρά, έχουμε Η κατανομή του αθροίσματος είναι

$$P(X_1+X_2+X_3=k)=3\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^k-3\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^k, \quad k=0,1,2,\ldots.$$

Στο παράδειγμα που ακολουθεί εξετάζουμε πάλι ένα άθροισμα από ανεξάρτητες, γεωμετρικά κατανεμημένες τ.μ., αυτή τη φορά όμως όλες έχουν την ίδια πιθανότητα επιτυχίας.

1.6.2 Η κατανομή Pascal ως άθροισμα r ανεξάρτητων γεωμετρικών τ.μ. με την ίδια πιθανότητα επιτυχίας

Ξεκινάμε με την γεωμετρική σειρά

$$\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n.$$

Παραγωγίζοντας k φορές τα δύο μέλη της εξισώσεως έχουμε

$$\frac{k!}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)x^{n-k}$$

όπου, στο παραπάνω άθροισμα, οι όροι που αντιστοιχούν σε $n=0,1,\ldots,k-1$ μηδενίζονται. Διαιρώντας και τα δύο μέλη με $k!$ και γράφοντας $n\cdot(n-1)\cdots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$ για $n\geq k$, έχουμε

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}}=\sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}x^{n-k}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{n}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n.$$

Σημειώνουμε την σχέση

$$\frac{1}{(1-x)^{k+1}} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^n \tag{1.19}$$

η οποία θα μας χρειαστεί στη συνέχεια. Έστω $X_1,X_2,\ldots,X_r$, r ανεξάρτητες γεωμετρικές τ.μ. με πιθανότητα επιτυχίας p και αντίστοιχη πιθανογεννήτρια συνάρτηση $\frac{pz}{1-qz}$. Η τ.μ. $N=X_1+X_2+\cdots+X_r$ έχει προφανώς κατανομή Pascal: Πράγματι, αν X_1 ο αριθμός των δοκιμών που απαιτούνται μέχρι την πρώτη επιτυχία, X_2 ο *επιπλέον αριθμός των δοκιμών* μέχρι την δεύτερη επιτυχία, κ.ο.κ. μέχρι τον X_r, τον αριθμό των επιπλέον δοκιμών που απαιτούνται για να πάμε από την $r-1$ στην r επιτυχία τότε οι τ.μ. αυτές είναι ανεξάρτητες και $N=X_1+X_2+\cdots+X_r$. Έτσι, αν $\phi_N(z)$ είναι η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της N,

$$\begin{aligned}\phi_N(z) &= \prod_{i=1}^{r}Ez^{X_i}=\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^r=(pz)^r\sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}(qz)^n\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{n+r-1}{r-1}p^rq^nz^{n+r}=\sum_{n=r}^{\infty}\binom{n-1}{r-1}q^{n-r}p^rz^n\end{aligned}$$

(Η τρίτη ισότητα στην παραπάνω σχέση οφείλεται στην (1.19).) Ο n-οστός όρος της παραπάνω άπειρης σειράς είναι $\binom{n-1}{r-1}q^{n-r}p^r$ και επομένως συμπεραίνουμε

$$P(N=n) = \binom{n-1}{r-1}q^{n-r}p^r, \qquad n = r, r+1, r+2, \ldots.$$

1.7 Άθροισμα ενός τυχαίου πλήθους από τυχαίες μεταβλητές

Μια γενίκευση του προβλήματος που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο με την βοήθεια πιθανογεννητριών είναι ο προσδιορισμός της κατανομής του αθροίσματος ενός *τυχαίου πλήθους* ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών.

Θεώρημα 1.6. *Όταν οι $\{X_i; i = 1, 2, \ldots\}$ είναι ανεξάρτητες ισόνομες τυχαίες μεταβλητές (α.ι.τ.μ.) με πιθανογεννήτρια $\phi_X(z) := Ez^X$ και η N είναι ανεξάρτητη από αυτές με πιθανογεννήτρια $\phi_N(z) = Ez^N$, τότε η πιθανογεννήτρια της Y, $\phi_Y(z)$, δίνεται από την σύνθεση των δύο πιθανογεννητριών, δηλαδή*

$$\phi_Y(z) = \phi_N(\phi_X(z)).$$

Απόδειξη:

$$Ez^Y = Ez^{\sum_{i=1}^N X_i} = E[E[z^{\sum_{i=1}^N X_i}|N]] = E[\phi_X(z)^N] = \phi_N(\phi_X(z)).$$

∎

Παράδειγμα 1.11. Ας υποθέσουμε ότι η N είναι γεωμετρική με πιθανότητα επιτυχίας p και ανεξάρτητη από τις $\{X_i; i = 1, 2, \ldots\}$ που είναι α.ι.τ.μ. Poisson με μέση τιμή α. Τότε η πιθανογεννήτρια της Y, $\phi_Y(z)$ δίνεται από την σχέση

$$\phi_Y(z) = \frac{pe^{-\alpha(1-z)}}{1 - qe^{-\alpha(1-z)}}.$$

Παράδειγμα 1.12. Αν η N είναι γεωμετρική με πιθανότητα επιτυχίας p_1 και ανεξάρτητη από τις $\{X_i; i = 1, 2, \ldots\}$ που είναι α.ι.τ.μ., επίσης γεωμετρικές, με πιθανότητα επιτυχίας p_2, τότε

$$\phi_Y(z) = \frac{p_1 \frac{p_2 z}{1-q_2 z}}{1 - q_1 \frac{p_2 z}{1-q_2 z}} = \frac{p_1 p_2 z}{1 - q_2 z - q_1 p_2 z} = \frac{p_1 p_2 z}{1 - p_1 p_2 z},$$

όπου στην παραπάνω εξίσωση $q_j = 1 - p_j$, $j = 1, 2$, και χρησιμοποιήσαμε τη σχέση $q_2 - p_2 q_1 = 1 - p_2 - p_2 q_1 = 1 - p_2(1 - q_1) = 1 - p_1 p_2$. Από την τελική μορφή της πιθανογεννήτριας $\phi_Y(z)$ προκύπτει ότι η Y είναι επίσης γεωμετρικά κατανεμημένη με πιθανότητα επιτυχίας $p_1 p_2$.

Παράδειγμα 1.13. Αν η N είναι Poisson με μέση τιμή α και ανεξάρτητη από τις $\{X_i; i = 1, 2, \ldots\}$ που είναι α.ι.τ.μ. Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p, τότε

$$\phi_Y(z) = e^{-\alpha(1-(q+pz))} = e^{-p\alpha(1-z)}$$

δηλαδή, σ' αυτή την περίπτωση το άθροισμα είναι Poisson με μέση τιμή αp.

Παράδειγμα 1.14. Έστω N γεωμετρική τ.μ. με πιθανότητα επιτυχίας p_1 και $\{X_i\}$ τ.μ. Bernoulli με πιθανότητα επιτυχίας p_2. Αν $\phi_N(z)$ είναι η πιθανογεννήτρια της N και $\phi_X(z)$ η πιθανογεννήτρια της X_1 να ευρεθεί η πιθανογεννήτρια της $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$.

Λύση: Έστω $\phi_Y(z) = Ez^Y$. Έχουμε

$$\phi_Y(z) = \frac{p_1(q_2 + p_2 z)}{1 - q_1(q_2 + p_2 z)} = \frac{\frac{p_1 q_2}{1-q_1 q_2} + \frac{p_1 p_2}{1-q_1 q_2} z}{1 - \frac{q_1 p_2}{1-q_1 q_2} z}$$

Συγκρίνοντας την $\phi_Y(z)$ με την (1.12) βλέπουμε ότι είναι γενικευμένη γεωμετρική κατανομή με παραμέτρους

$$p = \frac{p_1}{1 - q_1 q_2} \qquad r = \frac{p_1 q_2}{1 - q_1 q_2}.$$

Έχουμε ακόμη $1 - p = q = \frac{q_1 p_2}{1-q_1 q_2}$ και $1 - r = \frac{1-q_2}{1-q_1 q_2}$ και επομένως

$$P(Y = k) = \begin{cases} \frac{p_1 q_2}{1-q_1 q_2} & \text{όταν } k = 0 \\ \frac{p_1 p_2}{(1-q_1 q_2)^2} \left(\frac{q_1 p_2}{1-q_1 q_2}\right)^{k-1} & \text{όταν } k = 1, 2, 3, \ldots \end{cases}$$

1.8 Τύπος του Stirling

Παρ' ότι ο υπολογισμός του $n! := 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ είναι εύκολος για μικρές τιμές του n, αυτό καθίσταται δύσκολο όταν το n είναι μεγάλο. Ο τύπος του Stirling είναι μια ασυμπτωτική σχέση η οποία δίνει αφ' ενός ένα εύκολο τρόπο για προσεγγιστικό, αλλά εξαιρετικά ακριβή υπολογισμό του $n!$ και αφ' ετέρου μια ιδέα για το πόσο γρήγορα μεγαλώνει το $n!$ σαν συνάρτηση του n.

Ορισμός 1.5. Δύο πραγματικές ακολουθίες $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, είναι *ασυμπτωτικά ισοδύναμες* αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1.$$

Σ' αυτή την περίπτωση θα γράφουμε $a_n \sim b_n$.

Θεώρημα 1.7 (Τύπος του Stirling).

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}.$$

Παρ' ότι η σχέση αυτή ισχύει ασυμπτωτικά, είναι εξαιρετικά ακριβής ακόμη και για μικρές τιμές του n. Για παράδειγμα, όταν $n = 10$, $n! = 3.628.800$ ενώ ο τύπος του Stirling δίνει $\sqrt{2\pi 10}\, 10^{10} e^{-10} = 3.598.695,6$ δηλαδή ένα σχετικό σφάλμα $-0,83\%$.

Σαν εφαρμογή του τύπου του Stirling ας υπολογίσουμε την πιθανότητα σε 100 ρίψεις ενός τιμίου νομίσματος να έχουμε ακριβώς 50 κορώνες. Η πιθανότητα αυτή δίνεται από τον τύπο της διωνυμικής κατανομής ως $\binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}}$ όπου $n = 50$.

$$\begin{aligned} \binom{2n}{n}\frac{1}{2^{2n}} &= \frac{(2n)!}{(n!)^2}\frac{1}{4^n} \sim \frac{\sqrt{2\pi 2n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}{(\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n})^2}\frac{1}{4^n} \\ &= \frac{1}{\sqrt{n\pi}}. \end{aligned} \tag{1.20}$$

Όταν $n = 50$, η πιθανότητα είναι 0.0798. Έτσι, βλέπουμε ότι για 100 ρίψεις η πιθανότητα «ισοπαλίας» είναι σημαντικότατη και εγγίζει σχεδόν το 8%. Για 1000 ρίψεις, από τον ίδιο τύπο προκύπτει ότι η πιθανότητα ισοπαλίας είναι 1.8%.

1.9 Προσεγγίσεις που βασίζονται στην κατανομή Poisson

Θεώρημα 1.8 (Θεώρημα Συνέχειας). *Έστω ότι για κάθε n η ακολουθία $a_{0n}, a_{1n}, a_{2n}, \ldots, a_{kn}, \ldots$, είναι μια κατανομή πιθανότητας, δηλαδή $a_{kn} \geq 0$ και $\sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} = 1$. Το όριο $a_k = \lim_{n\to\infty} a_{kn}$ υπάρχει αν και μόνο αν το όριο*

$$\phi(z) = \lim_{n\to\infty} \phi_n(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{kn} z^k$$

υπάρχει για κάθε $z \in (0,1)$. Σ' αυτή την περίπτωση $\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος αυτού παραπέμπουμε τον αναγνώστη στον Feller (1968).

Είναι γνωστό ότι αν έχουμε μια ακολουθία από διωνυμικά κατανεμημένες τ.μ., έστω $\{X_n\}$, όπου η X_n έχει παραμέτρους (n, p_n), και αν $\lim_{n\to\infty} np_n = \alpha$, τότε ισχύει ότι

$$\lim_{n\to\infty} P(X_n = k) = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha} \qquad \text{για κάθε } k \in \mathbb{N}.$$

Η παραπάνω πρόταση στην πράξη σημαίνει ότι, ο αριθμός επιτυχιών μιας διωνυμικής τ.μ. της οποίας ο αριθμός δοκιμών, n, είναι μεγάλος και η πιθανότητα επιτυχίας της κάθε δοκιμής, p_n, είναι μικρή, έχει προσεγγιστικά κατανομή Poisson με μέσο np_n.

Σύμφωνα με το θεώρημα συνέχειας αρκεί να δείξουμε ότι η ακολουθία των πιθανογεννητριών, $\{\phi_n(z)\}$ (όπου $\phi_n(z) = Ez^{X_n}$) συγκλίνει στην πιθανογεννήτρια $\phi(z) := e^{-\alpha(1-z)}$. Αφού η X_n είναι διωνυμικές, $Ez^{X_n} = (1 - p_n + zp_n)^n$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι, υπό την συνθήκη $\lim_{n\to\infty} np_n = \alpha$,

$$\lim_{n\to\infty} (1 - p_n(1-z))^n = e^{-\alpha(1-z)}. \tag{1.21}$$

Αυτό μας το εξασφαλίζει το ακόλουθο

Λήμμα 1.1. *Έστω α_n ακολουθία πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $\alpha_n \to \alpha$. Τότε*

$$\left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right)^n \to e^{\alpha}.$$

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε ότι $n\log(1 + \frac{\alpha_n}{n}) \to \alpha$. Αρχίζουμε με την ανισότητα $\frac{x}{1+x} \leq \log(1+x) \leq x$ που ισχύει για κάθε $x > -1$. Θέτοντας $x = \alpha_n/n$ έχουμε

$$\frac{\alpha_n}{1 + \alpha_n/n} \leq n \log\left(1 + \frac{\alpha_n}{n}\right) \leq \alpha_n.$$

Αφήνοντας $n \to \infty$ σ' αυτή την τελευταία διπλή ανισότητα βλέπουμε ότι τόσο το αριστερό όσο και το δεξί μέλος τείνουν στο α. ∎

1.10 Προβλήματα

Πρόβλημα 1.1. Έχουμε δύο νομίσματα, το νόμισμα Α το οποίο με πιθανότητα 0.3 έρχεται κορώνα και με πιθανότητα 0.7 γράμματα, και το νόμισμα Β που έρχεται κορώνα με πιθανότητα 0.6 και γράμματα με πιθανότητα 0.4. Τα δύο αυτά νομίσματα δεν διαφέρουν σε τίποτα ως προς την εξωτερική τους εμφάνιση.

α) Διαλέγουμε ένα νόμισμα στην τύχη και το ρίχνουμε κατ' επανάληψη μέχρι να έρθει κορώνα. Κατά μέσο όρο πόσες ρίψεις θα χρειαστούν;

β) Δεδομένου ότι χρειάστηκαν 3 ρίψεις για να έρθει το νόμισμα κορώνα ποία είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το νόμισμα Α;

Πρόβλημα 1.2. Έστω ότι έχουμε δύο νομίσματα το ένα με πιθανότητα επιτυχίας (ας πούμε κορώνα) $p_1 = 0.2$ και το άλλο με πιθανότητα επιτυχίας $p_2 = 0.6$. Διαλέγουμε ένα από τα δύο νομίσματα στην τύχη (ας υποθέσουμε ότι η πιθανότητα επιλογής του πρώτου νομίσματος είναι $\alpha_1 = 0.01$, ενώ του δευτέρου $\alpha_2 = 0.99$) και αρχίζουμε να το ρίχνουμε μέχρι να εμφανισθεί κορώνα.

1) Αν η κορώνα εμφανισθεί κατά την k ρίψη ποία είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το νόμισμα 1;

2) Αν η κορώνα δεν έχει εμφανισθεί μέχρι την k ρίψη ποία είναι η πιθανότητα να έχουμε επιλέξει το νόμισμα 1;

Λύση: Έστω A_1 το ενδεχόμενο να έχουμε επιλέξει το νόμισμα 1 και A_2 το νόμισμα 2. Επίσης συμβολίζουμε με X τον αριθμό των ρίψεων μέχρι να εμφανισθεί κορώνα. Ζητείται η πιθανότητα $P(A_1|X = k)$. Από τον νόμο του Bayes έχουμε

$$P(A_1|X = k) = \frac{P(X = k|A_1)P(A_1)}{P(X = k|A_1)P(A_1) + P(X = k|A_2)P(A_2)}.$$

Από τα δεδομένα του προβλήματος $P(A_1) = \alpha_1$, $P(A_2) = \alpha_2$, $P(X = k|A_1) = q_1^{k-1}p_1$, και $P(X = k|A_2) = q_2^{k-1}p_2$ και συνεπώς

$$P(A_1|X = k) = \frac{\alpha_1 q_1^{k-1}p_1}{\alpha_1 q_1^{k-1}p_1 + \alpha_2 q_2^{k-1}p_2}.$$

Πρόβλημα 1.3. Έστω X_1, X_2, δύο ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Poisson, η πρώτη με μέση τιμή α_1 και η δεύτερη με μέση τιμή α_2. Έστω επίσης $Y = X_1 + X_2$ το άθροισμά τους. Να ευρεθεί η πιθανογεννήτρια της Y καθώς και η συνδιακύμανση των τυχαίων μεταβλητών Y και X_1.

Πρόβλημα 1.4 (Το πρόβλημα της συλλογής κουπονιών). Στα πλαίσια διαφημιστικής εκστρατείας ενός προϊόντος, η εταιρία βάζει σε κάθε κουτί του προϊόντος και από ένα κουπόνι. Υπάρχουν συνολικά K διαφορετικά κουπόνια και όποιος τα συλλέξει όλα κερδίζει ένα δώρο. Αν είναι εξίσου πιθανό για κάθε κουτί να περιέχει οποιοδήποτε από τα K κουπόνια, πόσα κουτιά πρέπει να αγοράσει κανείς μέχρι να συλλέξει όλα τα κουπόνια;

Λύση: Έστω S ο συνολικός αριθμός κουτιών που απαιτούνται μέχρι να συλλέξουμε και τα K κουπόνια. Μπορούμε να γράψουμε $S = X_0 + X_1 + \cdots + X_{K-1}$. Στην αναπαράσταση αυτή X_i είναι ο αριθμός των κουτιών που απαιτούνται για να μεταβούμε από i σε $i+1$ διαφορετικά κουπόνια. $X_0 = 1$ με πιθανότητα 1, αλλά στη συνέχεια μπορεί να χρειαστούν περισσότερα από ένα κουτιά για ένα καινούργιο κουπόνι λόγω των πιθανών επαναλήψεων. Αν έχουμε ήδη i από τα K κουπόνια τότε η πιθανότητα να βρούμε ένα *καινούργιο* κουπόνι (από αυτά που δεν έχουμε) αγοράζοντας ένα κουτί είναι $\frac{K-i}{K}$ και συνεπώς ο αριθμός των κουτιών που θα πρέπει να αγοράσουμε μέχρι να βρούμε ένα καινούργιο κουπόνι είναι γεωμετρική τ.μ., X_i, με μέση τιμή $\frac{K}{K-i}$. Συνεπώς, ο συνολικός αριθμός κουτιών για να συλλεχθούν όλα τα κουπόνια είναι $S = X_0 + X_1 + \cdots + X_{K-1}$ με μέση τιμή

$$ES = \frac{K}{K} + \frac{K}{K-1} + \frac{K}{K-2} + \cdots + \frac{K}{2} + \frac{K}{1} = K\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{K-1} + \frac{1}{K}\right)$$

Η πιθανογεννήτρια του συνολικού αριθμού κουτιών που χρειάζονται για να συλλέξουμε όλα τα κουπόνια είναι

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{K-1} \frac{z\frac{K-i}{K}}{1-\frac{i}{K}z} &= \prod_{i=0}^{K-1} \frac{z(K-i)}{K-iz} \\ &= \frac{z^K}{(K-z)(\frac{K}{2}-z)\cdots(\frac{K}{K-1}-z)}.\end{aligned}$$

Το γινόμενο αυτό, με ανάλυση σε απλά κάσματα μπορεί να γραφεί ως

$$Ez^S = z\sum_{i=1}^{K-1}\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K-1}\frac{j}{i-j}\right)\frac{z}{\frac{K}{i}-z}$$

και ισχύει ότι

$$\left(\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{K-1}\frac{j}{i-j}\right)\frac{z}{\frac{K}{i}-z} = (-1)^{K-i-1}\binom{K-1}{i-1}\frac{z(1-\frac{i}{K})}{1-z\frac{i}{K}}.$$

Συνεπώς έχουμε

$$Ez^S = z\sum_{i=1}^{K-1}(-1)^{K-i-1}\binom{K-1}{i-1}\frac{z(1-\frac{i}{K})}{1-z\frac{i}{K}}.$$

Έχοντας εκφράσει την πιθανογεννήτρια ως γραμμικό συνδιασμό γεωμετρικών όρων μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα σε σειρά

$$\frac{z(1-\frac{i}{K})}{1-z\frac{i}{K}} = \sum_{n=1}^{\infty} z^n\left(1-\frac{i}{K}\right)\left(\frac{i}{K}\right)^{n-1}$$

Επομένως,

$$Ez^S = \sum_{n=1}^{\infty} z^{n+1}\sum_{i=1}^{K-1}(-1)^{K-i-1}\binom{K-1}{i-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)\left(\frac{i}{K}\right)^{n-1}$$

και

$$P(S=n) = \sum_{i=1}^{K-1}(-1)^{K-i-1}\binom{K-1}{i-1}\left(1-\frac{i}{K}\right)\left(\frac{i}{K}\right)^{n-2}. \qquad (1.22)$$

Ως εφαρμογή του παραπάνω τύπου δίνουμε την κατανομή του αριθμού των κουτιών όταν υπάρχουν $K=3$ και $K=4$ διαφορετικά κουπόνια. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$P(S=n) = \frac{2}{3}\quad\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}\right), \qquad n = 2,3,4,5,\ldots.$$

Στην δεύτερη,

$$P(S=n) = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \frac{3}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}, \qquad n = 2,3,4,5,\ldots.$$

(Εύκολα διαπιστώνουμε ότι για $n = 2,3$, ο παραπάνω τύπος δίνει 0, όπως θα έπρεπε, αφού απαιτούνται τουλάχιστον 4 κουτιά για να συλλέξουμε όλα τα κουπόνια.)

Πρόβλημα 1.5. Έστω X, Y, τ.μ. των οποίων η από κοινού κατανομή δίνεται από την (1.10). Υπολογίστε τις περιθώριες κατανομές $P(X = m)$, $P(Y = n)$.

Λύση: Η περιθώριος κατανομή της X βρίσκεται από την σχέση

$$P(X = m) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = m, Y = n)$$

(αυτό είναι συνέπεια του θεωρήματος ολικής πιθανότητας). Επομένως

$$P(X = m) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha} \frac{\beta^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\beta}$$

όπου το άθροισμα ξεκινάει από $n = m$ επειδή $P(X = m, Y = n) = 0$ για $n < m$. Συνεπώς

$$P(X = m) = \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{\beta^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\beta} = \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{\beta^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\beta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^n}{(n)!} e^{-\beta} = 1$ (άθροισμα των πιθανοτήτων Poisson).

Για την περιθώριο κατανομή της Y έχουμε με τον ίδιο τρόπο

$$\begin{aligned} P(Y = n) &= \sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha} \frac{\beta^{n-m}}{(n-m)!} e^{-\beta} = e^{-(\alpha+\beta)} \sum_{m=0}^{n} \frac{\alpha^m}{m!} \frac{\beta^{n-m}}{(n-m)!} \\ &= \frac{1}{n!} e^{-(\alpha+\beta)} \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \alpha^m \beta^{n-m} = \frac{(a+b)^n}{n!} e^{-(\alpha+\beta)} \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το διωνυμικό θεώρημα $\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} \alpha^m \beta^{n-m} = (a+b)^n$. Από τις περιθώριες κατανομές των X και Y συμπεραίνουμε ότι και οι δύο τ.μ. είναι Poisson με μέσες τιμές α και β αντίστοιχα, δεν είναι όμως ανεξάρτητες.

Πρόβλημα 1.6. Έστω X, Z, ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομή Poisson με μέσες τιμές α και β αντίστοιχα και ορίζουμε την τ.μ. Y ως το άθροισμά τους, $Y = X + Z$. Δείξτε ότι η συνκατανομή των X, Y δίνεται από την (1.10).

Λύση: Παρατηρούμε ότι το γεγονός $\{X = m, Y = m\}$ ταυτίζεται με το γεγονός $\{X = m, Z = n - m\}$ και συνεπώς

$$P(X = m, Y = m) = P(X = m, Z = n - m) = P(X = m)P(Z = n - m)$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει λόγω της ανεξαρτησίας των X, Z. Εφ' όσον

$$P(X = m) = \begin{cases} \frac{\alpha^m}{m!} e^{-\alpha} & \text{για } m \geq 0 \\ 0 & \text{για } m < 0 \end{cases}, \quad P(Z = n - m) = \begin{cases} \frac{\beta^{(n-m)}}{(n-m)!} e^{-\beta} & \text{για } n \geq m \\ 0 & \text{για } n < m \end{cases},$$

πολλαπλασιάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις προκύπτει η (1.10).

Πρόβλημα 1.7. Πόσα χαρτιά πρέπει να τραβήξουμε από μια καλά ανακατεμένη τράπουλα κατά μέσον όρο μέχρι να εμφανισθεί ο πρώτος άσσος;

Λύση: Έστω X ο αριθμός των χαρτιών μέχρι να εμφανισθεί ο πρώτος άσσος (ο οποίος συμπεριλαμβάνεται).

$$P(X = k) = \begin{cases} \frac{4}{52} & k = 1, \\ \frac{48 \times 47 \times 46 \times \cdots \times (48-k+2)}{52 \times 51 \times 50 \times \cdots \times (52-k+2)} \times \frac{4}{52-k+1} & k = 2, 3, \ldots, 49. \end{cases} \tag{1.23}$$

Η μέση τιμή προκύπτει τότε ως $\sum_{k=1}^{49} kP(X = k)$. Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε μία υπολογιστικά απλούστερη λύση αφού πρώτα γενικεύσουμε το πρόβλημα ως εξής: Έστω κάλπη με $n + r$ σφαιρίδια, r από τα οποία είναι μαύρα και τα υπόλοιπα n λευκά. Αρχίζουμε να ανασύρουμε από την κάλπη ένα-ένα τα σφαιρίδια μέχρι να εμφανισθεί το πρώτο μαύρο και συμβολίζουμε με Y τον αριθμό των λευκών σφαιριδίων που εμφανίζονται πριν το πρώτο μαύρο. Υποθέτουμε ότι τα λευκά σφαιρίδια είναι αριθμημένα και εισάγουμε τις δείκτριες ξ_i, $i = 1, 2, \dots, n$:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{αν το λευκό σφαιρίδιο υπ' αριθμόν } i \text{ ανασυρθεί πριν το πρώτο μαύρο σφαιρίδιο} \\ 0 & \text{αν όχι} \end{cases}$$

Παρατηρείστε ότι

$$Y = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \tag{1.24}$$

και επίσης ότι $P(\xi_i = 1) = \frac{1}{r+1}$, η δε τελευταία πιθανότητα αυτή δεν εξαρτάται από το i. Έτσι

$$EY = E\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = n\frac{1}{r+1}.$$

Στην περίπτωση της τράπουλας, $n = 48$, $r = 4$ (οι τέσσερις άσσοι) και συνεπώς $EY = 48 \times \frac{1}{5} = 9.6$. Επομένως ο μέσος αριθμός των χαρτιών που πρέπει να τραβήξουμε μέχρι να βρούμε τον πρώτο άσσο (μετρώντας και τον άσσο) είναι $EY + 1 = 10.6$. Ο υπολογισμός αυτός θα ήταν βέβαια πολύ πιο δύσκολος αν έπρεπε να βασισθεί στην (1.23).

Ας υπολογίσουμε τώρα την *δεύτερη ροπή* της Y. Από την (1.24),

$$Y^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i \right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 + \sum_{i \neq j} \xi_i \xi_j$$

(όπου το δεύτερο άθροισμα είναι το *διπλό άθροισμα* για όλα τα i και j που είναι διαφορετικά μεταξύ τους). Παρατηρούμε επίσης ότι $\xi_i^2 = \xi_i$, εφ' όσον το ξ_i παίρνει μόνο τις τιμές 0 ή 1. Έτσι έχουμε

$$EY^2 = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i + \sum_{i \neq j} E[\xi_i \xi_j] \tag{1.25}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι $E[\xi_i\xi_j] = P(\xi_i = 1, \xi_j = 1) = \frac{2}{r+2}\frac{1}{r+1}$ και συνεπώς η ποσότητα $E\xi_i\xi_j$ δεν εξαρτάται από τα i και j, το δε άθροισμα $\sum_{i \neq j}$ έχει $n(n-1)$ όρους. Συνεπώς η (1.25) γράφεται ως

$$EY^2 = n\frac{1}{r+1} + n(n-1)\frac{2}{r+2}\frac{1}{r+1},$$

και η διασπορά

$$\begin{aligned} \mathsf{Var}(Y) &= EY^2 - (EY)^2 \;=\; n\frac{1}{r+1} \;+\; n(n-1)\frac{2}{r+2}\frac{1}{r+1} \;-\; n^2\left(\frac{1}{r+1}\right)^2 \\ &= \frac{nr(n+r+1)}{(r+1)^2(r+2)} \end{aligned}$$

Στην περίπτωση του προβλήματος του πρώτου άσσου, η διασπορά είναι $\mathsf{Var}(Y+1) = \mathsf{Var}(Y) = \frac{48 \cdot 4 \cdot 53}{5^2 \cdot 6} = 67.84$ και η τυπική απόκλιση 8.24. (Παρατηρούμε ότι η τυπική απόκλιση έχει περίπου το ίδιο μέγεθος με την μέση τιμή, δηλαδή η τυχαία μεταβλητή αυτή έχει μεγάλη μεταβλητότητα.)

Πρόβλημα 1.8. Ο αρχηγός m πειρατών αποφασίζει να μοιράσει στα παλικάρια του k χρυσά νομίσματα που απέκτησαν μετά από μια ιδιαίτερα κερδοφόρο επιδρομή. Ο αρχηγός βάζει τους άνδρες του στη σειρά ανάλογα με την συμβολή τους στην επιχείρηση, ρίχνει όλα τα νομίσματα στον αέρα και όσα έρθουν κορώνα τα παίρνει ο πρώτος πειρατής. Στη συνέχεια, όσα έρθουν γράμματα τα ξαναρίχνει, και από αυτά, όσα έρθουν κορώνα τα παίρνει ο δεύτερος πειρατής, και ούτω καθ΄ εξής. Να ευρεθεί ο μέσος αριθμός νομισμάτων που θα πάρει ο κάθε πειρατής, η πιθανότητα να μην πάρει κανένα νόμισμα ο πειρατής n, $n = 1, 2, \ldots, m$, και γενικότητα η κατανομή των νομισμάτων που θα πάρει ο κάθε πειρατής. Όσα νομίσματα περισσέψουν από αυτή τη διαδικασία θα διατεθούν για επισκευές και συντήρηση του πειρατικού πλοίου. Να ευρεθεί η μέση τιμή και η κατανομή των νομισμάτων που θα διατεθούν γι΄ αυτό τον σκοπό.

Λύση: Υποθέτουμε ότι κάθε νόμισμα έρχεται κορώνα με πιθανότητα $p = 1/2$ και γράμματα με πιθανότητα $q = 1 - p = 1/2$. Είναι σαφές ότι ο μέσος αριθμός νομισμάτων που θα πάρει ο πρώτος πειρατής είναι pk, για τον δεύτερο είναι p^2k, και γενικά για τον πειρατή n είναι $p^n k$. Συνεπώς ο μέσος αριθμός των νομισμάτων που θα πάρουν όλοι οι πειρατές είναι

$$\sum_{n=1}^{m} p^n k = kp\frac{1-p^m}{1-p} = k\frac{p}{q}\left(1 - p^m\right)$$

και ο μέσος αριθμός των νομισμάτων που θα διατεθούν για επισκευές είναι

$$k - k\frac{p}{q}\left(1 - p^m\right).$$

Τα δύο αυτά ποσά, όταν $p = q = 1/2$, είναι $k\left(1 - 2^{-m}\right)$ και $k2^{-m}$ αντίστοιχα.

Η κατανομή του αριθμού των νομισμάτων που παίρνει ο κάθε πειρατής μπορεί να βρεθεί με την χρήση πιθανογεννητριών. Έστω X_n, $n = 0, 1, 2, \ldots, m$ ο αριθμός των διαθέσιμων νομισμάτων κατά το βήμα n, δηλαδή $X_0 = k$ είναι ο αρχικός αριθμός νομισμάτων, X_1 ο αριθμός νομισμάτων που ήρθαν *γράμματα* κατά την πρώτη ρίψη και επομένως είναι διαθέσιμα για τη δεύτερη ρίψη κ.ο.κ. Μ΄ αυτό το συμβολισμό, ο πρώτος πειρατής θα πάρει $Y_1 := X_0 - X_1$ νομίσματα, ο δεύτερος θα πάρει $Y_2 := X_1 - X_2$, ο τελευταίος (υπ΄ αριθμόν m) θα πάρει $X_{m-1} - X_m$, ενώ τέλος, για επισκευές και συντήρηση θα διατεθούν X_m νομίσματα. Έστω επίσης

$$\xi_i^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{μ.π. } p \\ 1 & \text{μ.π. } q \end{cases} \qquad n = 1, 2, \ldots, m \qquad i = 1, 2, \ldots,$$

τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Τότε

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i^{(n)}, \qquad n = 1, 2, \ldots, m.$$

Ας συμβολίσουμε την πιθανογεννήτρια της X_n με $\phi_n(z) = Ez^{X_n}$ για όλα τα n. Τότε

$$\begin{aligned} Ez^{X_n} &= E\left[E[z^{X_n}|X_{n-1}]\right] = E\left[E[z^{\sum_{i=1}^{X_{n-1}}\xi_i^{(n)}}|X_{n-1}]\right] = E\left[\left(E[z^{\xi_i^{(n)}}]\right)^{X_{n-1}}\right] \\ &= E\left[(p+qz)^{X_{n-1}}\right] = \phi_{n-1}(p+qz). \end{aligned}$$

Ετσι έχουμε την αναδρομική σχέση

$$\phi_n(z) = \phi_{n-1}(p+qz).$$

Η σχέση αυτή οδηγεί στη λύση ως εξής:

$$\phi_{n-1}(z) = \phi_{n-2}(p+qz)$$

κι΄ έτσι

$$\phi_n(z) = \phi_{n-2}(p + q(p + qz)) = \phi_{n-2}(p + qp + q^2 z)$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση αναδρομικά καταλήγουμε στη

$$\phi_n(z) = \phi_0\left(p + qp + \cdots + pq^{n-1} + q^n z\right) = \phi_0\left(p\frac{1-q^n}{1-q} + q^n z\right) = \phi_0\left(1 - q^n + q^n z\right)$$

Στην περίπτωσή μας $\phi_0(z) = z^k$ (αφού αρχικά έχουμε k νομίσματα) και συνεπώς

$$\phi_n(z) = (1 - q^n + q^n z)^k$$

Επομένως ο αριθμός των νομισμάτων που απομένει μετά από την ρίψη n είναι διωνυμικά κατανεμημένος με παραμέτρους k και q^n. (Αυτό προκύπτει και από τον εξής απλό συλλογισμό: Το κάθε νόμισμα, ανεξάρτητα από τα άλλα, για να είναι ακόμη διαθέσιμο μετά τη ρίψη n θα πρέπει να έχει έρθει γράμματα n φορές στη σειρά, πράγμα που συμβαίνει με πιθανότητα q^n.)

Ο αριθμός των νομισμάτων που θα πάρει ο πειρατής n είναι

$$Y_n = X_n - X_{n-1} = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i^{(n)} - X_{n-1} = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \left(1 - \xi_i^{(n)}\right)$$

με πιθανογεννήτρια

$$\begin{aligned} Ez^{Y_n} &= \left(1 - q^{n-1} + q^{n-1}(q + pz)\right)^k = \left(1 - q^{n-1} + q^n + pq^{n-1}z\right)^k \\ &= \left(1 - q^{n-1}(1-q) + pq^{n-1}z\right)^k = \left(1 - pq^{n-1} + pq^{n-1}z\right)^k. \end{aligned}$$

Συνεπώς ο αριθμός των νομισμάτων που παίρνει ο πειρατής n είναι διωνυμικά κατανεμημένος με παραμέτρους k, pq^{n-1}. Κι΄ αυτό το αποτέλεσμα είναι προφανές δεδομένου ότι για να πάρει ένα νόμισμα ο πειρατής n, το νόμισμα αυτό θα πρέπει να έρθει $n-1$ γράμματα (ώστε να μην το πάρει κανείς από τους προηγούμενους $n-1$ πειρατές) και να έρθει κορώνα την επόμενη φορά (ώστε να το πάρει ο πειρατής n).

Πρόβλημα 1.9. Στο παραπάνω πρόβλημα, αν ο αρχικός αριθμός νομισμάτων είναι τυχαία μεταβλητή Poisson με μέση τιμή α, τότε το μερίδιο του πειρατή n είναι τ.μ. Poisson με μέση τιμή αpq^{n-1}. Ομοια, αν ο αρχικός αριθμός νομισμάτων είναι διωνυμικός με παραμέτρους K, p_0, τότε το μερίδιο του πειρατή n είναι διωνυμική τ.μ. με παραμέτρους $K, p_0 pq^{n-1}$.

Πρόβλημα 1.10. Έστω n υποψήφιοι για μια θέση οι οποίοι παρουσιάζονται για συνέντευξη ένας - ένας. Στο τέλος κάθε συνέντευξης είμαστε υποχρεωμένοι να απαντήσουμε αμέσως στον υποψήφιο αν θα πάρει την θέση ή όχι. Σε περίπτωση αρνητικής απαντήσεως ας υποθέσουμε ότι ο υποψήφιος δέχεται μια άλλη προσφορά και αποσύρει την υποψηφιότητα του. Αρχικά δεν έχουμε καμία ιδέα για την ποιότητα των υποψηφίων, είμαστε όμως σε θέση να αξιολογήσουμε κάθε υποψήφιο σε σχέση με όσους έχουμε δει μέχρι στιγμής. Όταν αποφασίσουμε να προσφέρουμε σε κάποιον υποψήφιο την θέση, εκείνος δέχεται και η διαδικασία τελειώνει. Ζητείται να βρεθεί στρατηγική η οποία να μεγιστοποιεί την πιθανότητα επιλογής του καλύτερου υποψηφίου.

Λύση: Στη διαδικασία αυτή διατρέχουμε δύο κινδύνους: είτε να προσλάβουμε κάποιον υποψήφιο που δεν είναι ο καλύτερος από τους 100, είτε να απορρίψουμε τον καλύτερο χωρίς να το γνωρίζουμε. Ορισμένες στρατηγικές προφανώς δεν είναι πολύ καλές όπως για παράδειγμα να προσλάβουμε τον πρώτο υποψήφιο, χωρίς να δούμε άλλους. Η πιθανότητα να είναι αυτός ο βέλτιστος είναι βέβαια μόλις 1%. Αντίθετα, αν δούμε και τους 100 υποψηφίους αυτό συνεπάγεται ότι θα πρέπει να απορρίψουμε τους πρώτους 99 και κατά συνέπεια η πιθανότητα να προσλάβουμε τον καλύτερο είναι πάλι 1%. Αποδεικνύεται ότι η βέλτιστη στρατηγική έχει την εξής μορφή: απορρίπτουμε τους πρώτους k υποψηφίους αλλά «κρατάμε στη μνήμη μας» τον καλύτερο απ΄ αυτούς και στη συνέχεια προσλαμβάνουμε τον πρώτο υποψήφιο που θα είναι καλύτερος από εκείνον.

Θα υπολογίσουμε στη συνέχεια την πιθανότητα να προσλάβουμε τον βέλτιστο υποψήφιο χρησιμοποιώντας αυτή τη στρατηγική. Χάριν γενικότητος υποθέτουμε ότι ο συνολικός αριθμός υποψηφίων είναι N. Έστω A_n το ενδεχόμενο ο βέλτιστος υποψήφιος να βρίσκεται στη θέση n *και να τον επιλέξουμε*. Τα ενδεχόμενα A_n είναι ξένα μεταξύ τους και επομένως η πιθανότητα να επιλέξουμε τον βέλτιστο υποψήφιο, δεδομένης της στρατηγικής μας, είναι $\sum_{n=k+1}^{n} P(A_n)$. Η πιθανότητα ο βέλτιστος υποψήφιος να βρίσκεται στη θέση n είναι $1/N$ (αφού η θέση τους είναι τυχαία). Η πιθανότητα να επιλεγεί, *δεδομένου ότι βρίσκεται στη θέση* n, είναι $k/(n-1)$. Αυτό ισχύει διότι προκειμένου να επιλεγεί ο βέλτιστος στη θέση n θα πρέπει να μην έχει επιλεγεί μέχρι εκείνο το σημείο κάποιος λιγότερο καλός κατά λάθος. Για το λόγο αυτό θα πρέπει ο καλύτερος ανάμεσα στους πρώτους $n-1$ να βρίσκεται σε μία από τις πρώτες k θέσεις, και αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $k/(n-1)$. Συνεπώς $P(A_n) = k/(N(n-1))$ και επομένως η πιθανότητα επιλογής του βέλτιστου υποψηφίου είναι

$$\sum_{n=k+1}^{N} \frac{1}{N}\frac{k}{n-1}$$

Ασυμπτωτικά, για μεγάλες τιμές του N, η παραπάνω έκφραση προσεγγίζεται από την

$$\frac{k}{N}\int_{k}^{N}\frac{dx}{x} = \frac{k}{N}\left(\log N - \log k\right),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\sum_{n=k}^{N-1}\frac{1}{n} \approx \int_{k}^{N}\frac{dx}{x}$. Η βέλτιστη τιμή του k μπορεί να βρεθεί θέτοντας την παράγωγο

$$\frac{d}{dk}\frac{k}{N}\left(\log N - \log k\right) = 0$$

ή $\log N - \log k - 1 = 0$ ή $\log(N/K) = 1$. Συνεπώς

$$k = \frac{N}{e}$$

όπου e είναι η βάση των φυσικών λογαρίθμων. Η πιθανότητα επιλογής του βέλτιστου υποψηφίου μ΄ αυτή τη διαδικασία είναι προσεγγιστικά

$$\frac{1}{e}\log e = \frac{1}{e} \approx 0.3679,$$

ανεξάρτητα από την τιμή του N (για N αρκετά μεγάλο ώστε να δικαιολογεί την προσέγγισή μας). Όταν $N = 100$, $N/e = 36.79$. Αυτό στην πράξη σημαίνει ότι βλέπουμε τους πρώτους 37 υποψηφίους τους οποίους απορρίπτουμε και στην συνέχεια προσλαμβάνουμε τον πρώτο υποψήφιο που θα είναι καλύτερος από τον καλύτερο ανάμεσα στους 37. Η πιθανότητα να μην προσλάβουμε κανένα (αν ο πραγματικά καλύτερος ήταν ανάμεσα στους πρώτους 37) ή να προσλάβουμε κάποιον που δεν είναι ο καλύτερος είναι 0.63. Η πιθανότητα να προσλάβουμε τον καλύτερο είναι 0.37.

Κεφάλαιο 2

Συνεχείς Τυχαίες Μεταβλητές

Στο κεφάλαιο αυτό περιγράφουμε κάποιες ιδιότητες των συνεχών τυχαίων μεταβλητών που θα χρειαστούν στη συνέχεια. Μεγαλύτερη έμφαση δίνουμε στην κατανομή του αθροίσματος ανεξάρτητων, ισόνομων τυχαίων μεταβλητών καθώς και στις ιδιότητες της εκθετικής κατανομής.

2.1 Συνεχείς τυχαίες μεταβλητές

Οι συνεχείς τ.μ. που συναντά κανείς στις περισσότερες εφαρμογές παίρνουν τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$. Μια συνεχής τ.μ. X προσδιορίζεται από την *συνάρτηση κατανομής*

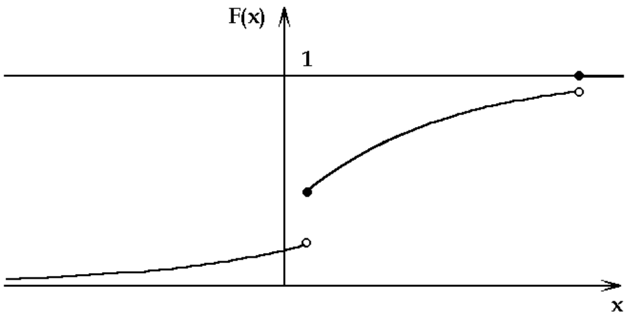
$$F(x) := P(X \leq x).$$

Η συνάρτηση κατανομής ικανοποιεί υποχρεωτικά τις εξής συνθήκες:

- $0 \leq F(x) \leq 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, εφόσον η $F(x)$ ορίζεται σαν πιθανότητα.
- Η συνάρτηση F είναι μη φθίνουσα, δηλαδή $x \leq y$ συνεπάγεται $F(x) \leq F(y)$. Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι $\{X \leq x\} \subset \{X \leq y\}$ όταν $x \leq y$ και της μονοτονικής ιδιότητας του μέτρου πιθανότητας.

Θα κάνουμε μια επιπλέον υπόθεση, ότι η F είναι συνεχής από τα δεξιά, δηλαδή $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ $\lim_{x \downarrow x_0} F(x) = F(x_0)$. Η συνάρτηση κατανομής μπορεί να έχει άλματα, όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.1, αν όμως έχει άλμα στο σημείο a τότε η τιμή της σ' αυτό το σημείο, $F(a)$, είναι το όριο από τα δεξιά. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι η συνάρτηση κατανομής δίνει την πιθανότητα η τ.μ. X να ανήκει σ' ένα διάστημα:

$$P(a < X \leq b) = P(\{X \leq b\} \setminus \{X \leq a\}) = F(b) - F(a)$$



Σχήμα 2.1: Συνάρτηση κατανομής με άλματα.

Ορισμός 2.1. Μια συνάρτηση κατανομής ονομάζεται απολύτως συνεχής αν είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, η παράγωγος $f(x) := \frac{d}{dx}F(x)$ υπάρχει σχεδόν για κάθε[1] $x \in \mathbb{R}$, και

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Σ′ αυτές τις σημειώσεις θα περιοριστούμε σχεδόν αποκλειστικά στην κατηγορία των απολύτως συνεχών συναρτήσεων. Υπενθυμίζουμε ότι η παράγωγος της συνάρτησης κατανομής, $f(x) := \frac{d}{dx}F(x)$ ονομάζεται *πυκνότητα πιθανότητας*.

Από κοινού κατανομή δύο τ.μ.: Για να προσδιορισθούν πλήρως οι στατιστικές ιδιότητες δύο τ.μ., X_1, X_2, (ορισμένων στον ίδιο χώρο πιθανοτήτων) απαιτείται ο προσδιορισμός της από κοινού κατανομής τους,

$$F(x_1, x_2) := P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2), \quad \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Δύο τ.μ. X_1, X_2 ονομάζονται ανεξάρτητες αν και μόνο αν $P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2) = P(X_1 \leq x_1)P(X_2 \leq x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Σ′ αυτή την περίπτωση, αν $F_i(x) = P(X_i \leq x)$, $i = 1, 2$, τότε $F(x_1, x_2) = F_1(x_1)F_2(x_2)$. Οι συναρτήσεις κατανομής F_i ονομάζονται περιθώριες κατανομές των X_i. Γενικότερα, παρατηρούμε ότι

$$F_1(x_1) = P(X_1 \leq x_1) = P(X_1 \leq x_1, X_2 < \infty) = F(x_1, \infty)$$

ενώ η ανάλογη σχέση ισχύει και για την F_2. Μία συνάρτηση δύο μεταβλητών $F(x_1, x_2)$ είναι συνάρτηση κατανομής αν οι τιμές της ανήκουν πάντα στο διάστημα [0,1], και ικανοποιεί την ανισότητα

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \geq 0 \qquad \text{για κάθε } x_1 \leq x_2,\ y_1 \leq y_2, \tag{2.1}$$

καθώς και τις παρακάτω οριακές σχέσεις:

α) $F(-\infty, x_2) = \lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$ για κάθε x_2,

[1] «σχεδόν για κάθε» σημαίνει ότι το σύνολο των εξαιρέσεων έχει μηδενικό μέτρο.

β) $F(x_1, -\infty) = \lim_{x_2 \to -\infty} F(x_1, x_2) = 0$ για κάθε x_1, και τέλος

γ) $F(\infty, \infty) = \lim_{\substack{x_1 \to \infty \\ x_2 \to \infty}} = 1$.

(Η ανισότητα (2.1) συνεπάγεται ότι η F είναι μη φθίνουσα ως προς καθ' ένα από τα δύο ορίσματά της. Σε περίπτωση μιας ομαλής κατανομής, π.χ. αν η F έχει συνεχείς δεύτερες παραγώγους, ισχύει ότι

$$F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(u, v) du dv$$

όπου $f = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}$. Τότε η ανισότητα (2.1) είναι ισοδύναμη με την $f(x, y) \geq 0$.)

Παράδειγμα 2.1. Έστω $G : \mathbb{R} \to [0, 1]$ η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X. Ορίζουμε την συνάρτηση δύο μεταβλητών $F : \mathbb{R}^2 \to [0, 1]$ μέσω της

$$F(x_1, x_2) = \min(G(x_1), G(x_2)) \tag{2.2}$$

Η F είναι συνάρτηση κατανομής αφού οι προαναφερθείσες συνθήκες ικανοποιούνται.

Θεώρημα 2.1 (Η ανισότητα Cauchy-Schwarz)**.** *Έστω, X, Y, τυχαίες μεταβλητές με πεπερασμένη μέση τιμή. Τότε έχουμε πάντα*

$$(E[XY])^2 \leq E[X^2]E[Y^2]. \tag{2.3}$$

Στην παραπάνω σχέση η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $X = \theta^* Y$ για κάποιο πραγματικό αριθμό θ^*.

Απόδειξη: Για κάθε πραγματικό θ, $(X - \theta Y)^2 \geq 0$ μ.π. 1. Επομένως, παίρνοντας μέσες τιμές,

$$E(X - \theta Y)^2 = EX^2 - 2\theta E[XY] + \theta^2 EY^2 \geq 0.$$

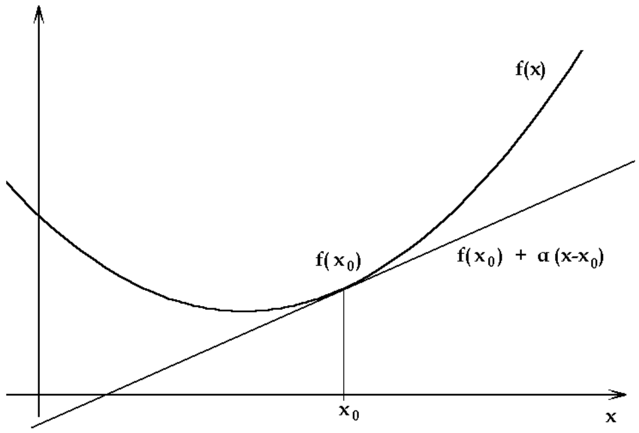
Αφού το δευτεροβάθμιο αυτό πολυώνυμο ως προς θ είναι πάντα μη αρνητικό, είτε δεν έχει καμία πραγματική ρίζα, είτε έχει μόνον μία, διπλή. Στην πρώτη περίπτωση η διακρίνουσα $\Delta := (E[XY])^2 - EX^2 EY^2$ είναι αυστηρά θετική δηλαδή ισχύει η (2.3) με ανισότητα. Στην δεύτερη περίπτωση που η διακρίνουσα είναι μηδέν, (δηλαδή που η (2.3) ισχύει με ισότητα) το δευτεροβάθμιο πολυώνυμο έχει μία μοναδική ρίζα,

$$\theta^* = -\frac{E[XY]}{EY^2}.$$

Αυτό σημαίνει ότι $E(X - \theta^* Y)^2 = 0$ και επομένως $X = \theta^* Y$. ∎

Θεώρημα 2.2 (Η ανισότητα του Jensen)**.** *Έστω X τυχαία μεταβλητή και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή πραγματική συνάρτηση. Τότε έχουμε πάντα*

$$f(EX) \leq Ef(X). \tag{2.4}$$



Σχήμα 2.2: Ανισότητα του Jensen.

Απόδειξη Εφ όσον η f είναι κυρτή, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$f(x) \geq f(x_0) + \alpha(x - x_0) \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

όπως φαίνεται και στο σχήμα 2.2. Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση με $x_0 = EX_0$ έχουμε

$$f(X) \geq f(EX) + \alpha(X - EX).$$

Παίρνοντας μέσες τιμές στην τελευταία αυτή ανισότητα προκύπτει η (2.4). ∎

2.2 Παράμετροι θέσης και κλίμακας

Θεώρημα 2.3. *Έστω X και Y τυχαίες μεταβλητές με συναρτήσεις κατανομής F και G αντίστοιχα. Αν*

$$Y = \mu + \sigma X$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ τότε

$$G(x) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \tag{2.5}$$

Αν επιπλέον η κατανομή F είναι συνεχής με πυκνότητα πιθανότητας f τότε και η κατανομή G είναι συνεχής με πυκνότητα πιθανότητας

$$g(x) = \frac{1}{\sigma} f\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right). \tag{2.6}$$

Απόδειξη Πράγματι

$$G(x) = P(Y \leq x) = P\left(\mu + \sigma X \leq x\right) = P\left(X \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Παραγωγίζοντας την (2.5) ως προς x παίρνουμε την (2.6). ∎

Αν η συνάρτηση κατανομής μιας τ.μ. X μπορεί να γραφτεί υπό την μορφή

$$F(x) = G\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

όπου $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, και G είναι κάποια άλλη συνάρτηση τότε το μ ονομάζεται παράμετρος θέσης και το σ παράμετρος κλίμακας. Η συνάρτηση G είναι τότε $G(x) = F(\mu + \sigma x)$ και κατά συνέπεια είναι επίσης μια συνάρτηση κατανομής.

2.3 Η εκθετική κατανομή

Η εκθετική τ.μ. έχει κατανομή $P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}$, και πυκνότητα πιθανότητας $\lambda e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$. Οι ροπές της κατανομής δίδονται από την σχέση

$$EX^n = \int_0^\infty x^n \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^n} \int_0^\infty \lambda \frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x} dx = \frac{n!}{\lambda^n}$$

Συγκεκριμένα, η μέση τιμή της εκθετικής είναι $EX = \frac{1}{\lambda}$, η δεύτερη ροπή είναι $EX^2 = \frac{2}{\lambda^2}$, και η διασπορά δίδεται από την σχέση $\mathsf{Var}(X) = EX^2 - (EX)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$.

Ο *συντελεστής μεταβλητότητας* μιας κατανομής ορίζεται ως

$$c_v = \frac{\sqrt{Var(X)}}{EX}$$

Για την εκθετική κατανομή έχουμε $c_v = 1$. Μια από τις σημαντικότερες ιδιότητες της εκθετικής κατανομής, η οποία και την χαρακτηρίζει, είναι η αμνήμων ιδιότητα (ή ιδιότητα έλλειψης μνήμης):

Μια μή αρνητική τ.μ. X έχει την αμνήμονα ιδιότητα αν, $\forall s, t > 0$,

$$P(X > t + s | X > t) = P(X > s). \tag{2.7}$$

Είναι στοιχειώδες να ελέγξουμε ότι η έκθετική κατανομή ικανοποιεί την (2.7). Πράγματι,

$$\begin{aligned} P(X > t + s | X > t) &= \frac{P(X > t+s, X > t)}{P(X > t)} = \frac{P(X > t+s)}{P(X > t)} = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s} \\ &= P(X > s). \end{aligned}$$

Πολύ πιό ενδιαφέρον όμως είναι το γεγονός ότι η εκθετική κατανομή είναι η μοναδική η οποία έχει αυτή την ιδιότητα. Έστω λοιπόν κάποια τ.μ. X που ικανοποιεί την (2.7) και ας θέσουμε $g(t) = P(X > t)$. Οπως είδαμε, η (2.7) μπορεί να γραφτεί και ως $P(X > t + s) = P(X > t)P(X > s)$ ή

$$g(t + s) = g(t)g(s). \tag{2.8}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση με $s = t = 1$ έχουμε $g(2) = g(1)^2$ και επαγωγικά,

$$g(n) = g(1)^n.$$

Όμοια, $g(1) = g(\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}) = g(\frac{1}{n})^n$ ή

$$g(1/n) = g(1)^{1/n}.$$

Από τις δύο παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι, για κάθε ρητό, έστω $r = p/q$

$$g(p/q) = g(1)^{p/q}$$

ή $g(r) = g(1)^r$. Απομένει να δείξουμε ότι η σχέση αυτή ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό t. Αφού $0 < g(1) < 1$, υπάρχει $\lambda \in (0, \infty)$ τέτοιο ώστε $g(1) = e^{-\lambda}$, Συνεπώς, αν r, s είναι ρητοί τέτοιοι ώστε $r < t < s$, εφόσον η $g(t)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση ισχύει ότι

$$e^{-\lambda r} = g(r) \geq g(t) \geq g(s) = e^{-\lambda s}$$

Αφήνοντας $r \uparrow t$, $s \downarrow t$ προκύπτει το ζητούμενο.

2.4 Οι συναρτήσεις Γάμμα και Βήτα

Η συνάρτηση Γάμμα του Euler αποτελεί γενίκευση του παραγοντικού για μή ακέραια ορίσματα. Είναι εύκολο να αποδείξει κανείς με παραγοντική ολοκλήρωση ότι, για κάθε ακέραιο $n \geq 0$,

$$\int_0^\infty t^n e^{-t} dt = n!$$

Η συνάρτηση Γ ορίζεται ως

$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \qquad x > 0.$$

Από τα παραπάνω είναι προφανές ότι

$$\Gamma(n+1) = n!$$

Εμείς θα συναντήσουμε την συνάρτηση Γ στα πλαίσια της κατανομής Γάμμα που έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\lambda x}, \qquad x > 0.$$

Η παράμετρος λ ονομάζεται παράμετρος κλίμακος ενώ η α παράμετρος σχήματος. Η περίπτωση που η παράμετρος σχήματος είναι ακέραιος αριθμός έχει ιδιαίτερο ενδιαφέρον και θα την εξετάσουμε λεπτομερέστερα στη συνέχεια.

Μια άλλη συναφής συνάρτηση είναι η

$$B(\alpha, \beta) := \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1} dt, \qquad \alpha > 0,\ \beta > 0,$$

η οποία συνδέεται με την Γ μέσω της σχέσης

$$B(\alpha, \beta) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}. \tag{2.9}$$

2.5 Η κατανομή Erlang

Η κατανομή Erlang είναι μια ειδική περίπτωση της κατανομής Γάμμα όταν η παράμετρος σχήματος είναι ακέραια. Η πυκνότητα πιθανότητας της Erlang δίδεται από τον τύπο

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Η παράμετρος k είναι θετικός ακέραιος (όταν $k = 1$ παίρνουμε την εκθετική κατανομή) και η $\lambda > 0$ είναι παράμετρος κλίμακας. Η αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής που προκύπτει ολοκληρώνοντας την $f(x)$ δίδεται από τον τύπο

$$F(x) = \begin{cases} 1 - \sum_{m=0}^{k-1} \frac{(\lambda x)^m}{m!} e^{-\lambda x} & \text{αν } x \geq 0 \\ 0 & \text{αν } x < 0 \end{cases}.$$

Παραδείγματος χάριν, όταν $k = 2$, έχουμε $F(x) = 1 - (1 + \lambda x)e^{-\lambda x}$, $(x \geq 0)$.

Έστω X τ.μ. με κατανομή Erlang(k, λ). Η ροπή τάξης r θα είναι

$$EX^r = \int_0^\infty x^r \frac{(\lambda x)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda x} \lambda dx = \frac{1}{(k-1)!\lambda^r} \int_0^\infty y^{r+k-1} e^{-y} dy = \frac{1}{\lambda^r} \frac{(k+r-1)!}{(k-1)!}.$$

Οι δύο πρώτες ροπές της Erlang(k, λ) είναι $EX = \frac{k}{\lambda}$ και $EX^2 = \frac{k(k+1)}{\lambda^2}$, και συνεπώς η διασπορά είναι $Var(X) = \frac{k(k+1)}{\lambda^2} - \frac{k^2}{\lambda^2} = \frac{k}{\lambda^2}$. Ο συντελεστής διακύμανσης που προκύπτει είναι

$$c_V = \frac{\sqrt{k/\lambda^2}}{k/\lambda} = \frac{1}{\sqrt{(k)}} \leq 1.$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η Erlang έχει πάντα συντελεστή μεταβλητότητας μικρότερο της μονάδας (η ισότητα ισχύει όταν $k = 1$ οπότε παίρνουμε την εκθετική). Όσο μεγαλύτερη είναι η παράμετρος k τόσο μικρότερος γίνεται ο συντελεστής μεταβλητότητας.

2.6 Η υπερεκθετική κατανομή

Η υπερεκθετική είναι μείγμα εκθετικών κατανομών με διαφορετικούς ρυθμούς. Έστω $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_N$ και πιθανότητες p_i, $i = 1, 2, \ldots, N$, έτσι ώστε $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. Η συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = 1 - \sum_{i=1}^N p_i e^{-\lambda_i x}, \qquad (x \geq 0)$$

ονομάζεται υπερεκθετική και έχει πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \sum_{i=1}^N p_i \lambda_i e^{-\lambda_i x}, \qquad (x \geq 0)$$

Οι ροπές της κατανομής αυτής υπολογίζονται εύκολα ως εξής:

$$\int_0^\infty x^r f(x)dx = \sum_{i=1}^N p_i \int_0^\infty x^r \lambda_i e^{-\lambda_i x} dx = \sum_{i=1}^N p_i \frac{r!}{\lambda_i^r},$$

όπου στο τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιήσαμε την έκφραση για τις ροπές της εκθετικής κατανομής. Θέτωντας $r = 1$ στην παραπάνω έκφραση βρίσκουμε τον μέσο της υπεργεωμετρικής ως

$$\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\lambda_i}$$

ενώ για $r = 2$ παίρνουμε την δεύτερη ροπή

$$\sum_{i=1}^N p_i \frac{2}{\lambda_i^2}.$$

Η διασπορά δίδεται από την σχέση

$$\mathrm{Var} = \sum_{i=1}^N p_i \frac{2}{\lambda_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\lambda_i} \right)^2$$

και ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι

$$c_V = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N p_i \frac{2}{\lambda_i^2} - \left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2}}{\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\lambda_i}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N p_i \frac{2}{\lambda_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2} - 1}.$$

Η υπερεκθετική κατανομή έχει την ενδιαφέρουσα ιδιότητα ότι ο συντελεστής μεταβλητότητας είναι πάντα ≥ 1. Προκειμένου να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό αρκεί να δείξουμε ότι $c_V^2 \geq 1$ ή ότι

$$\frac{\sum_{i=1}^N p_i \frac{2}{\lambda_i^2}}{\left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\lambda_i}\right)^2} - 1 \geq 1$$

ή, ισοδύναμα, ότι

$$\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\lambda_i^2} \geq \left(\sum_{i=1}^N p_i \frac{1}{\lambda_i} \right)^2.$$

Η τελευταία αυτή ανισότητα όμως είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει πάντα. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια τυχαία μεταβλητή Y που παίρνει τις τιμές λ_i με πιθανότητες p_i, $i = 1, 2, \ldots, N$. (Η Y είναι με άλλα λόγια μια διακρική τ.μ. που παίρνει μόνο N διαφορετικές τιμές). Τότε το αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας θα είναι η δεύτερη ροπή, EY^2, ενώ το δεξιό μέλος, η πρώτη ροπή στο τετράγωνο, $(EY)^2$. Εχουμε όμως πάντα, $EY^2 \geq (EY)^2$, συνεπώς η ανισότητα πρέπει να ισχύει.

2.7 Ροπογεννήτριες συναρτήσεις και μετασχηματισμοί Laplace

Έστω X τ.μ. με συνάρτηση κατανομής F. Η ροπογεννήτρια της X ορίζεται ως η συνάρτηση

$$M_X(\theta) := E[e^{\theta X}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF(x). \tag{2.10}$$

Ακολουθούν παραδείγματα ροπογεννητριών:

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας κανονικής τ.μ. Έστω X κανονική τ.μ. με μέση τιμή 0 και διασπορά 1. Η ροπογεννήτρια της X ορίζεται ως

$$M_X(t) := Ee^{tX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - \frac{x^2}{2}} dx.$$

Ο εκθέτης μέσα στο ολοκλήρωμα γράφεται ως $-\frac{1}{2}\left(x^2 - 2tx + t^2\right) - \frac{t^2}{2}$ και επομένως έχουμε

$$M_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x-t)^2} dx = e^{-\frac{t^2}{2}}$$

αφού το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με την μονάδα.

Τώρα ας υποθέσουμε ότι η Y είναι κανονική τ.μ. με μέση τιμή μ και διασπορά σ. Τότε έχουμε $Y = \mu + \sigma X$ και επομένως η ροπογεννήτρια σ' αυτή την περίπτωση είναι

$$M_Y(t) = Ee^{tY} = Ee^{t\mu + t\sigma X} = e^{t\mu} M_X(\sigma t) = e^{\mu t - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}.$$

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας εκθετικής τ.μ. Έστω X εκθετική τ.μ. με συνάρτηση κατανομής $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ για $x \geq 0$, και $F(x) = 0$ όταν $x < 0$. Η ροπογεννήτριά της δίνεται από την σχέση

$$M_X(\theta) = \int_0^{\infty} e^{\theta x} \lambda e^{-x\lambda} dx = \lambda \int_0^{\infty} e^{-x(\lambda - \theta)} dx = \frac{\lambda}{\lambda - \theta}.$$

Παρατηρείστε ότι ο παραπάνω υπολογισμός έχει νόημα μόνον όταν $\theta < \lambda$. Αν το θ είναι μεγαλύτερο του λ το ολοκλήρωμα απειρίζεται και η ροπογεννήτρια δεν ορίζεται.

Η ροπογεννήτρια συνάρτηση μιας ομοιόμορφης τ.μ. Ας υποθέσουμε τώρα ότι η X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στο διάστημα $[0, a]$ με πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = \frac{1}{a}$ όταν $x \in [0, a]$ και 0 αλλού, και συνάρτηση κατανομής

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x/a & 0 < x \leq a \\ 1 & a < x \end{cases}.$$

Η αντίστοιχη ροπογεννήτρια δίδεται από τη σχέση

$$M_X(\theta) = \int_0^a e^{\theta x} \frac{1}{a} dx = \frac{e^{\theta a} - 1}{\theta a}.$$

Η ροπογεννήτριες συναρτήσεις παίρνουν το όνομά τους από το την ακόλουθη ιδιότητα: Παραγωγίζοντας την ροπογεννήτρια n φορές έχουμε

$$\frac{d^n}{d\theta^n}M_X(\theta) = \frac{d^n}{d\theta^n}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\theta x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d^n}{d\theta^n} e^{\theta x} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n e^{\theta x} dF(x),$$

(Στην παραπάνω εξίσωση υποθέσαμε ότι η εναλλαγή ολοκλήρωσης και παραγώγισης είναι θεμιτή. Δεν θα επεκταθούμε σ′ αυτό το ζήτημα.) Θέτοντας στην παραπάνω εξίσωση $\theta = 0$, και συμβολίζοντας με $M_X^{(n)}(\theta)$ την n-οστή παράγωγο της M_X έχουμε

$$M_X^{(n)}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x^n dF(x) = \mu_n$$

δηλαδή παρατηρούμε ότι η n-οστή παράγωγος της ροπογεννήτριας υπολογισμένη στο 0 συμπίπτει με την n-οστή ροπή της κατανομής. Συνεπώς γνώση της ροπογεννήτριας συνεπάγεται γνώση όλων των ροπών της κατανομής. Ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι οι ροπές προσδιορίζουν την ροπογεννήτρια: Πράγματι, από το θεώρημα του Taylor γνωρίζουμε ότι κάθε συνάρτηση που είναι αναλυτική σε μια περιοχή του μηδενός μπορεί να εκφραστεί ως μια δυναμοσειρά:

$$M_X(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!} M_X^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{n!}\mu_n.$$

Συχνά, στην θεωρία πιθανοτήτων χρησιμοποιείται και η έννοια του μετασχηματισμού Laplace που δεν διαφέρει ουσιαστικά σε τίποτε από την ροπογεννέτρια συνάρτηση. Ο μετασχηματισμός Laplace της τ.μ. X με συνάρτηση κατανομής F ορίζεται ως

$$\widehat{F}(s) := Ee^{-sX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-sx} dF(x).$$

Παρατηρείστε ότι $\widehat{F}(s) = M_X(-s)$.

2.8 Συνέλιξη κατανομών

2.8.1 Συνέλιξη 2 κατανομών

Έστω δύο τυχαίες μεταβλητές, X, Y, ανεξάρτητες μεταξύ τους, με συνάρτηση κατανομής $F(x) = P(X \le x)$ και $G(x) = P(Y \le x)$ αντίστοιχα. Έστω $Z = X + Y$ με συνάρτηση κατανομής $H(x) = P(Z \le x)$.

Από τον νόμο ολικής πιθανότητας έχουμε

$$\begin{aligned} P(X+Y \le x) &= H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} P(X+Y \le x | Y = y) G(dy) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X \le x - y | Y = y) G(dy). \end{aligned}$$

Δεδομένης της ανεξαρτησίας των X και Y , $P(X \leq x-y|Y=y) = P(X \leq x-y) = F(x-y)$ και συνεπώς

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)G(dy). \tag{2.11}$$

Το ανωτέρω ολοκλήρωμα που εκφράζει την κατανομή του αθροίσματος H, δύο ανεξάρτητων τ.μ. συναρτήσει των κατανομών τους, F και G, ονομάζεται *συνέλιξη* των δύο κατανομών. Συμβολικά γράφουμε $H = F * G$ και

$$H(x) = F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)dG(y).$$

Λόγω της συμμετρίας των ρόλων των τ.μ. X και Y, είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι $F * G(x) = G * F(x)$ ή ισοδύναμα,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)dG(y) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-y)dF(y).$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές X και Y παίρνουν μόνο θετικές τιμές, δηλαδή $F(0) = 0$, $G(0) = 0$, τότε

$$H(x) = \int_{0}^{x} F(x-y)G(dy). \tag{2.12}$$

Επίσης, αν οι κατανομές F, G, είναι απολύτως συνεχείς, δηλαδή αν $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = g(x)$, και $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)dy$, $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(u)du$, τότε, παραγωγίζοντας την εξίσωση (2.11) έχουμε

$$\begin{aligned} h(x) \;&:=\; \frac{d}{dx}H(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{\infty} F(x-y)g(y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dx}F(x-y)g(y)dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)dy. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές παίρνουν μόνο θετικές τιμές, δηλαδή $f(x) = g(x) = 0$ για $x < 0$, τότε ο παραπάνω τύπος παίρνει την μορφή

$$h(x) = \int_{0}^{x} f(x-y)g(y)dy. \tag{2.14}$$

Παράδειγμα 2.2. Έστω X, Y, ανεξάρτητες εκθετικές κατανομές με ρυθμούς λ και μ αντίστοιχα. Να ευρεθεί η κατανομή της $Z = X + Y$. Εφαρμόζοντας την σχέση (2.14) $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $g(x) = \mu e^{-\mu x}$ για $x \geq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(x-y)} \mu e^{-\mu y} dy = \lambda\mu e^{-\lambda x} \int_{0}^{x} e^{y(\lambda-\mu)} dy \\ &= \lambda\mu e^{-\lambda x} \frac{1}{\lambda-\mu}\left(e^{x(\lambda-\mu)} - 1\right) = \frac{\lambda\mu}{\lambda-\mu}\left(e^{-\mu x} - e^{-\lambda x}\right). \end{aligned}$$

(Ο ανωτέρω τύπος για την πυκνότητα πιθανότητας $h(x)$ έχει νόημα βεβαίως όταν $\lambda \neq \mu$. Στην περίπτωση που $\lambda = \mu$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα του de l'Hôpital (εμείς όμως, λόγω της σημασίας της, θα την εξετάσουμε ξεχωριστά). Η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος προκύπτει εύκολα από την πυκνότητα πιθανότητας ολοκληρώνοντας:

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x h(y)dy = \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\int_0^x \mu e^{-\mu y}dy \;-\; \frac{\mu}{\lambda-\mu}\int_0^x \lambda e^{-\lambda y}dy \\ &= \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\left(1-e^{-\mu x}\right) \;-\; \frac{\mu}{\lambda-\mu}\left(1-e^{-\lambda x}\right) \\ &= 1-\frac{\lambda}{\lambda-\mu}e^{-\mu x}-\frac{\mu}{\mu-\lambda}e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Στην περίπτωση που $\lambda = \mu$ η εξίσωση (2.14) δίνει

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \lambda e^{-\lambda(x-y)}\lambda e^{-\lambda y}dy = \lambda^2 e^{-\lambda x}\int_0^x dy \\ &= \lambda^2 x e^{-\lambda x}. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 2.3. Έστω X, Y, ανεξάρτητες τ.μ. με πυκνότητες πιθανότητας $f(x) = \lambda\frac{(\lambda x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda x}$ και $g(x) = \lambda\frac{(\lambda x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\beta x}$, $(x \geq 0)$. Η πυκνότητα πιθανότητας του αθροίσματος δίνεται τότε από την σχέση

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^x \lambda\frac{(\lambda(x-y))^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}e^{-\lambda(x-y)}\lambda\frac{(\lambda y)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}e^{-\lambda y}dy \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-\lambda x}\int_0^x (x-y)^{\alpha-1}y^{\beta-1}dy \\ &= \frac{\lambda^{\alpha+\beta}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}e^{-\lambda x}x^{\alpha+\beta-1}\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\alpha-1}dt \end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο ολοκλήρωμα $t = y/x$. Η τιμή αυτού του ολοκληρώματος είναι $B(\beta,\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ σύμφωνα με την σχέση (2.9) και συνεπώς

$$h(x) = \lambda^{\alpha+\beta}x^{\alpha+\beta-1}\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{-\lambda x} = \lambda\frac{(\lambda x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}e^{-\lambda x}.$$

2.8.2 Συνέλιξη n κατανομών

Ο παραπάνω ορισμός της συνέλιξης γενικεύεται άμεσα για n κατανομές. Έστω $X_1, X_2, \ldots, X_n$ n ανεξάρτητες τ.μ. με κατανομές F_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Έστω $S_i = X_1 + \cdots + X_i$ και $H_i(x) := P(S_i \leq x)$ η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος των i πρώτων τ.μ. Τότε, με βάση την ανάλυση της προηγουμένης παραγράφου, έχουμε

$$H_i(x) = F_i * H_{i-1}(x)$$

και συνεπώς

$$P(S_n \leq x) = H_n(x) = F_n * F_{n-1} * F_{n-2} * \cdots * F_1(x).$$

Στην περίπτωση που οι X_i είναι ισόνομες, δηλαδή $F_i = F$ για όλα τα i, θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$H_n(x) = P(S_n \le x) = F * F * \cdots * F(x) =: F^{*n}(x).$$

Για την πυκνότητα πιθανότητας της H_n, αν υπάρχει, ισχύει ο αντίστοιχος τύπος

$$h_n(x) = H_n'(x) = f * f * \cdots * f(x) =: f^{*n}(x).$$

Παράδειγμα 2.4. Έστω X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ανεξάρτητες ισόνομες τ.μ. με κατανομή $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $(x \ge 0)$. Θέλουμε να προσδιορίσουμε την κατανομή του αθροίσματος $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. Συμβολίζοντας με $h_n(x)$ την πυκνότητα πιθανότητας του αθροίσματος S_n θα αποδείξουμε επαγωγικά ότι

$$h_n(x) = \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x}, \qquad (x \ge 0), \;\; n = 1, 2, \ldots$$

Η σχέση ισχύει για $n = 1$. Έστω ότι ισχύει για $n - 1$. Τότε

$$\begin{aligned} h_n(x) &= h_{n-1} * f(x) = \int_0^x f(x-y) h_{n-1}(y) dy = \lambda^2 \int_0^x e^{-\lambda(x-y)} \frac{(\lambda y)^{n-2}}{(n-2)!} e^{-\lambda y} dy \\ &= \lambda \frac{(\lambda x)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

όπου στον παραπάνω υπολογισμό χρησιμοποιήσαμε το αποτέλεσμα του παραδείγματος 2 της προηγουμένης παραγράφου με $\alpha = 1$, $\beta = n - 1$.

Η συνάρτηση κατανομής του αθροίσματος προκύπτει από την ολοκλήρωση της πυκνότητας πιθανότητας ως

$$H_n(x) = \int_0^x h_n(y) dy = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda x)^k}{k!} e^{-\lambda x}.$$

2.9 Μετασχηματισμοί Laplace και ανάλυση σε μερικά κλάσματα

Έστω X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ ανεξάρτητες εκθετικές τυχαίες μεταβλητές με $P(X_i \le x) = 1 - \exp(-\lambda_i x)$. Υποθέτουμε για ευκολία ότι $\lambda_i \ne \lambda_j$ όταν $i \ne j$. Να ευρεθεί η κατανομή της $S = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$.

Ξεκινάμε με τον μετασχηματισμό Laplace της S ο οποίος, ως γνωστόν, θα δίνεται από το γινόμενο των μετασχηματισμών Laplace των X_i:

$$Ee^{-sS} = \prod_{i=1}^n Ee^{-sX_i} = \prod_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s} \,.$$

Ανάλυση σε μερικά κλάσματα του τελευταίου μέλους της πιο πάνω εξίσωσης δίνει

$$Ee^{-sS} = \sum_{i=1}^n A_i \frac{\lambda_i}{\lambda_i + s}$$

όπου τα A_i δίνονται από τις σχέσεις

$$A_i = \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \ .$$

Συνεπώς, η πυκνότητα πιθανότητας δίνεται από την

$$P(Y \in dx) = dx \sum_{i=1}^{n} \prod_{j \neq i} \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda_i} \lambda_i e^{-\lambda_i x} \ .$$

2.10 Το μέγιστο n ανεξάρτητων, εκθετικά κατανεμημένων τ.μ.

Θα υπολογίσουμε την κατανομή του maximum n ανεξάρτητων, εκθετικά κατανεμημένων τ.μ. με ρυθμό λ. Έστω X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ α.ι.τ.μ. με κοινή κατανομή $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $x \geq 0$ και $M_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$. Η κατανομή της M_n μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση

$$\begin{aligned} P(M_n \leq x) &= P(\max(X_1, X_2, \ldots, X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x, X_2 \leq x, \ldots, X_n \leq x) \\ &= \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq x) = \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n \end{aligned}$$

ενώ η μέση της τιμή μπορεί να εκφραστεί σαν

$$EM_n = \int_0^\infty P(M_n > x) dx = \int_0^\infty \left(1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right)^n\right) dx.$$

Αντί να υπολογίσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα θα χρησιμοποιήσουμε το εξής επιχείρημα: Έστω $X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}$ οι τιμές των X_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ διατεταγμένες κατ΄ αύξουσα σειρά και $Y_1 = X_{(1)}$, $Y_{(2)} = X_{(2)} - X_{(1)}, \ldots Y_{(i)} = X_{(i)} - X_{(i-1)}$. Τότε το $Y_{(1)}$ είναι εκθετικά κατανεμημένο με ρυθμό $n\lambda$ και γενικά $Y_{(i)}$ είναι εκθετικά κατανεμημένο με ρυθμό $(n - i + 1)\lambda$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Επιπλέον τα $\{Y_{(i)}\}$ είναι ανεξάρτητα. Τέλος, ισχύει ότι

$$M_n = X_{(n)} = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

και έτσι

$$EM_n = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \ .$$

Επομένως, για μεγάλες τιμές του n, $EM_n \approx \frac{1}{\lambda} \log n$. Η διασπορά του M_n μπορεί επίσης να υπολογισθεί (λόγω της ανεξαρτησίας των Y_i) ως

$$\mathrm{Var}(M_n) = \frac{1}{\lambda^2} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$$

(και για μεγάλες τιμές του n, $\mathrm{Var} M_n \approx \frac{1}{\lambda^2}\frac{\pi^2}{6}$) και ο μετασχηματισμός Laplace είναι

$$Ee^{-sM_n} = \prod_{i=1}^{n} \frac{i\lambda}{s+i\lambda} \ .$$

Αναλύοντας σε μερικά κλάσματα παίρνουμε

$$\begin{aligned} Ee^{-sM_n} &= \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j\neq i} \frac{j}{j-i} \right) \frac{i\lambda}{i\lambda+s} = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j=1}^{i-1} \frac{j}{j-i} \right) \left(\prod_{j=i+1}^{n} \frac{j}{j-i} \right) \frac{i\lambda}{i\lambda+s} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{i} (-1)^{i-1} \frac{1}{(i-1)!(n-i)!} \frac{i\lambda}{i\lambda+s} \\ &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \binom{n}{i} \frac{i\lambda}{i\lambda+s} \ . \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 3

Ο Απλός Τυχαίος Περίπατος

3.1 Εισαγωγή

Η τυχαία μεταβλητή Bernoulli είναι μία τυχαία μεταβλητή που παίρνει μόνο δύο τιμές, 1, με πιθανότητα p και 0 με πιθανότητα $q = 1 - p$, όπου το $p \in [0, 1]$. Αυτές οι τυχαίες μεταβλητές είναι, όπως αντιλαμβάνεται κανείς, οι απλούστερες δυνατές και θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι η μελέτη τους δεν παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον. Όπως θα δούμε όμως, αποτελούν τους δομικούς λίθους για την κατασκευή πολύπλοκων στοχαστικών μοντέλων τα οποία έχουν μεγάλη σημασία τόσο στην ανάπτυξη της θεωρίας των στοχαστικών ανελίξεων, όσο και στις πολυάριθμες εφαρμογές της. Έστω λοιπόν $\{\xi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, όλες με την ίδια κατανομή (δηλαδή την ίδια τιμή του p) και ανεξάρτητες μεταξύ τους. Υπενθυμίζουμε στον αναγνώστη ότι η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής Bernoulli υπολογίζεται από την σχέση

$$E\xi = 0\,P(\xi = 0) + 1\,P(\xi = 1) = p.$$

Παρομοίως, η ροπή τάξης r είναι

$$E\xi^r = 0^r\,P(\xi = 0) + 1^r\,P(\xi = 1) = p.$$

Η διασπορά δίνεται από τη σχέση

$$\mathsf{Var}(\xi) = E\,(\xi - E\xi)^2 = E\xi^2 - (E\xi)^2 = p(1 - p).$$

Ας εξετάσουμε το μερικό άθροισμα

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} \xi_i.$$

Η κατανομή αυτής της τυχαίας μεταβλητής είναι διωνυμική με παραμέτρους n και p. Η μέση τιμή μπορεί να υπολογισθεί κατ΄ ευθείαν από τον τύπο της διωνυμικής κατανομής ή, βάσει του θεωρήματος 1.1, ως εξής

$$ES_n = E\sum_{i=1}^{n} \xi_i = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Παρόμοια, από το θεώρημα 1.3 και την ανεξαρτησία των ξ_i, η διασπορά της S_n υπολογίζεται ως

$$\mathsf{Var}(S_n) = \mathsf{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathsf{Var}(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} p(1-p) = np(1-p).$$

3.2 Τυχαίος περίπατος

Ας διευρύνουμε λίγο τον ορισμό της τ.μ. Bernoulli ώστε να περιλαμβάνει και τ.μ. που παίρνουν δύο οποιεσδήποτε τιμές και όχι υποχρεωτικά τις τιμές 0 και 1. Έτσι ας υποθέσουμε ότι ξ_i είναι α.ι. (ανεξάρτητες, ισόνομες) τ.μ. που παίρνουν την τιμή 1 με πιθανότητα p και -1 με πιθανότητα $q := 1-p$. Έστω

$$S_n := \sum_{i=1}^{n} \xi_i, \qquad S_0 := 0.$$

Η ανέλιξη αυτή ονομάζεται *απλός τυχαίος περίπατος* και παρά το γεγονός ότι ο ορισμός της είναι εξαιρετικά απλός παρουσιάζει ενδιαφέρουσα συμπεριφορά. Από φυσική άποψη, για να δώσουμε ένα συγκεκριμένο μοντέλο, μπορούμε να φανταστούμε ένα σωματίδιο που κινείται στον οριζόντιο άξονα κατά ακέραια βήματα. Κάθε φορά κάνει ένα βήμα, προς τα δεξιά με πιθανότητα p ή προς τα αριστερά με πιθανότητα q. S_n είναι η απόσταση του σωματιδίου από το μηδέν μετά από n τέτοια βήματα. Συχνά θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την εικόνα του παίκτη που παίζει μια σειρά από παιχνίδια, στο καθένα από τα οποία κερδίζει ένα ευρώ με πιθανότητα p η χάνει ένα ευρώ με πιθανότητα q.

- Η μέση τιμή της περιουσίας του παίκτη τη χρονική στιγμή n είναι $E\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n} E\xi_i = \sum_{i=1}^{n} p-q = n(p-q)$.
- Η διασπορά της περιουσίας του παίκτη είναι τη χρονική στιγμή n είναι $\mathsf{Var}\sum_{i=1}^{n}\xi_i = \sum_{i=1}^{n}\mathsf{Var}(\xi_i) = \sum_{i=1}^{n} 4pq = 4npq$.
- Η κατανομή του S_n, $n = 1, 2, \ldots$, είναι διωνυμική, και για μεγάλα n μπορεί να προσεγγισθεί με ακρίβεια από την αντίστοιχη κανονική κατανομή. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι όταν ο αριθμός των βημάτων, n, είναι άρτιος αριθμός, τότε και η θέση του σωματιδίου, S_{2n}, είναι άρτιος αριθμός. Αντίστοιχα, όταν το n είναι περιττός, και το S_n είναι περιττός αριθμός. Για να συμβεί το ενδεχόμενο $\{S_{2n} = 2k\}$ θα πρέπει, αν u είναι ο αριθμός των $+1$ και d ο αριθμός των -1 να έχουμε $u+d = 2n$ και $u-d = 2k$ απ΄ όπου προκύπτει ότι $u = n+k$ και $d = n-k$. Συνεπώς,

  $$P(S_{2n} = 2k) = \binom{u+d}{u} p^u q^d = \binom{2n}{n+k} p^{n+k} q^{n-k}, \qquad -n \le k \le n.$$

  Παρόμοια, για το ενδεχόμενο $\{S_{2n+1} = 2k+1\}$ θα πρέπει να έχουμε $u+d = 2n+1$ και $u-d = 2k+1$ ή $u = n+k+1$ και $d = n-k$. Συνεπώς,

  $$P(S_{2n+1} = 2k+1) = \binom{u+d}{u} p^u q^d = \binom{2n+1}{n+k+1} p^{n+k+1} q^{n-k}, \qquad -n-1 \le k \le n.$$

3.3 Το πρόβλημα της «καταστροφής του παίκτη»

3.3.1 Η πιθανότητα καταστροφής

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο παίκτης παίζει συνεχώς έως ότου είτε κερδίσει a ευρώ είτε χάσει b. Ισοδύναμα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο παίκτης ξεκινά με αρχική περιουσία b και στοιχηματίζει μία μονάδα κάθε φορά εως ότου είτε να χάσει όλα του τα χρήματα (περιουσία 0), είτε να κερδίσει a επιπλέον (συνολική περιουσία $a+b$). Επομένως, το γενικό πρόβλημα που καλούμεθα να λύσουμε είναι να υπολογίσουμε την πιθανότητα $P(x)$ ένας απλός τυχαίος περίπατος που ξεκινάει από το το σημείο x είτε να καταλήξει στο 0, είτε στο N, όπου $0 \leq x \leq N$. Έχουμε τη βασική σχέση

$$P(x) = pP(x+1) + qP(x-1), \qquad x = 0, 1, 2, \ldots, a+b. \tag{3.1}$$

με τις αρχικές συνθήκες

$$P(0) = 0, \qquad P(N) = 1. \tag{3.2}$$

Η (3.1) είναι μια γραμμική εξίσωση διαφορών δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές. (Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο παράρτημα §3.10 για την μέθοδο λύσης των εξισώσεων αυτών.) Η χαρακτηριστική εξίσωση της (3.1) είναι η $\lambda = p\lambda^2 + q$ η οποία έχει δύο λύσεις, $\lambda_1 = 1$ και $\lambda_2 = q/p$. Αν $p \neq q$ τότε οι ρίζες αυτές είναι διαφορετικές και η γενική λύση της (3.1) είναι

$$P(x) = C_1\lambda_1^x + C_2\lambda_2^x = C_1 + C_2(q/p)^x. \tag{3.3}$$

Οι δύο σταθερές, C_1, C_2, προσριορίζονται από τις οριακές συνθήκες (3.2):

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ C_1 + C_2(q/p)^N &= 1. \end{aligned}$$

Από το σύστημα αυτό προκύπτει ότι

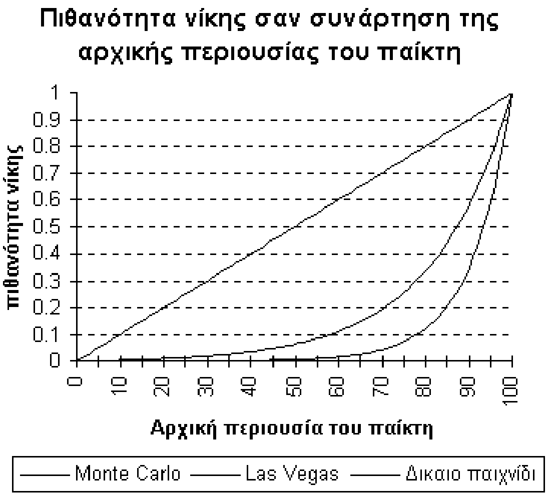
$$C_1 = -C_2 = \left(1 - (q/p)^N\right)^{-1}$$

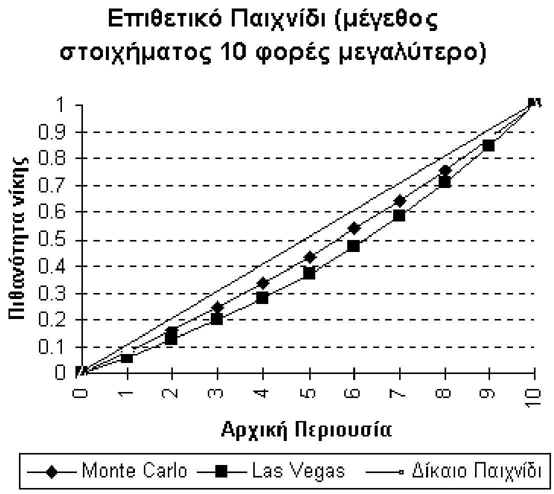
και αντικαθιστώντας στην (3.3), έχουμε

$$P(x) = \frac{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^x}{1 - \left(\frac{q}{p}\right)^N}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, N, \quad p \neq q. \tag{3.4}$$

Η έκφραση για την πιθανότητα επιτυχίας στην περίπτωση που $p = q = 1/2$ μπορεί να βρεθεί εύκολα από την σχέση (3.4), χρησιμοποιόντας τον κανόνα του de l' Hôpital. Αν $x > 0$, θέτοντας $y = q/p$, αρκεί να βρούμε το όριο

$$\lim_{y\to 1} \frac{1 - y^x}{1 - y^N} = \lim_{y\to 1} \frac{-xy^{x-1}}{-(N)y^{N-1}} = \frac{x}{N}.$$





Σχήμα 3.1: Η καταστροφή του παίκτη. Στο αριστερό σχήμα το μέγεθος του στοιχήματος είναι 1000 € Στο δεξιό με μέγεθος στοιχήματος 10000 € οι πιθανότητα επιτυχίας είναι πολύ μεγαλύτερη.

Αν $x = 0$ τότε $P(0) = 0$ λόγω της οριακής συνθήκης. Σε κάθε περίπτωση έχουμε λοιπόν την σχέση

$$P(x) = \frac{x}{N}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots, N, \quad p = q = \frac{1}{2}. \tag{3.5}$$

Σαν εφαρμογή του παραπάνω τύπου ας υποθέσουμε ότι κάποιος παίζει στη ρουλέτα στοιχηματίζοντας κάθε φορά 1000 € στο κόκκινο. Ας υποθέσουμε ότι ο παίκτης ξεκινά με 50000 € και παίζει συνεχώς έως ότου είτε να χάσει όλα του τα χρήματα ή η συνολική του περιουσία να φθάσει τις 100000 € οπότε και φεύγει από το καζίνο έχοντας διπλασιάσει το αρχικό του κεφάλαιο. Στο Monte Carlo η ρουλέτα έχει 37 αριθμούς, 18 μαύρους και 18 κόκκινους και το μηδέν που είναι πράσινο. Συνεπώς η πιθανότητα επιτυχίας σε κάθε παιχνίδι είναι $p = \frac{18}{37} \approx 0.486$. Στο Las Vegas οι πιθανότητες επιτυχίας είναι μικρότερες επειδή υπάρχουν δύο πράσινοι αριθμοί, το 0 και το 00 και επομένως $p = \frac{18}{38} \approx 0.474$. Θα υπέθετε κανείς ότι αυτή η μικρή παρέκκλιση δεν θα επηρέαζε δραματικά το αποτέλεσμα. Βλέπουμε όμως ότι στο Monte Carlo η πιθανότητα να κερδίσει τελικά ο παίκτης είναι της τάξης του 7% ενώ στο Las Vegas είναι αμελητέα! Με επιθετικό παιχνίδι τα πράγματα βελτιώνονται σημαντικά, ενώ, αν δεν υπήρχε πράσινο (δίκαιο παιχνίδι) η πιθανότητα τελικής επιτυχίας θα ήταν φυσικά 50%.

3.3.2 Ο μέσος χρόνος διάρκειας του παιχνιδιού

Έστω $T(x)$ ο μέσος χρόνος μέχρι να τελειώσει το παιχνίδι με αρχική περιουσία x, ασχέτως αν τελειώνει με νίκη ή καταστροφή του παίκτη. Ανάλογα με το αν το πρώτο παιχνίδι είναι νίκη ή ήττα από το x η περιουσία του παίκτη θα μεταπηδήσει στο $x-1$ ή στο $x+1$ ενώ ταυτόχρονα θα έχει παρέλθει μία χρονική μονάδα. Επομένως ισχύει η αναδρομική σχέση

$$T(x) = 1 + pT(x+1) + qT(x-1), \quad x = 1, 2, \ldots, N-1, \quad T(0) = T(N) = 0. \tag{3.6}$$

Η παραπάνω γραμμική εξίσωση διαφορών είναι *μη ομογενής*, δευτέρας τάξεως, με σταθερούς συντελεστές. Η αντίστοιχη ομογενής εξίσωση, $pT(x+1) - T(x) + qT(x-1) = 0$ είναι η ίδια όπως και η εξίσωση για την καταστροφή του παίκτη και έχει γενική λύση $C_1 + C_2(q/p)^x$ όταν $p \neq q$. Μια ειδική λύση της μη ομογενούς εξίσωσης βρίσκεται εύκολα αν δοκιμάσει κανείς μια γραμμική συνάρτηση της μορφής $T(x) = Ax + B$. Θα πρέπει να ισχύει $Ax + B = 1 + p(A(x+1) + B) + q(A(x-1) + B)$ για κάθε x, πράγμα που συμβαίνει αν και μόνο αν $A = 1/(q-p)$, $B = 0$. Επομένως, σύμφωνα με το παράρτημα §3.10, η γενική λύση της εξίσωσης (3.6) είναι

$$T(x) = \frac{x}{q-p} + C_1 + C_2(q/p)^x. \tag{3.7}$$

Από τις οριακές συνθήκες της (3.6) έχουμε

$$\begin{aligned} C_1 + C_2 &= 0 \\ \frac{N}{q-p} + C_1 + C_2(q/p)^N &= 0 \end{aligned}$$

και επομένως

$$C_1 = -C_2 = -\frac{N}{q-p} \frac{1}{1-(q/p)^N}.$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές αυτές στην (3.7) έχουμε

$$T(x) = \frac{x}{q-p} - \frac{N}{q-p} \frac{1-(q/p)^x}{1-(q/p)^N}. \tag{3.8}$$

3.3.3 Η πιθανογεννήτρια του χρόνου διαρκείας του παιχνιδιού

Έστω T_x μια τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τη διάρκεια του παιχνιδιού ξεκινώντας από τη θέση x. Θέλουμε να βρούμε την κατανομή της T_x ή, ισοδύναμα, την πιθανογεννήτριά της, Ez^{T_x}. Είναι σαφές ότι

$$T_x = 1 + \begin{cases} T_{x+1} & \text{αν το πρώτο βήμα είναι προς τα πάνω} \\ T_{x-1} & \text{αν το πρώτο βήμα είναι προς τα κάτω} \end{cases}$$

Ορίζοντας την τ.μ.

$$\xi = \begin{cases} 1 & \text{αν το πρώτο βήμα είναι προς τα πάνω, (συμβαίνει με πιθανότητα } p) \\ 0 & \text{αν το πρώτο βήμα είναι προς τα κάτω, (συμβαίνει με πιθανότητα } q = 1-p) \end{cases}$$

μπορούμε να γράψουμε

$$T_x = 1 + \xi T_{x+1} + (1-\xi) T_{x-1}.$$

Λαμβάνοντας υπ' όψιν μας ότι η ξ είναι ανεξάρτητη από τις T_{x+1}, T_{x-1}, και παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε

$$Ez^{T_x} = z\left(pEz^{T_{x+1}} + qEz^{T_{x-1}}\right),$$

ή, με τον συμβολισμό $\phi_x(z) := Ez^{T_x}$,

$$\phi_x(z) = pz\phi_{x+1}(z) + qz\phi_{x-1}(z)$$

με οριακές συνθήκες $\phi_0(z) = \phi_N = 1$. Εφαρμόζοντας την μεθοδολογία της παραγράφου 3.8.2. βλέπουμε ότι η χαρακτηριστική εξίσωση της αναδρομικής σχέσης είναι η

$$pz\rho^2 - \rho + qz = 0$$

με ρίζες

$$\rho_1 = \frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \frac{1+\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz}$$

Εφ' όσον $pq \leq 1/4$ (με ισότητα όταν $p = q = 1/2$) και $|z| < 1$, $4pqz^2 < 1$ και επομένως όταν η μεταβλητή z είναι πραγματική, οι δύο ρίζες της παραπάνω εξίσωσης είναι πραγματικές και όταν $-1 < z < 1$, $0 < \rho_1 < 1 < \rho_2$. Έτσι,

$$\phi_x(z) = C_1\rho_1^x + C_2\rho_2^x$$

όπου, λόγω των οριακών συνθηκών, οι σταθερές C_1, C_2, προσδιορίζονται από το σύστημα

$$\begin{aligned} 1 &= C_1 + C_2 \\ 1 &= C_1\rho_1^N + C_2\rho_2^N. \end{aligned}$$

Επομένως έχουμε $1 - \rho_2^N = C_1(\rho_1^N - \rho_2^N)$ και

$$C_1 = \frac{1-\rho_2^N}{\rho_1^N - \rho_2^N} \quad \text{και} \quad C_2 = -\frac{1-\rho_1^N}{\rho_1^N - \rho_2^N}.$$

Η πιθανογεννήτρια της διάρκειας του παιχνιδιού δίνεται από την σχέση

$$\phi_x(z) = \frac{1-\rho_2^N}{\rho_1^N - \rho_2^N}\rho_1^x - \frac{1-\rho_1^N}{\rho_1^N - \rho_2^N}\rho_2^x. \tag{3.9}$$

Από την (3.9) μπορεί κανείς (μετά από υπολογισμούς) να βρει μια έκφραση για την πιθανότητα να διαρκέσει το παιχνίδι k βήματα, η ανάλυση είναι όμως περίπλοκη και θα την παραλείψουμε. Θα εξετάσουμε όμως την εξής ειδική περίπτωση που παρουσιάζει ενδιαφέρον:

3.4 Τυχαίος περίπατος με αρνητική τάση

Ονομάζουμε *τάση* (drift) του τυχαίου περιπάτου την μέση τιμή του βήματος:

$$E\xi_1 = p - q.$$

Ας υποθέσουμε ότι $p - q < 0$, δηλαδή ότι ο παίκτης παίζει ένα δυσμενές γι΄ αυτόν παιχνίδι. Ξεκινώντας με αρχικό κεφάλαιο a, υποθέτουμε ότι ο παίκτης δεν θέτει άνω όριο στο ποσό που θέλει να κερδίσει, δηλαδή συνεχίζει να παίζει επ΄ άπειρον, μέχρι να καταστραφεί. Ας ξαναγράψουμε την (3.9) στη μορφή

$$\frac{1-\left(\frac{1}{\rho_2}\right)^N}{1-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^N}\rho_1^a - \frac{\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^N - \left(\frac{1}{\rho_2}\right)^N}{1-\left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^N}\rho_2^a$$

όπου $0 \leq a \leq N$. Η περίπτωση που ο παίκτης δεν θέτει άνω όριο ισοδυναμεί με $N \to \infty$. Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\rho_1 < 1 < \rho_2$, βλέπουμε ότι η πιθανογεννήτρια του χρόνου του παιχνιδιού έχει την μορφή

$$\phi_a(z) = \rho_1^a = \left. \frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz}\right)^a. \tag{3.10}$$

Άσκηση: Υπολογίστε την μέση τιμή της διάρκειας του παιχνιδιού σάυτή την περίπτωση καθώς και την διασπορά του παραγωγίζοντας τον παραπάνω τύπο για την πιθανογεννήτρια.

Για να κατανοήσουμε καλύτερα τις ιδιότητες της κατανομής της οποίας η πιθανογεννήτρια δίδεται από την (3.10) ας θεωρήσουμε αρχικά ότι $a = 1$. Τότε έχουμε

$$\phi_1(z) =: \phi(z) = \frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz}. \tag{3.11}$$

Ας θυμηθούμε ότι, σύμφωνα με το διωνυμικό θεώρημα, όταν $|x| < 1$ ισχύει το ανάπτυγμα σε σειρά $\sqrt{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-x)^n$. Οι ακόλουθοι υπολογισμοί μας δίνουν μια καλύτερη ιδέα για την μορφή των συντελεστών:

$$
\begin{aligned}
\binom{1/2}{0} &= 1 \\
\binom{1/2}{1} &= \frac{1}{2} \\
\binom{1/2}{2} &= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)}{1\cdot 2} = -\frac{1}{8} \\
\binom{1/2}{3} &= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{16} \\
&\vdots \\
\binom{1/2}{n} &= \frac{(\frac{1}{2})(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}{2^n n!} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot(2n-4)\cdot(2n-3)\cdot(2n-2)}{n!2^n 2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n-2)} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!2^n 2^{n-1}} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{(2n)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!(2n-1)\cdot 2n} = (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\frac{(2n)}{(n!)^2}\frac{1}{4^n} \\
&= (-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\frac{1}{4^n}
\end{aligned}
$$

Ο γενικός τύπος που υπολογίσαμε ισχύει για $n = 1, 2, 3, \ldots$. Συνεπώς, οι παραπάνω υπολογισμοί οδηγούν στην σειρά

$$
\begin{aligned}
\sqrt{1-x} &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\binom{1/2}{n}(-x)^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{2n-1}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n \\
&= 1 - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n
\end{aligned}
$$

Έτσι έχουμε

$$
\begin{aligned}
\frac{1-\sqrt{1-4pqz^2}}{2pz} &= (2pz)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}\left(\frac{4pqz^2}{4}\right)^n \\
&= \frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}(pq)^n z^{2n-1}.
\end{aligned}
$$

Η παραπάνω ανάλυση μας δείχνει ότι η κατανομή του χρόνου μετάβασης από το 1 στο 0 δίδεται από τη σχέση

$$
\begin{aligned}
P(T = 2n-1) &= \frac{1}{2p}\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}(pq)^n, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (3.12) \\
P(T = 2n) &= 0, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots
\end{aligned}
$$

Από την κατανομή αυτή μπορούμε να υπολογίσουμε τον μέσο ως

$$ET = \sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)P(T=2n-1) = \frac{1}{2p}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}(pq)^n. \tag{3.13}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η περίπτωση που εξετάζουμε είναι η $p \leq q$. Εξετάζοντας την συνάρτηση $f(p) = p(1-p)$ όταν $p \in [0,1]$ παρατηρούμε ότι παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, 1/4]$ και συγκεκριμένα την μέγιστη τιμή όταν $f'(p) = 1 - 2p = 0$ δηλαδή για $p = 1/2$. Η τιμή του μεγίστου είναι $f(1/2) = 1/4$ και συνεπώς έχουμε $0 \leq pq \leq 1/4$. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι, από τον τύπο του Stirling, ισχύει η ασυμπτωτική σχέση

$$\binom{2n}{n}(pq)^n \sim \frac{(4pq)^n}{\sqrt{\pi n}}$$

και συνεπώς η σειρά στην εξίσωση (3.13) συγκλίνει όταν $0 < p < 1/2$ και αποκλίνει όταν $p = 1/2$. Η τιμή του μέσου χρόνου μετάβασης μπορεί να υπολογισθεί πολύ εύκολα από την ανάλυση πρώτης μετάβασης ως εξής

$$ET = q \cdot 1 + p \cdot (1 + 2ET)$$

που δίνει

$$ET = \frac{1}{q-p}.$$

Η ίδια σχέση προκύπτει και από την (3.13) αλλά βεβαίως με μεγαλύτερο κόπο. Το διωνυμικό θεώρημα μας δίνει την σχέση

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1-x}} &= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1)(-\frac{1}{2}-2)\cdots(-\frac{1}{2}-(n-1))}{n!}(-x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2^n n!}(-x)^n \\
&= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}\left(\frac{x}{4}\right)^n
\end{aligned} \tag{3.14}$$

και συνεπώς, θέτωντας $x = 4y$,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\binom{2n}{n}y^n = \frac{1}{\sqrt{1-y}} - 1.$$

Από την παραπάνω σχέση, συγκρίνοντας με την (3.13) προκύπτει ότι

$$ET = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{\sqrt{1-4pq}} - 1\right) = \frac{1}{2p}\left(\frac{1}{q-p} - 1\right) = \frac{1}{q-p}.$$

3.5 Η αρχή της ανακλάσεως

Θα ξεκινήσουμε εξετάζωντας το ακόλουθο συνδιαστικό πρόβλημα που αναφέρεται στις πραγματοποιήσεις ενός τυχαίου περιπάτου: Μας ενδιαφέρει να προσδιορίσουμε τον αριθμό των δυνατών μονοπατιών (δηλαδή των δυνατών τρόπων να μεταβούμε) από το $(0, a)$ στο (n, b). Το ερώτημα είναι εύκολο. Αν το $b - a$ είναι άρτιο, τότε και το n πρέπει να είναι άρτιο ή διαφορετικά, αν το $b - a$ είναι περιττό τότε και το n πρέπει να είναι περιττό προκειμένου να υπάρχουν μονοπάτια από το $(0, a)$ στο (n, b). Η συνθήκη αυτή μπορεί να εκφραστεί ισοδύναμα ως εξής.

Συνθήκη 3.1. Για να είναι δυνατόν να μεταβεί το σωματίδιο από το $(0, a)$ στο (n, b) θα πρέπει ο $n + a - b$ να είναι άρτιος αριθμός.

Σ′ αυτή την περίπτωση,

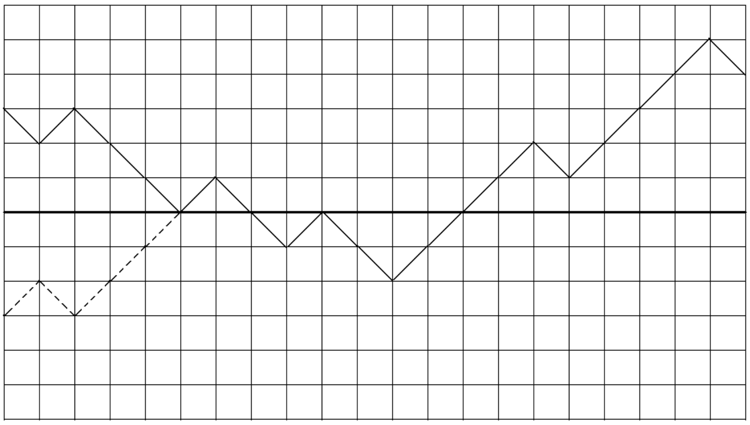
$$\text{αριθμός μονοπατιών από το } (0, a) \text{ στο } (n, b) = \binom{n}{\frac{n+b-a}{2}}. \tag{3.15}$$

Η παραπάνω σχέση προκύπτει από το ακόλουθο επιχείρημα. Ας φανταστούμε μία κάλπη με n σφαιρίδια, u από τα οποία είναι κόκκινα και τα υπόλοιπα d μπλε (όπου φυσικά $n = u + d$). Βγάζουμε τα σφαιρίδια από την κάλπη ένα–ένα, χωρίς επανάθεση, και κάθε φορά που βγαίνει ένα σφαιρίδιο προχωρούμε προς τα δεξιά κατά ένα βήμα και ταυτόχρονα προς τα πάνω, αν το σφαιρίδιο είναι κόκκινο, ή προς τα κάτω, αν το σφαιρίδιο είναι μπλε. Για να πάμε από το $(0, a)$ στο (n, b) θα πρέπει η διαφορά των βημάτων προς τα πάνω μείον τα βήματα προς τα κάτω να είναι $b - a$ και επομένως ο αριθμός των κόκκινων και μπλε σφαιριδίων θα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} u + d &= n, \\ u - d &= b - a. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $u = \frac{n+b-a}{2}$, $d = \frac{n-b+a}{2}$. Οι δύο αυτές ποσότητες είναι ακέραιοι αριθμοί αν η συνθήκη (3.1) ισχύει. Ο αριθμός των διαφορετικών μονοπατιών είναι ίδιος με τον αριθμό των διαφορετικών διατάξεων $n = u + d$ σφαιριδίων u από τα οποία είναι κόκκινα και τα υπόλοιπα d μπλε ο οποίος βεβαίως δίνεται από το δεξί μέλος της (3.15).

Ας υπολογίσουμε τώρα τον αριθμό των μονοπατιών που πηγαίνουν από το $(0, a)$ στο (n, b) *χωρίς να εγγίζουν το μηδέν ή να πέφτουν και κάτω από αυτό.* Ο υπολογισμός αυτός γίνεται με το εξής απλό επιχείρημα: Ας ανακλάσουμε ως προς τον άξονα του χρόνου το αρχικό τμήμα του μονοπατιού από το $(0, a)$ μέχρι το πρώτο σημείο που το μονοπάτι αγγίζει το μήδεν. Για παράδειγμα στο σχήμα από το (0,3) μέχρι το (5,0). Το υπόλοιπο τμήμα του μονοπατιού παραμένει αναλλοίωτο. Έτσι, στο σχήμα έχουμε ένα μονοπάτι από το $(-3, 0)$ στο (21,4). Παρατηρούμε ότι η διαδικασία αυτή είναι αμφιμονοσήμαντη για τα μονοπάτια, δηλαδή ότι σε κάθε μονοπάτι που ξεκινά από το (0,3) και πηγαίνει στο (21,4) *αγγίζοντας το μηδέν ή πέφτοντας κάτω απ′ αυτό* αντιστοιχεί, με τον τρόπο που περιγράψαμε, ένα μονοπάτι που ξεκινά από το $(0, -3)$ και



Σχήμα 3.2: *Η αρχή της ανάκλασης.* Παρατηρείστε ότι για κάθε μονοπάτι που ξεκινάει από το (0,3) και καταλήγει στο (21,4) εγγίζοντας το μηδέν, ή και πέφτοντας κάτω απ΄ αυτό, υπάρχει ένα μοναδικό μονοπάτι που ξεκινά από το $(0,-3)$ και καταλήγει στο (21,4).

πηγαίνει στο (21,4). Αντίστροφα, για κάθε μονοπάτι από το $(0,-3)$ στο (21,4) αντιστοιχεί ένα μονοπάτι από το (0,3) στο (21,4) που αγγίζει το μηδέν ή πέφτει κάτω απ΄ αυτό.

Όπως είδαμε από την παραπάνω συζήτηση, γενικεύοντας, ο αριθμός των μονοπατιών από το $(0,a)$ στο (n,b) που εγγίζει ή πέφτει κάτω από το μηδέν είναι ίσος με τον αριθμό των μονοπατιών από το $(0,-a)$ στο (n,b) που είναι $\binom{n}{\frac{n+b+a}{2}}$ (αφού τώρα η κάλπη περιέχει u κόκκινα και d μπλε σφαιρίδια που ικανοποιούν τις $u+d=n$ και $u-d=b+a$ και συνεπώς $u=\frac{n+b+a}{2}$ και $d=\frac{n-b-a}{2}$). Έτσι

$$\text{αριθμός μονοπατιών από το } (0,a) \text{ στο } (n,b) \text{ που δεν αγγίζουν το μηδέν ή γίνονται αρνητικά} = \binom{n}{\frac{n+b-a}{2}} - \binom{n}{\frac{n+b+a}{2}} \qquad (3.16)$$

3.6 Θεωρήματα Κάλπης

Η ονομασία αυτή (απόδοση στα Ελληνικά του όρου *ballot theorems*) προέρχεται από ένα πρόβλημα της θεωρίας πιθανοτήτων με μεγάλη ιστορία και πολλές εφαρμογές. Στην απλούστερη μορφή του το πρόβλημα έχει ως εξής:

Σε μία ψηφοφορία με δύο υποψηφίους, ο Α παίρνει a ψήφους και ο Β παίρνει b ψήφους, όπου $a>b$. Ποια είναι η πιθανότητα ότι κατά την καταμέτρηση των ψήφων ο Α προηγείται πάντα του Β; Όπως θα δούμε η απάντηση δίνεται από την εξής απλή σχέση

$$P(\text{ Ο Α προηγείται πάντα του Β}) = \frac{a-b}{a+b}. \qquad (3.17)$$

Πράγματι, για να προηγείται πάντα ο Α του Β κατά την καταμέτρηση πρέπει πρώτα απ΄ όλα η πρώτη ψήφος να είναι υπέρ του Α, πράγμα που συμβαίνει με πιθανότητα

$$\frac{a}{a+b}. \tag{3.18}$$

Στη συνέχεια θα πρέπει το μονοπάτι του τυχαίου περιπάτου από το $(1,1)$ στο $(a+b, a-b)$ να μην αγγίξει το μηδέν ή γίνει αρνητικό. Χρησιμοποιώντας την αρχή της ανάκλασης βλέπουμε ότι υπάρχουν συνολικά $\binom{a+b-1}{a-1}$ μονοπάτια από τα οποία μόνο τα $\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{b-1}$ είναι αυστηρά θετικά. Εφ΄ όσον όλα τα μονοπάτια είναι ισοπίθανα, η πιθανότητα να προηγείται ο Α του Β μέχρι το τέλος της καταμέτρησης *δεδομένου ότι πήρε την πρώτη ψήφο* είναι

$$\frac{\binom{a+b-1}{a-1} - \binom{a+b-1}{b-1}}{\binom{a+b-1}{a-1}} = 1 - \frac{\binom{a+b-1}{b-1}}{\binom{a+b-1}{a-1}} = 1 - \frac{b}{a} = \frac{a-b}{a}. \tag{3.19}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (3.18) και (3.19) προκύπτει η (3.17).

3.7 Νόμοι τόξου ημιτόνου

Η κατανομή τόξου ημιτόνου είναι συνεχής κατανομή με πυκνότητα πιθανότητας

$$f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}, \qquad 0 \le x \le 1. \tag{3.20}$$

Δεδομένου ότι

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} = 2\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 2\arcsin y + C$$

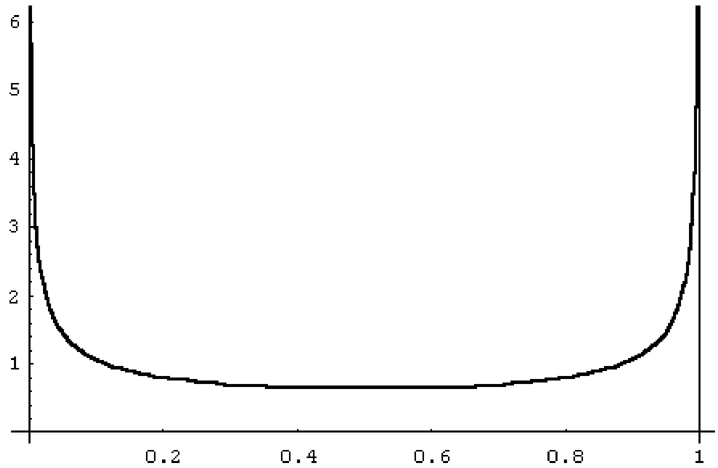
όπου $y = \sqrt{x}$, έχουμε

$$F(x) = \int_0^x \frac{du}{\pi\sqrt{u(1-u)}} = \frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x}, \qquad 0 \le x \le 1.$$

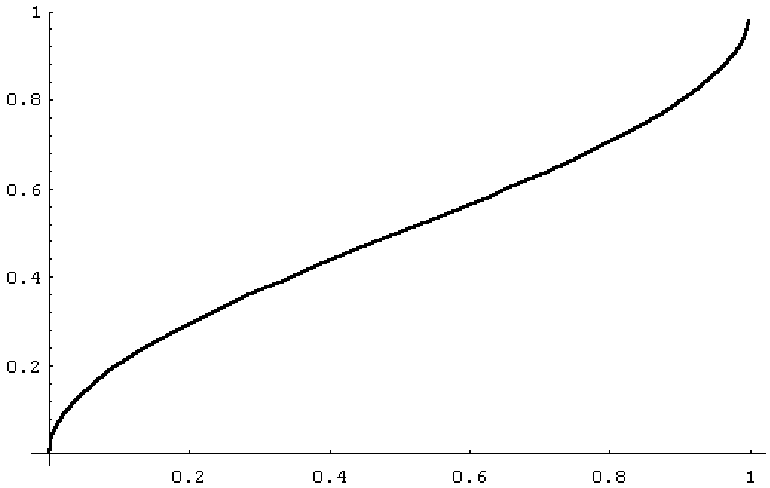
Αυτή η συνάρτηση κατανομής ονομάζεται κατανομή τόξου ημιτόνου.

x	$F(x)$
0.00	0.0000
0.05	0.1436
0.10	0.2048
0.15	0.2532
0.20	0.2952
0.25	0.3333
0.30	0.3690
0.35	0.4030
0.40	0.4359
0.45	0.4681
0.50	0.5000

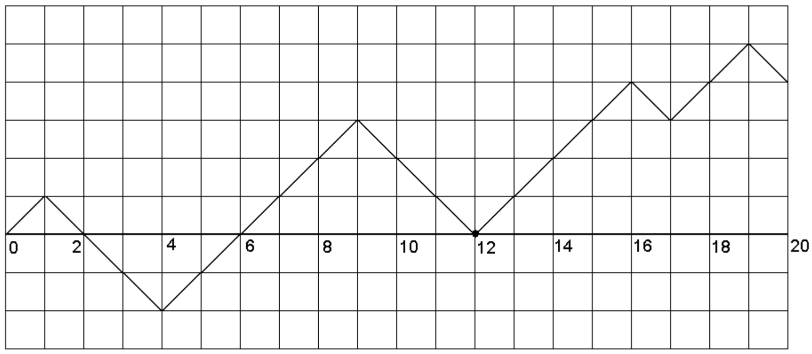
x	$F(x)$
0.50	0.5000
0.55	0.5319
0.60	0.5641
0.65	0.5970
0.70	0.6310
0.75	0.6667
0.80	0.7048
0.85	0.7468
0.90	0.7952
0.95	0.8564
1.00	1.0000



Σχήμα 3.3: Η πυκνότητα πιθανότητας τόξου ημιτόνου.



Σχήμα 3.4: Η συνάρτηση κατανομής τόξου ημιτόνου.



Σχήμα 3.5: Ο χρόνος τελευταίας επίσκεψης στο 0. Στο παραπάνω σχήμα $L_{20} = 12$.

3.8 Ο χρόνος τελευταίας επίσκεψης στο μηδέν

Έστω L_{2n} ο τελευταίος χρόνος για τον οποίο ένας απλός, συμμετρικός (δηλαδή $p = q = 1/2$) τυχαίος περίπατος $\{S_n\}_{n=0,1,2}$ επισκέφθηκε το 0 στο διάστημα $[0, 2n]$. Με βάση αυτό τον συμβολισμό, το ενδεχόμενο $\{L_{2n} = 2k\}$ ταυτίζεται με το $\{S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \ldots S_{2n} \neq 0\}$.

Χρησιμοποιόντας τον συμβολισμό

$$u_{2n} := \binom{2n}{n} \frac{1}{4^n} = P(S_{2n} = 0)$$

θα δείξουμε ότι

Θεώρημα 3.1. *Ο χρόνος τελευταίας επίσκεψης στο 0, μέσα στο διάστημα $[0, 2n]$, ενός απλού συμμετρικού τυχαίου περιπάτου έχει την κατανομή*

$$P(L_{2n} = 2k) = u_{2k} u_{2n-2k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, n. \tag{3.21}$$

Η κατανομή που περιγράφεται από την εξίσωση (3.21) ονομάζεται διακριτή κατανομή τόξου ημιτόνου.

Θα ξεκινήσουμε με το ακόλουθο

Λήμμα 3.1. *Η πιθανότητα ο τυχαίος περίπατος την την χρονική στιγμή $2n$ να βρίσκεται στο 0 είναι ίση με την πιθανότητα να μην έχει ποτέ βρεθεί στο μηδέν τις στιγμές $2, 4, 6, \ldots, 2n$ δηλαδή*

$$P(S_{2n} = 0) = P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, S_6 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0). \tag{3.22}$$

Απόδειξη Λήμματος: Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι

$$\begin{aligned}
P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, S_6 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) &= \frac{1}{2} P(S_2 > 0, S_4 > 0, \ldots, S_{2n} > 0 | S_1 = 1) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} P(S_2 > 0, S_4 > 0, \ldots, S_{2n} = 2r | S_1 = 1) \\
&+ \frac{1}{2} \sum_{r=1}^{n} P(S_2 < 0, S_4 < 0, \ldots, S_{2n} = -2r | S_1 = -1) \\
&= \sum_{r=1}^{n} P(S_2 > 0, S_4 > 0, \ldots, S_{2n} = 2r | S_1 = 1)
\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα δικαιολογείται λόγω της συμμετρίας του απλού τυχαίου περιπάτου. Αλλά ο αριθμός των μονοπατιών από το σημείο $(1,1)$ στο σημείο $(2n,2r)$ που δεν γίνονται ποτέ αρνητικά ή μηδέν είναι ίσος με $\binom{2n-1}{n-r} - \binom{2n-1}{n-r-1}$ όπως προκύπτει από την (3.16). Συνεπώς,

$$P(S_2 > 0, S_4 > 0, \ldots, S_{2n} = 2r | S_1 = 1) = \left(\binom{2n-1}{n-r} - \binom{2n-1}{n-r-1} \right) \frac{1}{2^{2n-1}}$$

και επομένως

$$\begin{aligned}
P(S_2 \neq 0, S_4 \neq 0, S_6 \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) &= \sum_{r=1}^{n} \left(\binom{2n-1}{n-r} - \binom{2n-1}{n-r-1} \right) \frac{1}{2^{2n-1}} \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} \binom{2n-1}{n-1} \\
&= \frac{1}{2^{2n-1}} \frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{(2n-1)! \cdot (2n)}{n!(n-1)! \cdot n} \\
&= P(S_{2n} = 0) =: u_{2n}.
\end{aligned}$$

Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη του λήμματος. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι τώρα άμεση

Απόδειξη του Θεωρήματος: Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
P(L_{2n} = 2k) &= P(S_{2k} = 0, S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0) \\
&= P(S_{2k} = 0) P(S_{2k+1} \neq 0, S_{2k+2} \neq 0, \ldots, S_{2n} \neq 0 | S_{2k} = 0).
\end{aligned}$$

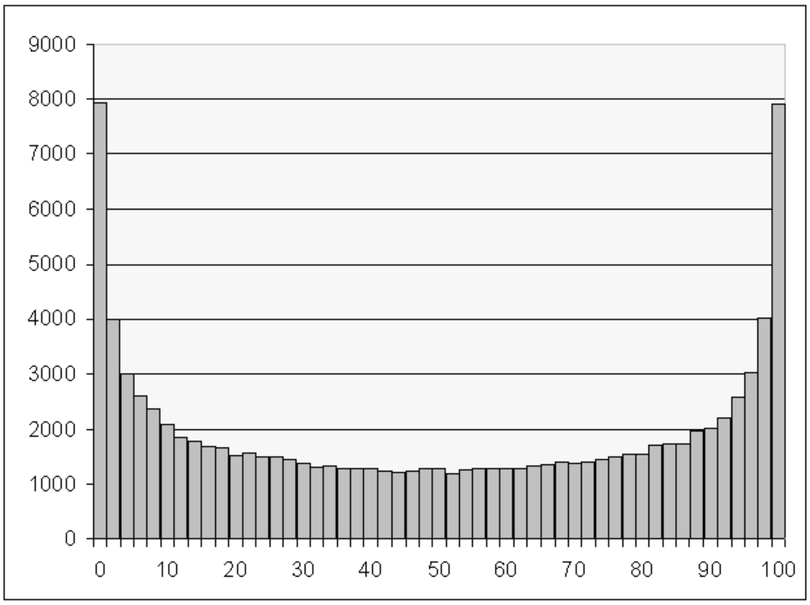
Ο πρώτος όρος του παραπάνω γινομένου είναι εξ ορισμού u_{2k} ενώ ο δεύτερος είναι u_{2n-2k} με βάση το προηγούμενο λήμμα. ∎

Η ονομασία «νόμος τόξου ημιτόνου» βασίζεται στην εξής προσέγγιση: Από τα παραπάνω έχουμε

$$P\left(\frac{L_{2n}}{2n} = \frac{2k}{2n} \right) = \binom{2k}{k} \binom{2n-2k}{n-k} \frac{1}{2^{2n}}.$$

Από την ασυμπτωτική σχέση του Stirling έχουμε $\binom{2n}{n} \frac{1}{2^{2n}} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$. Συνεπώς

$$P\left(\frac{L_{2n}}{2n} = \frac{2k}{2n} \right) \sim \frac{1}{\pi \sqrt{k(n-k)}} = \frac{1}{\pi n \sqrt{\frac{k}{n}(1 - \frac{k}{n})}}.$$



Σχήμα 3.6: Ο νόμος ημιτόνου για τον χρόνο τελευταίας επίσκεψης στο μηδέν. Το ανωτέρω ιστόγραμμα προέκυψε από προσομοίωση 100,000 πραγρατοποιήσεων ενός τυχαίου περιπάτου με 100 βήματα. Παρατηρείστε στο σχήμα ότι σχεδόν σε 16,000 περιπτώσεις ο τυχαίος περίπατος είναι πάντα θετικός ή πάντα αρνητικός.

Από τα ανωτέρω, θέτοντας $x = k/n$ συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $X_n := L_{2n}/2n$ συγκλίνει κατά κατανομή στην X με πυκνότητα πιθανότητας $f(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}$ όπου $0 < x < 1$.

Λήμμα 3.2. *Η πιθανότητα ο τυχαίος περίπατος που ξεκινάει από το μηδέν να βρίσκεται πάλι στο μηδέν την χρονική στιγμή $2n$, u_{2n} και η πιθανότητα να βρίσκεται στο μηδέν την χρονική στιγμή $2n$* για πρώτη φορά *συνδέονται με την αναδρομική σχέση*

$$u_{2n} = \sum_{k=0}^{n} f_{2k} u_{2n-2k}. \tag{3.23}$$

Θεώρημα 3.2. *Η πιθανότητα $b_{2k,2n}$ ο τυχαίος περίπατος να είναι θετικός στα $2k$ από τα $2n$ βήματά του δίδεται από τον νόμο τόξου ημιτόνου,*

$$b_{2k,2n} = u_{2k} u_{2n-2k}. \tag{3.24}$$

Απόδειξη: Θα αποδείξουμε την πρόταση με επαγωγή ως προς n. Για $n = 1$ αρκεί να δείξουμε ότι $b_{0,2} = u_0 u_2$ και $b_{2,2} = u_2 u_0$, πράγμα που είναι προφανές. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάθε $m = 2, 3, \ldots, n-1$ ισχύει ότι $b_{2k,2m} = u_{2k} u_{2m-2k}$ για κάθε $k = 0, 1, 2, \ldots, m$. Θα δείξουμε ότι η (3.24) ισχύει για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$. Ισχυριζόμαστε ότι ισχύει η σχέση

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{k} f_{2r} b_{2k-2r,2n-2r} + \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r} b_{2k,2n-2r}. \tag{3.25}$$

Πράγματι, έστω $2r$ ο πρώτος χρόνος που ο τυχαίος περίπατος επιστρέφει στο μηδέν. Ο πρώτος από τους δύο όρους στην παραπάνω εξίσωση αναφέρεται στην περίπτωση ο τυχαίος περίπατος να είναι διαρκώς θετικός μέχρι την πρώτη επιστροφή στο μηδέν. Αυτό συμβαίνει με πιθανότητα $1/2$ και από εκείνο το σημείο και πέρα αρκεί ο τυχαίος περίπατος να είναι θετικός για $2k-2r$ από τις υπολειπόμενες $2n-2r$ χρονικές στιγμές. Ο δεύτερος όρος αντιστοιχεί στην περίπτωση που μέχρι την πρώτη επιστροφή στο 0 ο τυχαίος περίπατος ήταν αρνητικός. Από την επαγωγική υπόθεση $b_{2k-2r,2n-2r} = u_{2k-2r}u_{2n-2k}$ και $b_{2k,2n-2r} = u_{2k}u_{2n-2r-2k}$ και αντικαθιστώντας στην (3.25) έχουμε

$$b_{2k,2n} = \frac{1}{2}u_{2n-2k}\sum_{r=1}^{k} f_{2r}u_{2k-2r} + u_{2k}\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n-k} f_{2r}u_{2n-2r-2k} = u_{2n-2k}u_{2k}$$

όπου, στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την (3.23). ∎

3.9 Το μέγιστο του τυχαίου περιπάτου

Θεώρημα 3.3. *Η κατανομή του μεγίστου του τυχαίου περιπάτου δίδεται από την σχέση*

$$P(\max_{0\le k\le n} S_k = r) = P(S_n = r) + P(S_n = r+1). \tag{3.26}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $M_n := \max_{0\le k\le n} S_k$. Ισχύει ότι

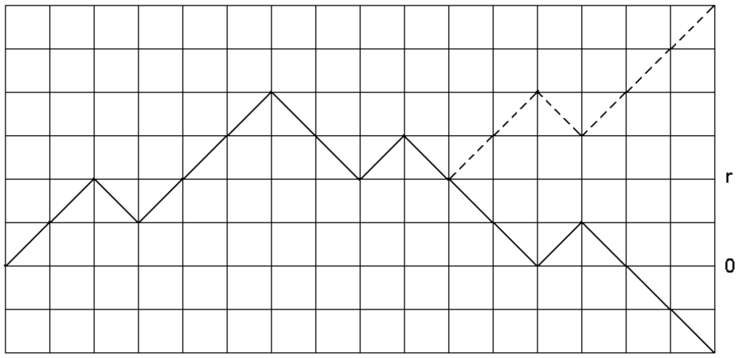
$$P(M_n \ge r) = \sum_{m=-\infty}^{r-1} P(M_n \ge r; S_n = m) + \sum_{m=r}^{\infty} P(M_n \ge r; S_n = m).$$

Όμως, όταν $m \ge r$, $S_n = m$ συνεπάγεται ότι $M_n \ge r$ και επομένως το δεύτερο άθροισμα στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης γράφεται ως $P(S_n \ge r)$. Για να υπολογίσουμε το πρώτο άθροισμα παρατηρούμε ότι $P(M_n \ge r; S_n = m) = P(S_n = 2r - m)$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι για κάθε μονοπάτι που φθάνει ή ξεπερνά το r για να καταλήξει τελικά σε κάποιο $m < r$ υπάρχει ένα άλλο που προκύπτει από αυτό με ανάκλαση στη οριζόντια γραμμή στο επίπεδο r του κομματιού από την τελευταία φορά που το μονοπάτι βρέθηκε στο r μέχρι το τέλος. (Το διακεκομένο τμήμα που φαίνεται στο σχήμα.) Συνεπώς $\sum_{m=-\infty}^{r-1} P(M_n \ge r; S_n = m) = \sum_{m=-\infty}^{r-1} P(S_n = 2r-m) = \sum_{m=r+1}^{\infty} P(S_n = m) = P(S_n > r)$ και επομένως, από όλα τα παραπάνω

$$P(M_n \ge r) = P(S_n \ge r) + P(S_n > r) = P(S_n = r) + 2P(S_n > r). \tag{3.27}$$

Από την σχέση $P(M_n = r) = P(M_n \ge r) - P(M_n \ge r+1)$ και την (3.27) προκύπτει άμεσα η (3.26). ∎

Επισημαίνουμε ότι για κάθε n και r ακριβώς ένας από τους δύο όρους της (3.26) θα είναι θετικός ενώ ο άλλος θα είναι μηδέν.



Σχήμα 3.7: Η κατανομή του μεγίστου και η αρχή της ανάκλασης

3.10 Εξισώσεις διαφορών πρώτης και δεύτερης τάξης με σταθερούς συντελεστές

3.10.1 Αναδρομικές εξισώσεις πρώτης τάξεως με σταθερούς συντελεστές

Έστω $x(n)$ μια ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$x(n+1) - ax(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad x(0) = x_0, \tag{3.28}$$

όπου x_0 είναι μία δεδομένη αρχική συνθήκη. Η εξίσωση (3.28) ονομάζεται *ομογενής διαφορο-εξίσωση πρώτου βαθμού* και έχει την μοναδική λύση

$$x(n) = x_0 a^n, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.29}$$

Απόδειξη: Παρατηρείστε απλώς ότι

$$x(n) = ax(n-1) = a^2 x(n-2) = \cdots = a^n x(0).$$

∎

Έστω $f(n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, δεδομένη ακολουθία πραγματικών αριθμών. Η εξίσωση

$$x(n+1) - ax(n) = f(n), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \qquad x(0) = x_0, \tag{3.30}$$

ονομάζεται *μη ομογενής διαφοροεξίσωση πρώτου βαθμού* και έχει την μοναδική λύση

$$x(n) = x_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} f(k), \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots. \tag{3.31}$$

Απόδειξη: Ισχύει ότι

$$x(n+1) - ax(n) = x_0 a^{n+1} + \sum_{k=0}^{n} a^{n-k} f(k) - a x_0 a^n - a \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} f(k) = f(n)$$

και συνεπώς η (3.31) ικανοποιεί την (3.30). ∎

Στην ειδική περίπτωση που η ακολουθία $f(n)$ είναι σταθερή, δηλαδή $f(n) = b$ για κάθε n τότε η (3.31) δίνει

$$x(n) = x_0 a^n + b \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k} = x_0 a^n + b \frac{a^n - 1}{a - 1}.$$

3.10.2 Αναδρομικές εξισώσεις δευτέρας τάξεως με σταθερούς συντελεστές

Έστω $x(n)$ ακολουθία πραγματικών αριθμών που ικανοποιεί την αναδρομική σχέση

$$\begin{aligned} & x(n+2) + \alpha x(n+1) + \beta x(n) = 0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots, \\ & x(0) = x_0, \;\; x(1) = x_1, \end{aligned} \tag{3.32}$$

όπου x_0, x_1 είναι δεδομένες αρχικές συνθήκες. Θα διερευνήσουμε την μορφή των λύσεων της παραπάνω διαφοροεξίσωσης. Παρατηρούμε πρώτα ότι αν η $x_1(n)$ είναι λύση της εξίσωσης και η $x_2(n)$ είναι μια άλλη λύση της εξίσωσης, τότε και ο *γραμμικός συνδυασμός* $c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)$ είναι επίσης λύση της εξίσωσης. Πράγματι, για κάθε n ισχύει ότι

$$\begin{aligned} x_1(n+2) + \alpha x_1(n+1) + \beta x_1(n) &= 0 \\ x_2(n+2) + \alpha x_2(n+1) + \beta x_2(n) &= 0 \end{aligned}$$

εφ' όσον οι $x_i(n)$, $i = 1, 2$, είναι λύσεις της (3.32). Πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση με c_1 και την δεύτερη με c_2 και προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε

$$c_1 x_1(n+2) + c_2 x_2(n+1) + \alpha\left(c_1 x_1(n+1) + c_2 x_2(n+1)\right) + \beta\left(c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n)\right) = 0.$$

Ας επιχειρήσουμε τώρα να βρούμε λύσεις της (3.32): Θα δοκιμάσουμε την ακολουθία ρ^n όπου το ρ θα προσδιορισθεί κατάλληλα.

$$\rho^{n+2} + \alpha \rho^{n+1} + \beta \rho^n = 0$$

ή

$$\rho^2 + \alpha \rho + \beta = 0$$

Η παραπάνω δευτεροβάθμια εξίσωση έχει δύο λύσεις,

$$\rho_1 = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2} \quad \text{και} \quad \rho_2 = \frac{-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}. \tag{3.33}$$

Ας υποθέσουμε προς το παρόν ότι οι δύο ρίζες είναι διαφορετικές, δηλαδή $\rho_1 \neq \rho_2$. Τότε τόσο η ρ_1^n όσο και η ρ_2^n είναι λύσεις της (3.32) και συνεπώς, με βάση τις προηγούμενες παρατηρήσεις μας, και η

$$x(n) = c_1\rho_1^n + c_2\rho_2^n \tag{3.34}$$

είναι επίσης λύση της (3.32). Οι συντελεστές c_1, c_2, προσδιορίζονται έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αρχικές συνθήκες:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = c_1\rho_1^0 + c_2\rho_2^0 = c_1 + c_2 \\ x_1 &= x(1) = c_1\rho_1 + c_2\rho_2. \end{aligned}$$

Οι δύο αυτές σχέσεις δίνουν

$$c_1 = \frac{x_1 - x_0\rho_2}{\rho_1 - \rho_2} \qquad \text{και} \qquad c_2 = \frac{x_0\rho_1 - x_1}{\rho_1 - \rho_2}. \tag{3.35}$$

Οι σχέσεις (3.34), (3.35), δίνουν την λύση της αναδρομικής εξίσωσης (3.32) με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες, στην περίπτωση που οι δύο ρίζες (3.33) είναι διαφορετικές.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση που $\rho_1 = \rho_2$. Σάυτή την περίπτωση ισχυριζόμαστε ότι δύο λύσεις της (3.32) δίνονται από τις ρ_1^n και $n\rho_1^n$. Ας διαπιστώσουμε ότι πράγματι η $n\rho_1^n$ είναι λύση:

$$(n+2)\rho_1^{n+2} + \alpha\rho_1^{n+1} + \beta n\rho_1^n = 0 \qquad \forall n$$

ή ισοδύναμα

$$(n+2)\rho_1^2 + (n+1)\alpha\rho_1 + n\beta = 0 \qquad \forall n$$

ή ακόμη

$$n\left(\rho_1^2 + \alpha\rho_1 + \beta\right) + (2\rho_1 + \alpha)\,\rho_1 = 0 \qquad \forall n. \tag{3.36}$$

Εφ' όσον όμως η ρ_1 είναι ρίζα της (3.33) η πρώτη παρένθεση στην (3.36) είναι μηδέν. Επίσης, επειδή υποθέσαμε ότι η ρ_1 είναι *διπλή ρίζα* της (3.33), η διακρίνουσα

$$\beta^2 - 4\alpha = 0 \tag{3.37}$$

το οποίο συνεπάγεται

$$\rho_1 = -\frac{\alpha}{2} \tag{3.38}$$

και συνεπώς η δεύτερη παρένθεση στην (3.36). Έτσι, η (3.36) ικανοποιείται για κάθε n. Με βάση τα παραπάνω η γενική λύση της αναδρομικής εξίσωσης (3.32) όταν οι συντελεστές α, β ικανοποιούν την (3.37) και επομένως $\rho_1 = \rho_2 = -\frac{\alpha}{2}$, είναι

$$x(n) = c_1\rho_1^n + c_2 n\rho_1^n \tag{3.39}$$

όπου τα c_1, c_2, υπολογίζονται από τις αρχικές συνθήκες ως εξής:

$$\begin{aligned} x_0 &= x(0) = c_1\rho_1^0 + c_2 \cdot 0 \cdot \rho_1^0 = c_1 \\ x_1 &= x(1) = c_1\rho_1 + c_2 \cdot 1 \cdot \rho_1 \end{aligned}$$

ή

$$c_1 = x_0 \qquad \text{και} \qquad c_2 = \frac{x_1 - \rho_1 x_0}{\rho_1}. \tag{3.40}$$

Οι (3.39) και (3.40) προσδιορίζουν πλήρως την λύση της διαφοροεξίσωσης.

3.11 Προβλήματα

Πρόβλημα 3.1. Δύο παίκτες (ας τους ονομάσουμε A και B) παίζουν κατ΄ επανάληψη ένα τυχερό παιχνίδι. Σε κάθε παρτίδα του παιχνιδιού ο παίκτης A (που είναι πιο επιδέξιος) έχει πιθανότητα επιτυχίας 0.6. Επιτυχία του παίκτη B σημαίνει αποτυχία του παίκτη A και συνεπώς συμβαίνει με πιθανότητα 0.4. Υποθέτουμε ότι η κάθε παρτίδα του παιχνιδιού είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες.

α) Έστω ότι οι παίκτες παίζουν 4 παρτίδες συνολικά και νικητής ανακηρύσσεται ο παίκτης με τις περισσότερες επιτυχίες. (Σε περίπτωση που και οι δύο παίκτες κερδίσουν από δύο παρτίδες, ρίχνουν ένα τίμιο νόμισμα για να αποφασίσουν ποιος είναι ο νικητής.) Ποια είναι η πιθανότητα να ανακηρυχθεί νικητής ο πιο επιδέξιος παίκτης (δηλαδή ο παίκτης A);

β) Ας υποθέσουμε τώρα ότι το παιχνίδι δεν σταματά μετά από κάποιο συγκεκριμένο αριθμό από παρτίδες αλλά συνεχίζεται μέχρι την πρώτη φορά που ο ένας από τους δυο παίκτες προηγηθεί στο σκορ κατά δύο μονάδες του άλλου (δηλαδή έχει συνολικά δύο επιτυχίες περισσότερες από τον άλλο). Σ΄αυτή την περίπτωση ποια είναι η πιθανότητα να κερδίσει ο τελικά A; Πόσες παρτίδες απαιτούνται μέχρι να τελειώσει το παιχνίδι κατά μέσον όρο;

Κεφάλαιο 4

Αλυσίδες Markov

4.1 Εισαγωγή και Ορισμός της Αλυσίδας Markov

Έστω $X_0, X_1, X_2, \ldots, X_n \ldots$, μια ακολουθία από τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές σε κάποιο σύνολο $\mathscr{S}$, δηλαδή μια στοχαστική ανέλιξη σε διακριτό χρόνο. Το σύνολο $\mathscr{S}$ θα ονομάζεται *χώρος καταστάσεων* και γενικά θα είναι ένα πεπερασμένο ή άπειρο αλλά αριθμήσιμο σύνολο. Συχνά το $\mathscr{S}$ θα ταυτίζεται με τους φυσικούς αριθμούς ή ένα πεπερασμένο υποσύνολό τους.

Ορισμός 4.1. Μία στοχαστική ανέλιξη θα ονομάζεται αλυσίδα Markov αν ικανοποιεί την λεγόμενη μαρκοβιανή ιδιότητα, αν δηλαδή

$$P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_0 = i_0) = P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathscr{S}$.

Αν η χρονική στιγμή n συμβολίζει το παρόν, το $n+1$ το επόμενο, μελλοντικό βήμα και το ενδεχόμενο $\{X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_{n-2} = i_{n-2}, X_{n-1} = i_{n-1}\}$ το παρελθόν της διαδικασίας τότε η μαρκοβιανή ιδιότητα μπορεί να εκφραστεί επιγραμματικά ως:

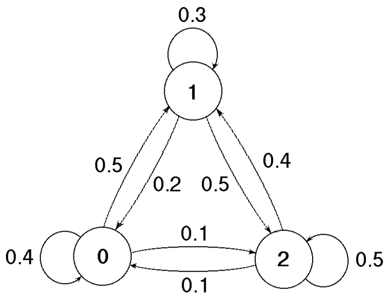
Μαρκοβιανή Ιδιότητα: *Το μέλλον είναι ανεξάρτητο από το παρελθόν δεδομένου του παρόντος*

Αν επιπλέον, για κάθε $i, j \in \mathscr{S}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει η

Χρονική Ομοιογένεια: $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$

τότε, ο «μηχανισμός μετάβασης» από μια κατάσταση στην άλλη δεν εξαρτάται από τον χρόνο και η αλυσίδα είναι *χρονικά ομοιογενής*.

Σαν ένα πρώτο παράδειγμα ας εξετάσουμε την εξής διαδικασία. Ένα σωματίδιο μεταπηδά ανάμεσα σε τρεις διαφορετικές θέσεις τις οποίες μπορούμε να περιγράψουμε με τα σύμβολα 0,1,



$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}$$

Σχήμα 4.1: Παράδειγμα αλυσίδας Markov με τρεις καταστάσεις και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P.

και 2. Ας ταυτίσουμε λοιπόν τον χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ με το σύνολο $\{0, 1, 2\}$. Υποθέτουμε ότι οι μεταπηδήσεις του σωματιδίου *εξαρτώνται από την θέση του αλλά όχι από την προηγούμενη ιστορία του.* Συγκεκριμένα, αν η θέση του σωματιδίου είναι την χρονική στιγμή n είναι i $(i = 0, 1, 2)$ τότε την χρονική στιγμή $n+1$ σωματίδιο θα βρίσκεται στην θέση j με πιθανότητα P_{ij} όπου P είναι ένας τετραγωνικός πίνακας (3×3 στο παράδειγμά μας). Εφόσον ο μηχανισμός που διέπει τις μεταπηδήσεις είναι τυχαίος η θέση του σωματιδίου την χρονική στιγμή n είναι τυχαία μεταβλητή που συμβολίζουμε με X_n. Από τις παραπάνω υποθέσεις βλέπουμε για παράδειγμα ότι $P(X_1 = 2|X_0 = 0) = P_{02} = 0.1$ και $P(X_1 = 2|X_0 = 1) = P_{12} = 0.5$. Λόγω της υποθέσεώς μας ότι η κάθε μεταπήδηση προσδιορίζεται αποκλειστικά από τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P ανεξαρτήτως της ιστορίας της διαδικασίας (δηλαδή των διαδοχικών θέσεων του σωματιδίου) ισχύει επίσης, για παράδειγμα, ότι $P(X_4 = 0|X_3 = 1, X_2 = 0, X_1 = 0, X_0 = 2) = P_{10} = 0.2$. Με άλλα λόγια οι διαδοχικές θέσεις του σωματιδίου ικανοποιούν τον ορισμό της διαδικασίας Markov.

Χάριν ακριβολογίας ας υποθέσουμε ότι η αρχική θέση του σωματιδίου είναι $X_0 = 0$. Βάσει του ορισμού 4.1 η πιθανότητα $P(X_4 = 1, X_3 = 2, X_2 = 2, X_1 = 1|X_0 = 0)$ γράφεται ως

$$\begin{aligned} & P(X_4 = 1|X_3 = 2, X_2 = 2, X_1 = 1, X_0 = 0)P(X_3 = 2, X_2 = 2, X_1 = 1|X_0 = 0) \\ &= P(X_4 = 1|X_3 = 2)P(X_3 = 2|X_2 = 2)P(X_2 = 2|X_1 = 1)P(X_1 = 1|X_0 = 0) \\ &= P_{21}P_{22}P_{12}P_{01} = 0.4 \times 0.5 \times 0.5 \times 0.5 = 0.05. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω υπολογισμός βασίστηκε αποκλειστικά στον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας και στην Μαρκοβιανή ιδιότητα.

4.2 Εξισώσεις Chapman-Kolmogorov

Ας υπολογίσουμε τώρα την πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται στην κατάσταση 1 την χρονική στιγμή 2 δεδομένου ότι ήταν στην κατάσταση 0 την χρονική στιγμή 0, δηλαδή $P(X_2 = 1|X_0 = 0)$. Από το θεώρημα ολικής πιθανότητας, αυτή η πιθανότητα γράφεται ως $\sum_{k=0}^{2} P(X_2 =$

$1, X_1 = k|X_0 = 0)$. Από τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας όμως ο κάθε όρος του αθροίσματος μπορεί να γραφεί σαν ένα γινόμενο $P(X_2 = 1|X_1 = k, X_0 = 0)P(X_1 = k|X_0 = 0)$. Χρησιμοποιώντας τώρα την Μαρκοβιανή ιδιότητα βλέπουμε ότι ο πρώτος όρος του γινομένου παίρνει την μορφή $P(X_2 = 1|X_1 = k)$ και συνεπώς

$$\begin{aligned} P(X_2 = 1|X_0 = 0) &= \sum_{k=0}^{2} P(X_1 = k|X_0 = 0)P(X_2 = 1|X_1 = k) \\ &= P_{00}P_{01} + P_{01}P_{11} + P_{02}P_{21} \\ &= P_{01}^2 = 0.39 \end{aligned}$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι η πιθανότητα να βρισκόμαστε στην κατάσταση j μετά από δύο βήματα, δεδομένου ότι αρχικά ξεκινάμε από την κατάσταση i, δίνεται από το στοιχείο i, j (i γραμμή, j στήλη) του πίνακα P^2.

Όπως θα δούμε στη συνέχεια η παραπάνω ανάλυση γενικεύεται. Ας συμβολίσουμε με $P_{ij}^{(n)} := P(X_n = j|X_0 = i)$ την πιθανότητα να βρεθούμε στην κατάσταση j την χρονική στιγμή n δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκίνησε από την κατάσταση i. Θα αποδείξουμε ότι η άγνωστη ποσότητα $P_{ij}^{(n)}$ που εξαρτάται από τρεις δείκτες, τους i, j, και n, είναι ίση με την P_{ij}^n δηλαδή το i, j στοιχείο του πίνακα P υψωμένου στην n–οστή δύναμη. Βάσει των ιδίων επιχειρημάτων που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως

$$P(X_n = j|X_0 = i) = \sum_{k \in \mathscr{S}} P(X_n = j|X_{n-1} = k)P(X_{n-1} = k|X_0 = i)$$

ή

$$P_{ij}^{(n)} = \sum_{k \in \mathscr{S}} P_{ik}^{(n-1)} P_{kj}.$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω σχέση για $n = 2$, $P_{ij}^{(2)} = \sum_{k \in \mathscr{S}} P_{ik}P_{kj}$. Επομένως βλέπουμε ότι ο πίνακας $P^{(2)}$ μπορεί να εκφραστεί σαν το γινόμενο της P με τον εαυτό της και επαγωγικά βλέπουμε ότι η $P^{(n)}$ είναι η P^n. Οι διαδοχικές δυνάμεις του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης του παραδείγματός μας είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \\ 0.1 & 0.4 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad P^2 = \begin{bmatrix} .27 & .39 & .34 \\ .19 & .39 & .42 \\ .17 & .37 & .46 \end{bmatrix}, \quad P^3 = \begin{bmatrix} .22 & .388 & .392 \\ .196 & .38 & .424 \\ .188 & .38 & .432 \end{bmatrix}$$

$$P^4 = \begin{bmatrix} .205 & .383 & .412 \\ .197 & .382 & .422 \\ .194 & .381 & .425 \end{bmatrix}, \quad P^5 = \begin{bmatrix} .200 & .382 & .418 \\ .197 & .382 & .421 \\ .196 & .381 & .422 \end{bmatrix}, \quad P^6 = \begin{bmatrix} .198 & .382 & .420 \\ .197 & .382 & .421 \\ .197 & .382 & .421 \end{bmatrix}$$

Παρατηρείστε ότι καθώς η δύναμη στην οποία υψώνεται ο πίνακας μεγαλώνει, οι γραμμές του φαίνεται να συγκλίνουν σε κάποια οριακή τιμή. Όπως θα δούμε στην συνέχεια αυτό δεν είναι καθόλου συμπτωματικό αλλά αντιθέτως μια γενική ιδιότητα των πινάκων αυτών.

Ο ακόλουθος ορισμός θα χρησιμεύσει αργότερα:

Ορισμός 4.2. Ένας τετραγωνικός πίνακας $n \times n$, P, ονομάζεται στοχαστικός αν α) $p_{ij} \geq 0$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$, και

β) $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 1$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.

Κλείνουμε την παράγραφο αυτή με την εξής παρατήρηση σε ότι αφορά τον συμβολισμό. *Συχνά, χάριν ευκολίας θα γράφουμε* $P_i(X_n = j)$ *αντί για* $P(X_n = j | X_0 = i)$, *δηλαδή ο δείκτης στο σύμβολο της πιθανότητας θα σημαίνει δεσμευμένη πιθανότητα ως προς την αρχική κατάσταση.*

4.3 Πιθανότητες μετάβασης και αρχική κατανομή

Έστω $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$, αρχικές πιθανότητες που δίνονται από το διάνυσμα $\nu = \{\nu_i, i \in \mathscr{S}\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P. Ισχύει δηλαδή $P(X_0 = i) = \nu_i$, $i \in \mathscr{S}$. Τα στοιχεία αυτά είναι αρκετά για τον προσδιορισμό των πιθανοτήτων οποιουδήποτε γεγονότος σχετικά με την εξέλιξη της αλυσίδας Markov. Για παράδειγμα $P(X_3 = l, X_2 = k, X_1 = j, X_0 = i) = P(X_3 = l | X_2 = k, X_1 = j, X_0 = i) P(X_2 = k, X_1 = j, X_0 = i)$. Ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος αυτής της εξίσωσης μπορεί να γραφτεί σαν $P(X_3 = l | X_2 = k)$ λόγω της μαρκοβιανής ιδιότητας. Ο δεύτερος όρος γράφεται σαν $P(X_2 = k | X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j, X_0 = i) = P(X_2 = k | X_1 = j) P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i)$ όπου χρησιμοποιήσαμε ξανά την μαρκοβιανή ιδιότητα. Επομένως,

$$P(X_3 = l, X_2 = k, X_1 = j, X_0 = i) = \nu_i P_{ij} P_{jk} P_{kl}.$$

Με τον ίδιο ακριβώς τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε τη γενική σχέση

$$\begin{aligned} P(X_n = i_n, X_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, X_1 = i_1, X_0 = i_0) \\ = \nu_{i_0} P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_{n-2} i_{n-1}} P_{i_{n-1} i_n}. \end{aligned} \tag{4.1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathscr{S}$.

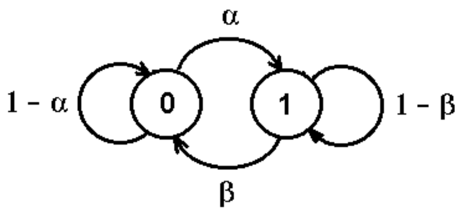
Γενικότερα, για κάθε $k_1, k_2, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$ με $k_1 < k_2 < \cdots < k_n$ και $i_0, i_1, \ldots, i_n \in \mathscr{S}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} P(X_{k_n} = i_n, X_{k_{n-1}} = i_{n-1}, \ldots, X_{k_1} = i_1, X_0 = i_0) \\ = \nu_{i_0} P_{i_0 i_1}^{k_1} P_{i_1 i_2}^{k_2 - k_1} \cdots P_{i_{n-2} i_{n-1}}^{k_{n-1} - k_{n-2}} P_{i_{n-1} i_n}^{k_n - k_{n-1}}. \end{aligned} \tag{4.2}$$

Για παράδειγμα

$$P(X_6 = l, X_4 = k, X_3 = j, X_0 = i) = \nu_i P_{ij}^3 P_{jk} P_{kl}^2.$$

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να υπολογίσουμε δεσμευμένες πιθανότητες μονοπατιών στο χώρο καταστάσεων. Για παράδειγμα, έστω ότι μας ενδιαφέρει η πιθανότητα να επισκεφθούμε



Σχήμα 4.2: Αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις

ορισμένες καταστάσεις αν τόσο η αφετηρία (i_0 στο παράδειγμα που ακολουθεί) όσο και ο τελικός προορισμός (i_6) είναι δεδομένα:

$$\begin{aligned} & P(X_1 = i_1, X_2 = i_2, X_3 = i_3, X_4 = i_4, X_5 = i_5 | X_0 = i_0, X_6 = i_6) \\ & \qquad = \frac{P_{i_0}(X_1 = i_1, \ldots, X_5 = i_5, X_6 = i_6)}{P_{i_0}(X_6 = i_6)} = \frac{P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} \cdots P_{i_5 i_6}}{P^6_{i_0 i_6}}. \end{aligned}$$

Στο επόμενο παράδειγμα εκτός από την αφετηρία και τον προορισμό δεδομένο είναι επίσης και ένα ενδιάμεσο σημείο:

$$\begin{aligned} & P(X_1 = i_1, X_3 = i_3, X_4 = i_4, X_5 = i_5 | X_0 = i_0, X_2 = i_2, X_6 = i_6) \\ & \qquad = \frac{P_{i_0}(X_1 = i_1, \ldots, X_5 = i_5, X_6 = i_6)}{P_{i_0}(X_2 = i_2, X_6 = i_6)} = \frac{P_{i_0 i_1} P_{i_1 i_2} P_{i_2 i_3} P_{i_3 i_4} P_{i_4 i_5} P_{i_5 i_6}}{P^2_{i_0 i_2} P^4_{i_2 i_6}} \end{aligned}$$

4.4 Αλυσίδες Markov με δύο καταστάσεις

Έστω X_n διαδικασία Markov με δύο καταστάσεις, 0 και 1. Μια δειγματική συνάρτηση αυτής της διαδικασίας θα μπορούσε να είναι λόγου χάριν 01101011100100010.... Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$P = \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{bmatrix}$$

Γράφουμε $P = I - S$ όπου I είναι ο ταυτοτικός πίνακας

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad S = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha \\ -\beta & \beta \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $S^2 = (\alpha+\beta)S$ και επαγωγικά $S^k = (\alpha+\beta)^{k-1}S$, $k = 1, 2, \ldots$. Συνεπώς, από το διωνυμικό θεώρημα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P^n &= (I-S)^n = I + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k S^k = I + S \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k (\alpha+\beta)^{k-1} \\ &= I + \frac{(\alpha+\beta)^n - 1}{\alpha+\beta} S = I - S(\alpha+\beta)^{-1} + S(\alpha+\beta)^{n-1} \end{aligned}$$

Συνεπώς ο πίνακας μετάβασης n βημάτων δίνεται από τον τύπο

$$P^n = \begin{bmatrix} P_{00}^n & P_{01}^n \\ P_{10}^n & P_{11}^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix} + (1-\alpha-\beta)^n \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{\alpha+\beta} & \frac{-\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{-\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\beta}{\alpha+\beta} \end{bmatrix}.$$

Από την παραπάνω σχέση βλέπουμε ότι, όταν $|1-\alpha-\beta| < 1$

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \\ \frac{\beta}{\alpha+\beta} & \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \end{bmatrix}.$$

Δεδομένου ότι $0 \le \alpha \le 1$ και $0 \le \beta \le 1$ παρατηρούμε ότι η ποσότητα $|1-\alpha-\beta|$ είναι πάντα μικρότερη της μονάδος εκτός αν

Περίπτωση 1: $\alpha = \beta = 1$. Τότε $1-\alpha-\beta = -1$ και $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Περίπτωση 2: $\alpha = \beta = 0$. Τότε $1-\alpha-\beta = 1$ και $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Στην πρώτη περίπτωση παρατηρούμε ότι

$$P^{2n} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P^{2n+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{για } n = 1, 2, \ldots.$$

Είναι σαφές ότι το σωματίδιο μεταπηδά από την μία κατάσταση στην άλλη ντετερμινιστικά σε κάθε βήμα. Είναι επίσης προφανές ότι η P^n δεν συγκλίνει όταν $n \to \infty$.

Στην δεύτερη περίπτωση

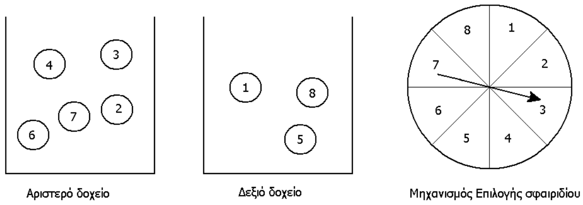
$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Εδώ βλέπουμε ότι το σωματίδιο παραμένει για πάντα στην αρχική του κατάσταση.

Και στις δύο αυτές περιπτώσεις αξίζει να παρατηρήσουμε το γεγονός ότι το σωματίδιο δεν ξεχνάει ποτέ την αρχική του θέση η οποία συνεχίζει να επηρεάζει την συμπεριφορά του ανεξαρτήτως του χρόνου που έχει παρέλθει από την αρχή της διαδικασίας (σε αντίθεση με την γενική περίπτωση $|1-\alpha-\beta| < 1$ όπου βλέπουμε ότι η επίδραση της αρχικής θέσης του σωματιδίου φθίνει γεωμετρικά).

4.5 Παραδείγματα Αλυσίδων Markov

Παράδειγμα 4.1 (Πρότυπο Διάχυσης των Ehrenfest). Το πρότυπο αυτό είναι μία από τις πρώτες αλυσίδες Markov που μελετήθηκαν (από τους φυσικούς Paul και Tatiana Ehrenfest) και έπαιξε σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της στατιστικής φυσικής στις αρχές του αιώνα μας και συγκεκριμένα στη μελέτη των φαινομένων διαχύσεως των αερίων. Έστω δύο δοχεία και N σφαιρίδια, i από τα οποία βρίσκονται αρχικά στο αριστερό δοχείο και $N-i$ στο δεξιό δοχείο.



Σχήμα 4.3: Πρότυπο διάχυσης Ehrenfest με 8 σφαιρίδια τα οποία χωρίς βλάβη της γενικότητος θεωρούμε αριθμημένα. Κάθε φορά, με τη βοήθεια του βέλους, διαλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο και το μεταθέτουμε στο αντίθετο δοχείο.

Τις χρονικές στιγμές $1, 2, \ldots, n, \ldots$ διαλέγουμε κάθε φορά ένα σφαιρίδιο στην τύχη (ανεξάρτητα από τις προηγούμενες επιλογές μας) και το τοποθετούμε στο αντίθετο δοχείο. Ο χώρος καταστάσεων μπορεί να ληφθεί εδώ ως το σύνολο $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, \ldots, N-1, N\}$. Όταν η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i αυτό σημαίνει ότι έχουμε i σφαιρίδια στο αριστερό δοχείο (και συνεπώς $N - i$ στο δεξιό). Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης δίδεται από τις σχέσεις

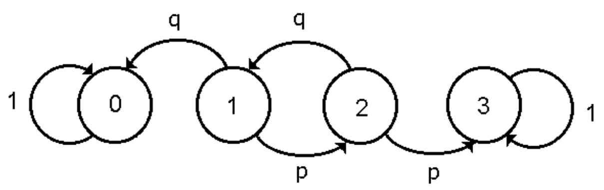
$$P_{ij} = \begin{cases} \dfrac{i}{N} & \text{αν } j = i-1 \\[2ex] \dfrac{N-i}{N} & \text{αν } j = i+1 \\[2ex] 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παράδειγμα 4.2 (Πρότυπο διάχυσης Bernoulli-Laplace). Θεωρούμε δύο δοχεία που περιέχουν συνολικά $2N$ σφαιρίδια, N λευκά και N μαύρα. (Κάθε δοχείο περιέχει ακριβώς N σφαιρίδια.) Σε κάθε βήμα επιλέγουμε τυχαία δύο σφαιρίδια, ένα από κάθε δοχείο, και τα μεταθέτουμε. Η κατάσταση του συστήματος περιγράφεται πλήρως από τον αριθμό των μαύρων σφαιριδίων στο αριστερό δοχείο, $i = 0, 1, \ldots, N$. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης περιγράφεται από τις σχέσεις

$$p_{i,i-1} = \left(\frac{i}{N}\right)^2, \qquad p_{ii} = 2\frac{i(N-i)}{N^2},$$

$$p_{i,i+1} = \left(\frac{N-i}{N}\right)^2, \qquad p_{ij} = 0 \quad \text{όταν } |i-j| > 1$$

Παράδειγμα 4.3 (Πρότυπο εξάπλωσης επιδημιών). Σ' αυτό το παράδειγμα ο χώρος καταστάσεων είναι $\mathscr{S} = \{0, 1, \ldots, r\}$. Ας φανταστούμε ένα πληθυσμό από r άτομα, όλα υγιή την χρονική στιγμή 0. Την χρονική στιγμή 1 το καθένα από αυτά νοσεί με πιθανότητα p (και παραμένει υγιές με πιθανότητα q). Τα άτομα που προσβλήθηκαν από την ασθένεια αναπτύσσουν ανοσία και συνεπώς δεν θα νοσήσουν ξανά στο μέλλον, εκείνα που παρέμειναν υγιή την χρονική στιγμή 1 νοσούν την χρονική στιγμή 2 με πιθανότητα p κ.ο.κ. Το σύστημα βρίσκεται στην κατάσταση i όταν υπάρχουν i άτομα στον πληθυσμό που δεν έχουν νοσήσει ακόμη. Είναι εύκολο να δει



Σχήμα 4.4: Γράφος που αντιστοιχεί στο πρόβλημα της «καταστροφής του παίκτη» με 4 καταστάσεις

κανείς ότι οι πιθανότητες μετάβασης δίδονται από τον πίνακα

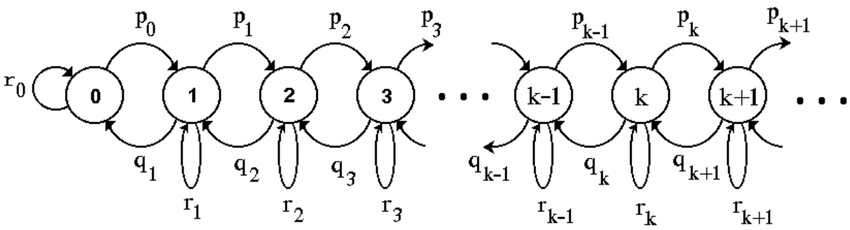
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ p & q & 0 & \cdots & 0 \\ p^2 & 2pq & q^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p^r & rp^{r-1}q & \binom{r}{2}p^{r-2}q^2 & \cdots & q^r \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Παρατηρούμε ότι αυτό είναι το ίδιο πρότυπο με εκείνο του προβλήματος 1.3 (κεφάλαιο 1, σελ. 23).

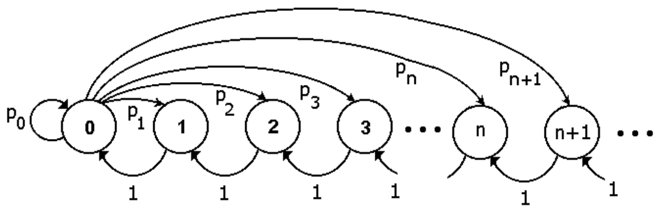
Παράδειγμα 4.4 (Το πρόβλημα της «καταστροφής του παίκτη» με 4 καταστάσεις). Αυτό είναι το πρόβλημα που αναλύσαμε εκτενώς στο κεφάλαιο 2 με άλλες μεθόδους. Η κατάσταση του συστήματος ανά πάσα στιγμή είναι βέβαια η περιουσία του παίκτη. Παρατηρείστε ότι μπορεί να περιγραφεί από μία αλυσίδα Markov με πιθανότητες μετάβασης

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Παράδειγμα 4.5 (Η γενική αλυσίδα γεννήσεων–θανάτων). Αυτό είναι ένα από τα γενικότερα και σημαντικότερα πρότυπα. Ο χώρος καταστάσεων μπορεί να είναι το σύνολο των φυσικών αριθμών ή ένα πεπερασμένο υποσύνολό του. Η ορολογία προέρχεται από βιολογικές και δημογραφικές εφαρμογές. Ας θεωρήσουμε ένα πληθυσμό του οποίου το μέγεθος εξελίσσεται με τον ακόλουθο τρόπο: Αν την χρονική στιγμή n το μέγεθος του πληθυσμού είναι k τότε η πιθανότητα να αυξηθεί την χρονική στιγμή $n+1$ κατά 1 είναι p_k (γέννηση) και η πιθανότητα να μειωθεί κατά 1 είναι q_k (θάνατος). Τέλος, με πιθανότητα $r_k = 1 - p_k - q_k$ ο πληθυσμός παραμένει σταθερός. Η φύση της διαδικασίας εξαρτάται βέβαια από τις τιμές αυτών των πιθανοτήτων. Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι τα παραδείγματα 4.1, 4.2, και 4.4 που αναφέραμε προηγουμένως αποτελούν ειδική περίπτωση της διαδικασίας γεννήσεων-θανάτων. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης της



Σχήμα 4.5: Αλυσίδα γεννήσεων–θανάτων



Σχήμα 4.6: Ανανεωτική αλυσίδα

διαδικασίας είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & r_4 & p_4 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 4.6 (Η ανανεωτική αλυσίδα). Ο χώρος καταστάσεων είναι οι φυσικοί, $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, \ldots, \}$ και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης

$$P \;=\; \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots & p_{n-1} & p_n & p_{n+1} & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \ddots & \cdots \end{bmatrix}$$

Η πρώτη γραμμή αποτελείται από τα στοιχεία p_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$, όπου $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1$, η γραμμή κάτω από την διαγώνιο περιέχει μονάδες, και όλα τα άλλα στοιχεία του πίνακα είναι μηδέν.

Παράδειγμα 4.7 (Τυχαίος Περίπατος με Γενικά Ακέραια Βήματα). Έστω $\{\xi_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, μια ακολουθία από α.ι. ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $P(\xi_i = k) = f(k)$. Η ακολουθία τ.μ. $X_0 = 0$, $X_n = X_{n-1} + \xi_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, είναι αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων τους ακεραίους, $\mathbb{Z}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης με στοιχεία

$$p_{ij} = f(j-i).$$

Πράγματι

$$\begin{aligned} p_{ij} &= P(X_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots) \\ &= P(X_n + \xi_{n+1} = j | X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots) \\ &= P(X_n + \xi_{n+1} = j | X_n = i). \end{aligned}$$

Αυτό ισχύει διότι η τ.μ. ξ_{n+1} είναι ανεξάρτητη από την ιστορία της διαδικασίας $X_{n-1} = i_{n-1}, X_{n-2} = i_{n-2}, \ldots, X_0$, και συνεπώς ισχύει η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Τέλος, λόγω της ανεξαρτησίας της ξ_{n+1} από την X_n,

$$P(X_n + \xi_{n+1} = j | X_n = i) = P(i + \xi_{n+1} = j) = f(j-i).$$

Μια σημαντική ειδική περίπτωση είναι ο συμμετρικός τυχαίος περίπατος ο οποίος προκύπτει όταν οι ξ παίρνουν τιμές ± 1 με πιθανότητα $\frac{1}{2}$. Σ' αυτή την περίπτωση έχουμε ένα σωματίδιο το οποίο κάθε φορά κάνει ένα βήμα είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά με ίση πιθανότητα ανεξαρτήτως της θέσης του και των προηγουμένων βημάτων. Οι πιθανότητες μετάβασης δίνονται από τις σχέσεις

$$p_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{αν } j = i+1 \\ \frac{1}{2} & \text{αν } j = i-1 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

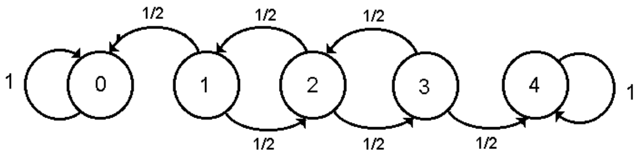
Οι πιθανότητες μετάβασης n βημάτων μπορούν να υπολογιστούν εύκολα μέσω της διωνυμικής κατανομής:

$$p_{ij}^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} n \\ \frac{n+|j-i|}{2} \end{pmatrix} 2^{-n} & \text{αν } n + |j-i| \text{ είναι άρτιος} \\ 0 & \text{αν } n + |j-i| \text{ είναι περιττός ή αν } |j-i| > n \end{cases}. \tag{4.4}$$

Πράγματι, έστω r ο αριθμός των βημάτων προς τα δεξιά και l ο αριθμός των βημάτων προς τα αριστερά. Έχουμε βέβαια $r + l = n$. Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $j \geq i$. Για να πάμε από το i στο j σε n βήματα θα πρέπει $j = i + r - l$ ή $r - l = j - i$. Από τις παραπάνω σχέσεις προκύπτει ότι $r = \frac{n+j-i}{2}$. Φυσικά, αν ο αριθμός αυτός δεν είναι ακέραιος, αυτό σημαίνει ότι δεν είναι δυνατόν να πάμε από το i στο j σε n βήματα. (Για παράδειγμα δεν είναι δυνατόν να πάμε από το 0 στο 1 σε 4 βήματα.) Επίσης για προφανείς λόγους θα πρέπει $j - i \leq n$. Δεδομένου ότι τα βήματα είναι δεξιά ή αριστερά μ.π. 1/2 η (4.4) προκύπτει αμέσως από την διωνυμική κατανομή. Η περίπτωση $j < i$ αντιμετωπίζεται με τον ίδιο τρόπο.

4.6 Κατάταξη καταστάσεων αλυσίδας Markov

Έστω $\{X_n\}$ αλυσίδα Markov με αριθμήσιμο χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P.



Σχήμα 4.7: Καταστροφή του παίκτη με 5 καταστάσεις. Κλάσεις ισοδυναμίας: $\{0\}$,$\{4\}$,$\{1, 2, 3\}$.

4.6.1 Επικοινωνία και Κλάσεις Ισοδυναμίας Αλυσίδας Markov

Μια κατάσταση j ονομάζεται προσιτή από μια κατάσταση i αν υπάρχει φυσικός n για τον οποίο $P^n_{ij} > 0$, αν δηλαδή μπορούμε να μεταβούμε από το i στο j με n βήματα για ένα τουλάχιστον n. Θα συμβολίζουμε την προσιτότητα με $i \longrightarrow j$ και θα λέμε ότι η i οδηγεί στην j. Αν *επιπλέον* και η i είναι προσιτή από την j, δηλαδή αν $P^m_{ji} > 0$ για κάποιο m, τότε έχουμε και $j \longrightarrow i$ και σ′ αυτή την περίπτωση λέμε ότι οι δύο καταστάσεις επικοινωνούν, το οποίο συμβολίζουμε με $i \longleftrightarrow j$.

Η επικοινωνία είναι σχέση ισοδυναμίας

- Πράγματι, η ανακλαστική ιδιότητα $i \longleftrightarrow i$ ισχύει για κάθε i αφού $P^0_{ii} = 1 > 0$ για κάθε i,
- Η συμμετρική ιδιότητα $i \longleftrightarrow j \Leftrightarrow j \longleftrightarrow i$ ισχύει προφανώς από τον ορισμό,
- Η μεταβατική ιδιότητα $i \longleftrightarrow j$ και $j \longleftrightarrow k \Rightarrow i \longleftrightarrow k$ επίσης ισχύει. Θα δείξουμε πρώτα ότι $i \longrightarrow k$. Πράγματι, επειδή $i \longrightarrow j$, υπάρχει φυσικός n τέτοιος ώστε $P^n_{ij} > 0$ και, παρόμοια, επειδή $j \longrightarrow k$, υπάρχει φυσικός m τέτοιος ώστε $P^m_{jk} > 0$. Από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov $P^{n+m}_{ik} = \sum_{l \in \mathscr{S}} P^n_{il} P^m_{lk} \geq P^n_{ij} P^m_{jk} > 0$ το οποίο σημαίνει ότι $i \longrightarrow k$. Η αντίστροφη κατεύθυνση, δηλαδή ότι $k \longrightarrow i$ αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Με βάση την έννοια της επικοινωνίας μπορούμε να χωρίσουμε τις καταστάσεις μιας αλυσίδας Markov σε κλάσεις ισοδυναμίας. Όλες οι καταστάσεις στην ίδια κλάση ισοδυναμίας επικοινωνούν μεταξύ τους. Μια αλυσίδα Markov η οποία έχει μόνο μία κλάση ισοδυναμίας ονομάζεται *απλή ή αδιαχώριστη.*

4.6.2 Χρόνος πρώτης επίσκεψης σε μια κατάσταση

Έστω ότι η αλυσίδα Markov $\{X_n\}$ ξεκινά την χρονική στιγμή 0 από την κατάσταση i. Θα συμβολίζουμε με T_j τον χρόνο που η αλυσίδα βρίσκεται για πρώτη φορά στην κατάσταση j, δηλαδή

$$T_j = \min\{n > 0 : X_n = j\}.$$

Γενικότερα, αν $A \subset \mathscr{S}$ είναι ένα υποσύνολο του χώρου καταστάσεων, τότε $T_A = \min\{n > 0 : X_n \in A\}$. Θα συμβολίζουμε με $f_{ij}^{(n)} := P(T_j = n | X_0 = i)$ την πιθανότητα να επισκεφθούμε την j για πρώτη φορά μετά από n βήματα ξεκινώντας από την i. Εναλλακτικά, η πιθανότητα αυτή εκφράζεται και ως

$$f_{ij}^{(n)} = P(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_{n-1} \neq j, X_n = j | X_0 = i).$$

Τότε

$$f_{ij} = P_i(T_j < \infty) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} \tag{4.5}$$

είναι η πιθανότητα να επισκεφθεί *κάποτε* η αλυσίδα Markov την κατάσταση j ξεκινώντας από την i.

Ορισμός 4.3. Η κατάσταση j ονομάζεται *επαναληπτική* αν $f_{jj} = 1$ και *μεταβατική* αν $f_{jj} < 1$.

Ορισμός 4.4. Μία αλυσίδα Markov λέγεται *αδιαχώριστη ή ανάγωγη* αν και μόνο αν όλες οι καταστάσεις της επικοινωνούν μεταξύ τους, δηλαδή αν για κάθε ζεύγος από καταστάσεις i και j της αλυσίδας Markov, $i \leftrightarrow j$.

Όταν οι καταστάσεις i και j ταυτίζονται ο χρόνος πρώτης μετάβασης ονομάζεται χρόνος επανόδου. Κατ΄ αναλογίαν έχουμε

$$f_{ii}^{(n)} = P(X_1 \neq i, X_2 \neq i, \ldots, X_{n-1} \neq i, X_n = i | X_0 = i). \tag{4.6}$$

$$f_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ii}^{(n)}$$

είναι η πιθανότητα να επιστρέψει *κάποτε* ο τυχαίος περίπατος την κατάσταση i και $1 - f_{ii}$ η πιθανότητα να μην την επιστρέψει ποτέ. Ο μέσος χρόνος επανόδου είναι η μέση τιμή που αντιστοιχεί στην κατανομή πιθανότητας (4.6) δηλαδή $\mu_{ii} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ii}^{(n)}$.

Αν ο μέσος χρόνος επανόδου είναι πεπερασμένος τότε η κατάσταση ονομάζεται *θετική επαναληπτική*. Αν είναι άπειρος τότε ονομάζεται *μηδενική επαναληπτική*.

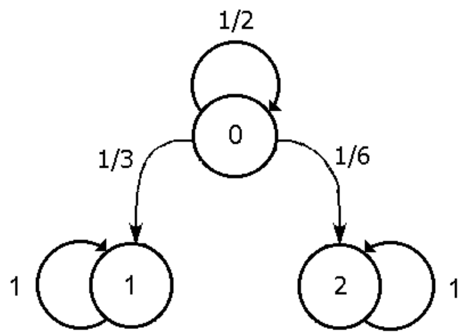
4.6.3 Μια Παρένθεση: Ελλειμματικές Κατανομές

Θα παρεκκλίνουμε για λίγο από την πορεία μας για να διευρύνουμε την έννοια της τ.μ. επιτρέποντάς της να παίρνει την τιμή $+\infty$. Η ανάγκη για την γενίκευση αυτή προκύπτει φυσικά όταν εξετάζουμε τ.μ. όπως ο χρόνος πρώτης εισόδου σε μια κατάσταση j. Για να κάνουμε την συζήτηση πιο συγκεκριμένη ας θεωρήσουμε την παρακάτω αλυσίδα Markov. Υποθέτουμε ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση 0 την χρονική στιγμή 0 και συμβολίζουμε με T_1 τον χρόνο πρώτης εισόδου στην κατάσταση 1. Προκύπτει λοιπόν ότι

$$f_{01}^{(n)} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{3} \qquad \text{για } n = 1, 2, 3, \ldots$$

και, βάσει της (4.5), ότι η πιθανότητα να επισκεφθούμε κάποτε την κατάσταση j είναι

$$f_{01} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \frac{1}{1 - 1/2} = \frac{2}{3}.$$



Σχήμα 4.8:

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι με πιθανότητα $\frac{1}{3}$ δεν θα επισκεφθούμε ποτέ την κατάσταση 1 (διότι θα απορροφηθούμε στην 2). Σάυτή την περίπτωση μπορούμε να πούμε ότι ο χρόνος πρώτης επίσκεψης είναι $+\infty$. Επομένως η κατανομή της T_1 δίνεται από

$$\begin{aligned} P(T_1 = n) &= \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{2}\right)^{n-1} \qquad \text{για } n = 1, 2, 3, \ldots \\ P(T_1 = +\infty) &= \tfrac{1}{3} \end{aligned}$$

Μία τ.μ. X ονομάζεται ελλειμματική αν παίρνει την τιμή ∞ με θετική πιθανότητα. Η αντίστοιχη κατανομή $P(X = n)$ ονομάζεται επίσης ελλειμματική και αθροίζεται σε μια τιμή μικρότερη από την μονάδα: $\sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) = 1 - \alpha < 1$. Η ποσότητα $\alpha > 0$ ονομάζεται έλλειμμα της κατανομής και αντιστοιχεί στην πιθανότητα $P(X = \infty)$.

Τα παραπάνω συνοψίζονται στον εξής ορισμό:

Ορισμός 4.5. Μια τυχαία μεταβλητή X με τιμές στους φυσικούς ονομάζεται *τίμια ή μη ελλειμματική* αν $\lim_{n\to\infty} P(X > n) = 0$. Αντίστοιχα, ονομάζεται ελλειμματική αν το παραπάνω όριο είναι αυστηρά θετικό και σ' αυτή την περίπτωση η τιμή του ορίου $\lim_{n\to\infty} P(X > n) = \alpha > 0$ ονομάζεται *έλλειμμα της τ.μ.* Η ορολογία αυτή χρησιμοποιείται και για την κατανομή της τ.μ.

Θα κλείσουμε αυτή την παρένθεση με την ακόλουθη παρατήρηση: Μια τ.μ. μπορεί να παίρνει πεπερασμένες τιμές με πιθανότητα 1 και παρ'ολα αυτά η μέση της τιμή να είναι άπειρη. Για παράδειγμα έστω X τ.μ. με κατανομή

$$P(X = n) = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \qquad \text{για } n = 1, 2, \ldots.$$

Η κατανομή αυτή είναι τίμια (μη ελλειμματική) αφού

$$P(X \le n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1},$$

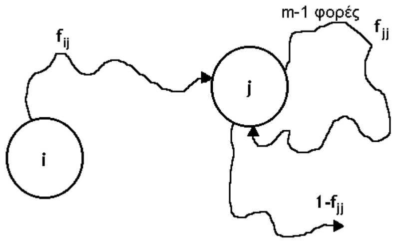
και συνεπώς

$$\lim_{n\to\infty} P(X > n) = 1 - \lim_{\to\infty} P(X \le n) = 1 - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η μέση τιμή απειρίζεται:

$$EX = \sum_{n=1}^{\infty} nP(X = n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} = \infty.$$

Όμως $P(X = \infty) = \lim_{n\to\infty} P(X > n) = 0$ και συνεπώς η X είναι πεπερασμένη με πιθανότητα 1.



Σχήμα 4.9:

4.6.4 Ο συνολικός αριθμός επισκέψεων

Ο συνολικός αριθμός επισκέψεων στην κατάσταση j δίνεται από την έκφραση

$$N_j = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}(X_n = j) \tag{4.7}$$

όπου, ως συνήθως,

$$\mathbf{1}(X_n = j) = \begin{cases} 1 & \text{αν } X_n = j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} .$$

Αριθμός επισκέψεων στην κατάσταση j ξεκινώντας από την κατάσταση i:

$$P_i(N_j = m) = \begin{cases} f_{ij} f_{jj}^{(m-1)}(1 - f_{jj}) & \text{όταν } m = 1, 2, \dots \\ 1 - f_{ij} & \text{όταν } m = 0 \end{cases} . \tag{4.8}$$

Όπως βλέπουμε η κατανομή της τ.μ. $N - j$ είναι γενικευμένη γεωμετρική. Η πιθανότητα να μην επισκεφθούμε την j καμία φορά, ξεκινώντας από την i, είναι εξ' ορισμού $1 - f_{ij}$ (δηλαδή ένα μείον την πιθανότητα να την επισκεφθούμε κάποτε). Για να την επισκεφθούμε συνολικά m φορές πρέπει να πάμε κάποτε από το i στο j (πράγμα που συμβαίνει με πιθανότητα f_{ij}), στη συνέχεια να επιστρέψουμε στο j $m-1$ φορές (συμβαίνει με πιθανότητα $f_{jj}^{(m-1)}$, και τέλος, μετά την m αναχώρηση από την j να μην επιστρέψουμε ποτέ (πιθανότητα $1 - f_{jj}$). Ο συλλογισμός αυτός χρησιμοποιεί βεβαίως και την μαρκοβιανή ιδιότητα από την οποία απορρέει η ανεξαρτησία των παραπάνω ενδεχομένων.

Ο μέσος αριθμός επισκέψεων στην j ξεκινώντας από την i είναι

$$G_{ij} = E_i \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{1}(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P_i(X_n = j) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n. \tag{4.9}$$

4.6.5 Μεταβατικές και Επαναληπτικές Καταστάσεις

Έχουμε ήδη ορίσει μια κατάσταση ως επαναληπτική αν το ενδεχόμενο επιστροφής σ' αυτήν έχει πιθανότητα 1, δηλαδή αν $f_{ii} = 1$. Στην πράξη όμως, δεν είναι πάντα εύκολο να υπολογίσουμε την ποσότητα αυτή. Για το λόγο αυτό θα αναπτύξουμε κριτήρια που μας επιτρέπουν να αποφασίσουμε αν μια κατάσταση είναι επαναληπτική ή μεταβατική με βάση τις πιθανότητες μετάβασης P_{ii}^n.

Ξεκινάμε με μια πιο προσεκτική θεώρηση του συνολικού αριθμού των επισκέψεων σε μια μεταβατική κατάσταση.

Θεώρημα 4.1. (ι) *Αν η κατάσταση j είναι μεταβατική τότε $P_i(N_j < \infty) = 1$ και*

$$G_{ij} = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} \quad \forall i \in \mathscr{S} \tag{4.10}$$

(ιι) *Αν η j είναι επαναληπτική τότε $P_j(N_j = \infty) = 1$ και $G_{jj} = \infty$. Επίσης $P_i(N_j = \infty) = f_{ij}$. Αν $f_{ij} = 0$ τότε $G_{ij} = 0$ άλλως αν $f_{ij} > 0$ τότε $G_{ij} = \infty$.*

Παρατήρηση: Το θεώρημα αυτό περιγράφει την θεμελιώδη διαφορά ανάμεσα σε μεταβατικές και επαναληπτικές καταστάσεις. Αν η j είναι μεταβατική τότε, ασχέτως της αρχικής θέσεως i ο αριθμός των επισκέψεων στην j θα είναι πεπερασμένος και ο μέσος αριθμός των επισκέψεων αυτών θα είναι επίσης πεπερασμένος. Αντιθέτως, αν η j είναι επαναληπτική, τότε ξεκινώντας από το j θα επιστρέφουμε πάντα και ο συνολικός αριθμός επισκέψεων θα είναι άπειρος (και κατά συνέπεια και η μέση του τιμή θα είναι άπειρη).

Απόδειξη *(ι)* Υποθέτουμε ότι η j είναι μεταβατική κατάσταση και επομένως $f_{jj} < 1$. Τότε

$$P_i(N_j = \infty) = \lim_{m\to\infty} P_i(N_j > m) = \lim_{m\to\infty} f_{ij} f_{jj}^m = 0.$$

Επίσης

$$G_{ij} = E_i N_j = \sum_{m=1}^{\infty} m P_i(N_j = m) = \sum_{m=1}^{\infty} m f_{ij} f_{jj}^{m-1}(1 - f_{jj}) = \frac{f_{ij}}{1 - f_{jj}} < \infty.$$

(ιι) Υποθέτουμε ότι η j είναι επαναληπτική. Τότε $f_{jj} = 1$ και $P_i(N_j = \infty) = f_{ij}$. Όταν $i = j$, $P_j(N_j = \infty) = f_{jj} = 1$. Όταν μια τ.μ. είναι άπειρη με μη μηδενική πιθανότητα η μέση της τιμή είναι άπειρη. ∎

Έστω j μια μεταβατική κατάσταση. Εφ' όσον $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n = G_{ij} < \infty$ για κάθε $i \in \mathscr{S}$ βλέπουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0$.

Μια αλυσίδα Markov ονομάζεται μεταβατική όταν όλες οι καταστάσεις της είναι μεταβατικές και επαναληπτική όταν όλες οι καταστάσεις της είναι επαναληπτικές.

Αν $|\mathscr{S}| < \infty$ (δηλαδή η αλυσίδα Markov έχει πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, τότε πρέπει να έχει τουλάχιστον μια επαναληπτική κατάσταση και συνεπώς δεν μπορεί να είναι μεταβατική. Πράγματι, αν η αλυσίδα ήταν μεταβατική τότε $\lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0 \quad \forall i, j \in \mathscr{S}$. Αλλά $1 = \sum_{j\in\mathscr{S}} P_{ij}^n$ και παίρνοντας όρια, $1 = \sum_{j\in\mathscr{S}} \lim_{n\to\infty} P_{ij}^n = 0$ το οποίο είναι άτοπον.

Ορισμός 4.6. Η κατάσταση $a \in \mathscr{S}$ ονομάζεται απορροφητική αν $P_{aa} = 1$.

Πρόταση 4.1. Έστω i επαναληπτική κατάσταση και $i \longrightarrow j$. Τότε η j είναι επίσης επαναληπτική και $f_{ij} = f_{ji} = 1$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι $i \neq j$ άλλως η πρόταση είναι τετριμμένη. Εφ' όσον $i \longrightarrow j$ $f_{ij} > 0$ και

$$P_{ij}^{n} > 0 \tag{4.11}$$

για κάποιο $n \in \mathbb{N}$. Έστω n_0 το μικρότερο n για το οποίο η (4.11) ισχύει. Επομένως υπάρχει μονοπάτι $i \to i_1 \to i_2 \to \cdots \to i_{n_0-1} \to j$ τέτοιο ώστε $P_{ii_1}P_{i_1i_2}\cdots P_{i_{n_0-1},j} > 0$ και $i_k \notin \{i,j\}$ για $k = 1, 2, \ldots, n_0 - 1$ (άλλως ο n_0 δεν θα ήταν ο μικρότερος ακέραιος για τον οποίο η (4.11) ισχύει). Θα δείξουμε πρώτα ότι $f_{ji} = 1$ δια της εις άτοπον απαγωγής. Ας υποθέσουμε ότι $f_{ji} < 1$. Τότε, ξεκινώντας από το j, υπάρχει θετική πιθανότητα να μην φθάσουμε ποτέ στο i και συνεπώς, ξεκινώντας από το i, με πιθανότητα

$$P_{ii_1}P_{i_1i_2}\cdots P_{i_{n_0-1},j}(1 - f_{ji}) > 0$$

δεν θα επιστρέψουμε ποτέ στο i. Αυτό όμως αντιβαίνει στην υπόθεση ότι η i είναι επαναληπτική. Συνεπώς $f_{ji} = 1$.

Εφ' όσον $f_{ji} = 1$, υπάρχει φυσικός n_1 τέτοιος ώστε $P_{ji}^{n_1} > 0$. Τότε $P_{jj}^{n_1+n+n_0} \geq P_{ji}^{n_1}P_{ii}^{n}P_{ij}^{n_0}$ (από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov) και συνεπώς

$$G_{jj} \geq \sum_{n=0}^{\infty} P_{jj}^{n_1+n+n_0} \geq P_{ji}^{n_1}P_{ij}^{n_0}\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^{n} = P_{ji}^{n_1}P_{ij}^{n_0}G_{ii} = \infty$$

απ' όπου προκύπτει ότι η j είναι επαναληπτική. Αφού η j είναι επαναληπτική, επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα του πρώτου μέρους συμπεραίνουμε ότι $f_{ij} = 1$. ∎

Ένα σύνολο καταστάσεων C ονομάζεται κλειστό όταν $f_{ij} = 0$ $\forall i \in C, j \notin C$. Ισοδύναμα, το C είναι κλειστό αν $P_{ij}^{n} = 0$ $\forall i \in C, j \notin C$. Ισοδύναμα, το C είναι κλειστό αν $P_{ij} = 0$ $\forall i \in C, j \notin C$.

Πράγματι, $P_{ij}^2 = \sum_{k \in \mathscr{S}} P_{ik}P_{kj} = \sum_{k \in C} P_{ik}P_{kj} = 0$ και γενικότερα, η ισοδυναμία ανάμεσα στις συνθήκες 2 και 3 προκύπτει με επαγωγή.

Παράδειγμα 4.8. Για την αλυσίδα με σύνολο καταστάσεων $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ και πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 & 1/5 \\ 0 & 0 & 0 & 1/6 & 1/3 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

έχουμε τρεις κλάσεις, $C_1 = \{0\}$ (επαναληπτική κατάσταση και μάλιστα απορροφητική), $C_2 = \{3, 4, 5\}$ (επαναληπτικές καταστάσεις) και $\{1, 2\}$ (μεταβατικές καταστάσεις). Τα C_1, C_2 είναι κλειστά σύνολα.

Θεώρημα 4.2. *Αν $P_{ij}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n z^n$ συμβολίζει την γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας P_{ij}^n και $F_{ij}(z) := \sum_{n=0}^{\infty} f_{ij}^{(n)} z^n$ την πιθανογεννήτρια συνάρτηση της κατανομής $f_{ij}^{(n)}$, τότε*

$$P_{ii}(z) = \frac{1}{1-F_{ii}(z)} \tag{4.12}$$

$$P_{ij}(z) = F_{ij}(z)P_{jj}(z) \tag{4.13}$$

Από τις δύο αυτές σχέσεις προκύπτει επίσης ότι $P_{ij}(z) = \frac{F_{ij}(z)}{1-F_{jj}(z)}$.

Απόδειξη: Ξεκινάμε με την υπενθύμιση ότι $P_{ij}^0 = 0$ αν $i \neq j$ και $= 1$ αν $i = j$, ενώ $f_{ij}^{(0)} = 0$ $\forall i, j \in \mathscr{S}$. Η βασική σχέση που οδηγεί στις (4.12), (4.13) είναι η

$$P_{ij}^n = \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{n-k} \qquad \text{για κάθε } i, j \in \mathscr{S} \text{ και } n \geq 1. \tag{4.14}$$

Για να διαπιστώσουμε ότι η (4.14) ισχύει αρκεί να παρατηρήσουμε ότι το ενδεχόμενο $A := \{X_n = j\}$ μπορεί να γραφτεί σαν $\cup_{k=1}^{n}(B_k \cap A)$ όπου $B_k = \{X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_k - 1 \neq j, X_k = j\}$. Τα σύνολα $B_k \cap A$ είναι ξένα μεταξύ τους για $k = 1, 2, \ldots, n$ και συνεπώς $P_i(A) = \sum_{k=1}^{n} P_i(B_k \cap A)$. Αλλά

$$\begin{aligned} P_i(B_k \cap A) &= P_i(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_k - 1 \neq j, X_k = j, X_n = j) \\ &= P(X_n = j | X_0 = i, X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_k - 1 \neq j, X_k = j) \\ &\qquad \cdot P_i(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_k - 1 \neq j, X_k = j). \end{aligned}$$

Το τελευταίο αυτό γινόμενο, από την Μαρκοβιανή ιδιότητα, είναι ίσο με

$$P(X_n = j | X_k = j) P_i(X_1 \neq j, X_2 \neq j, \ldots, X_k - 1 \neq j, X_k = j) = P_{jj}^{n-k} f_{ij}^{(k)},$$

και αθροίζοντας ως προς k παίρνουμε την (4.14). Στη συνέχεια, περνάμε από τις πιθανότητες στις πιθανογεννήτριες πολλαπλασιάζοντας την (4.14) με z^n και αθροίζοντας:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n P_{ij}^n = \sum_{n=1}^{\infty} z^n \sum_{k=1}^{n} f_{ij}^{(k)} P_{jj}^{n-k}.$$

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης αυτής γράφεται ως $P_{ij}(z) - \delta_{ij}$ όπου

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{αν } i \neq j \\ 1 & \text{αν } i = j \end{cases}$$

ενώ το δεξιό, αναστρέφοντας την σειρά των αθροισμάτων γίνεται

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} z^{n-k} P_{jj}^{n-k} z^k f_{ij}^{(k)} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} z^k f_{ij}^{(k)} \right) \left(\sum_{n=k}^{\infty} z^{n-k} P_{jj}^{n-k} \right) = F_{ij}(z) P_{jj}(z).$$

Συνεπώς έχουμε

$$P_{ij}(z) = \delta_{ij} + F_{ij}(z) P_{jj}(z)$$

και διαχωρίζοντας τις περιπτώσεις $i = j$ και $i \neq j$ προκύπτουν οι (4.12), (4.13). ∎

4.6.6 Ένα κριτήριο για τις επαναληπτικές καταστάσεις

Η παραπάνω πρόταση οδηγεί σε ένα κριτήριο που μας επιτρέπει να ξεχωρίζουμε ποιες καταστάσεις είναι επαναληπτικές και ποιες μεταβατικές. Το κριτήριο αυτό που εκφράζεται από το ακόλουθο θεώρημα είναι συνήθως χρήσιμο σε αλυσίδες Markov με άπειρο (αριθμήσιμο) πλήθος καταστάσεων.

Θεώρημα 4.3. *Η κατάσταση i είναι επαναληπτική αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n = \infty$ και μεταβατική αν $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n < \infty$.*

Απόδειξη: Από την σχέση (4.12) έχουμε ότι

$$\lim_{z\to 1} P_{ii}(z) = \lim_{z\to 1} \frac{1}{1-F_{ii}(z)} = \frac{1}{1-\lim_{z\to 1} F_{ii}(z)}. \tag{4.15}$$

Από τον ορισμό των $P_{ii}(z)$ και $F_{ii}(z)$ όμως ισχύει ότι

$$\lim_{z\to 1} P_{ii}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$$

και

$$\lim_{z\to 1} F_{ii}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{ii}^{(n)} = f_{ii}.$$

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι αν η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n$ αποκλίνει (δηλαδή είναι άπειρη) τότε υποχρεωτικά $f_{ii} = 1$ το οποίο σημαίνει ότι η κατάσταση i είναι επαναληπτική, ενώ αν η σειρά συγκλίνει (δηλαδή είναι πεπερασμένη) τότε $f_{ii} < 1$ που σημαίνει ότι η i είναι μεταβατική. ∎

Θα εφαρμόσουμε τώρα το θεώρημα 4.3 για να εξετάσουμε τον συμμετρικό τυχαίο περίπατο του παραδείγματος 4.7. Όλες οι καταστάσεις ενός τυχαίου περιπάτου είναι μεταβατικές όταν $p \neq q$ ή επαναληπτικές αν $p = q = \frac{1}{2}$. Δεδομένου ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν, αρκεί να εξετάσουμε την κατάσταση 0. Από την (4.4) έχουμε

$$P_{00}^{2n} = \binom{2n}{n} p^n q^n.$$

Δεδομένου ότι από τον τύπο του Stirling

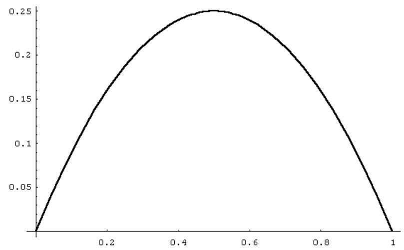
$$\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} 4^n,$$

ισχύει ότι

$$P_{00}^{2n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(4p(1-p)\right)^n.$$

Συνεπώς, αν $p \neq q$, τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{2n}$ συγκλίνει ή αποκλίνει ανάλογα με την σειρά

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \left(4p(1-p)\right)^n.$$



Σχήμα 4.10: Η συνάρτηση $p(1-p)$, όταν το p κυμαίνεται μεταξύ 0 και 1, έχει maximum ίσο με 1/4 όταν $p = 1/2$.

Η τελευταία αυτή σειρά όμως συγκλίνει αφού $4p(1-p) < 1$. Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι το 0 (και επομένως και όλες οι άλλες καταστάσεις) είναι μεταβατική κατάσταση. Οταν όμως $p = q = \frac{1}{2}$ τότε η σειρά $\sum_{n=0}^{\infty} P_{00}^{2n}$ συγκλίνει ή αποκλίνει ανάλογα με την

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

η οποία είναι γνωστό ότι αποκλίνει. Σ' αυτή την περίπτωση λοιπόν το 0 και όλες οι άλλες καταστάσεις είναι έμμονες.

4.6.7 Περιοδικές καταστάσεις

Μια κατάσταση i ονομάζεται περιοδική με περίοδο $d \in \mathbb{N}$ αν

$$d = \text{ Μέγιστος Κοινός Διαιρέτης } \{n : P_{ii}^n > 0\}$$

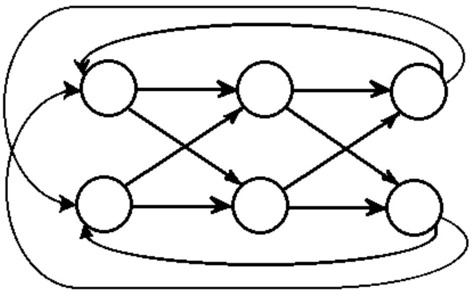
δηλαδή το d είναι ο μέγιστος κοινός διαιρέτης του συνόλου όλων των φυσικών αριθμών για τους οποίους η πιθανότητα P_{ii}^n είναι αυστηρά θετική. Αν $d = 1$ τότε η αλυσίδα ονομάζεται *απεριοδική*.

Στην αλυσίδα Markov της οποίας ο γράφος απεικονίζεται στο ακόλουθο σχήμα κάθε κατάσταση έχει περίοδο 3.

Κάθε αλυσίδα για την οποία υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $P_{ij}^n > 0$ για $n \geq n_0$ έχει περίοδο 1, δηλαδή είναι απεριοδική.

Θεώρημα 4.4. *Αν δύο καταστάσεις, i, j, επικοινωνούν τότε έχουν την ίδια περίοδο. Αν η i είναι απεριοδική τότε και η j είναι απεριοδική.*

Απόδειξη: Εφ' όσον η $i \longrightarrow j$, εξ ορισμού υπάρχει n τέτοιο ώστε $P_{ij}^n > 0$. Έστω k το μικρότερο τέτοιο n. Παρομοίως, έστω l το μικρότερο n για το οποίο $P_{ji}^n > 0$. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό $\mathscr{E}_i := \{n : P_{ii}^n > 0\}$, $\mathscr{E}_j := \{n : P_{jj}^n > 0\}$ οι περίοδοι των καταστάσεων i και



Σχήμα 4.11: Μια αλυσίδα με περίοδο 3.

j είναι $d_i =$ Μ.Κ.Δ.$\mathscr{E}_i$ (δηλαδή ο μέγιστος κοινός διαιρέτης όλων των ακεραίων που ανήκουν στο σύνολο $\mathscr{E}_i$) και $d_j =$ Μ.Κ.Δ.$\mathscr{E}_j$. Από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov έχουμε

$$P_{ii}^{k+l} \geq P_{ij}^{k} P_{ji}^{l} > 0 \qquad P_{jj}^{k+l} \geq P_{ji}^{l} P_{ij}^{k} > 0$$

Συνεπώς $k+l \in \mathscr{E}_1$ και $k+l \in \mathscr{E}_2$ το οποίο σημαίνει ότι[1]

$$d_i \mid k+l \tag{4.16}$$

και

$$d_j \mid k+l \tag{4.17}$$

Έστω $m_i \in \mathscr{E}_i$, και $m_j \in \mathscr{E}_j$ δύο οποιοιδήποτε φυσικοί που ανήκουν στα αντίστοιχα σύνολα. Από τις εξισώσεις Chapman-Kolmogorov έχουμε πάλι

$$P_{ii}^{k+m_j+l} \geq P_{ij}^{k} P_{jj}^{m_j} P_{ji}^{l} > 0 \qquad P_{jj}^{k+m_i+l} \geq P_{ji}^{l} P_{ii}^{m_i} P_{ij}^{k} > 0$$

Από την πρώτη σχέση συνάγουμε ότι $k+m_j+l \in \mathscr{E}_i$ και συνεπώς $d_i \mid k+m_j+l$. Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν μας και την (4.16) συμπεραίνουμε ότι θα πρέπει το d_i να διαιρεί υποχρεωτικά το m_j. Όμοια, από την δεύτερη σχέση συνάγουμε ότι $k+m_i+l \in \mathscr{E}_j$ και επομένως $d_j \mid k+m_i+l$ το οποίο, μαζί με την (4.17) μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι το d_j πρέπει να διαιρεί το m_i. Εχουμε λοιπόν

$$d_j \mid m_i \ \forall m_i \in \mathscr{E}_i \qquad \text{και} \qquad d_i \mid m_j \ \forall m_j \in \mathscr{E}_j \tag{4.18}$$

Εφόσον το d_j είναι διαιρέτης όλων των στοιχείων του $\mathscr{E}_i$ θα πρέπει να διαιρεί τον ΜΚΔ του $\mathscr{E}_j$ που είναι ο d_i, δηλαδή

$$d_j \mid d_i. \tag{4.19}$$

Όμοια, από την δεύτερη σχέση της (4.18) συμπεραίνουμε ότι

$$d_i \mid d_j. \tag{4.20}$$

[1]Ο συμβολισμός $m \mid n$ όπου m, n είναι ακέραιοι σημαίνει ότι ο m διαιρεί τον n δηλαδή ότι υπάρχει φυσικός a τέτοιος ώστε $n = a \cdot m$. Για παράδειγμα, $2|10$ εφόσον $10 = 5 \cdot 2$. Αντίθετα το 2 δεν διαιρεί το 3 (συμβολικά $2 \not| 3$) αφού η σχέση $3 = 2a$ δεν ισχύει για κανένα φυσικό.

Οι (4.19) και (4.20) όμως μπορεί να ισχύουν ταυτόχρονα μόνο αν $d_i = d_j$, αν δηλαδή οι δύο καταστάσεις έχουν την ίδια περίοδο. ∎

Ας εξετάσουμε μερικές από τις αλυσίδες Markov που έχουμε γνωρίσει μέχρι στιγμής από την άποψη της περιοδικότητας. Οι μεταβατικές καταστάσεις της αλυσίδας του σχήματος 4.3 (καταστροφή του παίκτη) είναι περιοδικές με περίοδο 2. Οι απορροφητικές καταστάσεις είναι βέβαια απεριοδικές. Η αλυσίδα των Ehrenfest (παράδειγμα 4.1) είναι περιοδική με περίοδο 2. Η αλυσίδα του παραδείγματος 4.2 (πρότυπο διάχυσης Bernoulli-Laplace) είναι απεριοδική. Η αλυσίδα του παραδείγματος 4.3 είναι επίσης απεριοδική. Ας εξετάσουμε τώρα την διαδικασία γεννήσεων θανάτων. Υποθέτοντας ότι τα p_k, q_k είναι αυστηρά θετικά (ώστε όλες οι καταστάσεις να επικοινωνούν μεταξύ τους) ισχύει ότι: Αν όλα τα $r_k = 0$ τότε η αλυσίδα είναι περιοδική με περίοδο 2. Αν έστω και ένα $r_k > 0$ τότε η αλυσίδα είναι απεριοδική.

4.7 Πιθανότητες απορρόφησης

Έστω C ένα από τα ανάγωγα κλειστά σύνολα επαναληπτικών καταστάσεων και $f_{iC} = P_i(T_C < \infty)$ η πιθανότητα η αλυσίδα Markov να βρεθεί κάποτε στο C ξεκινώντας από το i. Επίσης συμβολίζουμε με $\mathscr{S}_T$ το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων της αλυσίδας. Χρησιμοποιώντας την Μαρκοβιανή ιδιότητα και εξετάζοντας τα ενδεχόμενα για το πρώτο βήμα από την κατάσταση i βλέπουμε ότι οι πιθανότητες απορρόφησης πρέπει να ικανοποιούν το σύστημα

$$f_{iC} = \sum_{j \in C} P_{ij} + \sum_{j \in \mathscr{S}_T} P_{ij} f_{jC}. \tag{4.21}$$

Τίθεται λοιπόν το ερώτημα κατά πόσον το σύστημα αυτό έχει λύση και σ' αυτή την περίπτωση αν είναι μοναδική. Την απάντηση δίνει το ακόλουθο θεώρημα, στην περίπτωση που το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων είναι πεπερασμένο.

Θεώρημα 4.5. *Αν το σύνολο των μεταβατικών καταστάσεων $\mathscr{S}_T$ είναι πεπερασμένο και C είναι ένα ανάγωγο, κλειστό σύνολο καταστάσεων τότε το σύστημα $|\mathscr{S}_T|$ εξισώσεων με $|\mathscr{S}_T|$ αγνώστους*

$$x_i = \sum_{j \in C} P_{ij} + \sum_{j \in \mathscr{S}_T} P_{ij} x_j \tag{4.22}$$

έχει μοναδική λύση η οποία δίνει τις αντίστοιχες πιθανότητες απορρόφησης, $f_{iC} = x_i$.

Απόδειξη: Εφαρμόζοντας την (4.22) στον εαυτό της έχουμε

$$x_i = \sum_{k \in C} P_{ik} + \sum_{j \in C} \sum_{k \in \mathscr{S}_T} P_{ik} P_{kj} + \sum_{j \in \mathscr{S}_T} \sum_{k \in \mathscr{S}_T} P_{ik} P_{kj} x_j$$

Παρατηρείστε ότι οι δύο πρώτοι όροι στο δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης δίνουν

$$\sum_{k \in C} P_{ik} + \sum_{j \in C} \sum_{k \in \mathscr{S}_T} P_{ik} P_{kj} = P_i(T_C \leq 2).$$

Επομένως

$$x_i = P_i(T_C \leq 2) + \sum_{j \in \mathscr{S}_T} P_{ij}^2 x_j$$

και επαγωγικά

$$x_i = P_i(T_C \leq n) + \sum_{j \in \mathscr{S}_T} P_{ij}^n x_j \qquad \forall n.$$

Ισχύει όμως ότι

$$P_{ij}^n \to 0 \qquad \text{όταν } n \to \infty, \text{ για } j \in \mathscr{S}_T \tag{4.23}$$

και συνεπώς, αφήνοντας το n να πάει στο άπειρο στην παραπάνω εξίσωση, και λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι

$$\lim_{n\to\infty} P_i(T_C \leq n) = P_i(T_C < \infty) = f_{iC},$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η λύση του συστήματος (4.22) πράγματι ικανοποιεί την (4.21).

Απομένει να αποδείξουμε την μοναδικότητα της λύσης, πράγμα που θα κάνουμε με την εις άτοπον απαγωγή. Έστω x_i' μια άλλη λύση της (4.22). Τότε, ονομάζοντας την διαφορά των δύο λύσεων $h_i := x_i - x_i'$ παρατηρούμε ότι

$$h_i = \sum_{j \in \mathscr{S}_T} P_{ij} h_j \qquad i \in \mathscr{S}_T, \tag{4.24}$$

εξίσωση η οποία προκύπτει γράφοντας την αντίστοιχη εξίσωση της (4.22) για τα x_i' και αφαιρώντας κατά μέλη. Εφαρμόζοντας την (4.24) στον εαυτό της έχουμε

$$h_i = \sum_{j \in \mathscr{S}_T} P_{ij}^n h_j \qquad i \in \mathscr{S}_T, \tag{4.25}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας πάλι την (4.23) βλέπουμε ότι $h_i = 0 \ \forall i \in \mathscr{S}_T$. ∎

Σημείωση: Αν ο αριθμός των μεταβατικών καταστάσεων είναι άπειρος τότε το σύστημα (4.22) μπορεί να μην έχει μοναδική λύση. Σ΄ αυτή την περίπτωση αποδεικνύεται ότι οι πιθανότητες απορρόφησης δίδονται από την μικρότερη μη αρνητική λύση του (4.22).

Παράδειγμα 4.9. Η αλυσίδα Markov του παραδείγματος 4.8 έχει όπως είδαμε τρεις κλάσεις ισοδυναμίας, τις $C_1 = \{0\}$ και $C_2 = \{3,4,5\}$ που αποτελούνται από επαναληπτικές καταστάσεις και την $C_3 = \{1,2\}$ που περιέχει μεταβατικές καταστάσεις. Το σύστημα (4.21) για την συγκεκριμένη περίπτωση με $C = \{0\}$ και $\mathscr{S}_T = \{1,2\}$ λαμβάνει την μορφή

$$\begin{aligned} f_{10} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} f_{10} + \frac{1}{4} f_{20} \\ f_{20} &= \frac{1}{5} f_{10} + \frac{2}{5} f_{20} \end{aligned}$$

και έχει λύση $f_{10} = \frac{3}{5}$, $f_{20} = \frac{1}{5}$.

Παράδειγμα 4.10 (Πιθανότητα απορρόφησης σε διαδικασία γεννήσεων - θανάτων). Ας εξετάσουμε την διαδικασία γεννήσεων-θανάτων στην περίπτωση που $p_i = p$, $q_i = q$, $r_i = 0$, για κάθε $i = 1, 2, \ldots$, και $p_0 = 0$, $r_0 = 1$. Σ' αυτή την περίπτωση η αλυσίδα Markov που προκύπτει είναι διαχωρίσιμη (το 0 είναι απορροφητική κατάσταση και όλες οι άλλες είναι μεταβατικές και επικοινωνούν μεταξύ τους). Έστω f_k η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 0 ξεκινώντας από την k. Τότε το σύστημα (4.22) έχει την απλή μορφή

$$f_k = q f_{k-1} + p f_{k+1} \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{4.26}$$

και προφανώς $f_0 = 1$. Η χαρακτηριστική εξίσωση της (4.26) είναι $x = q + px^2$ η οποία έχει ρίζες $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pq}}{2p}$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $q = 1 - p$, έχουμε $\sqrt{1 - 4pq} = \sqrt{1 - 4p + 4p^2} = \sqrt{(p - q)^2} = |p - q|$ και συνεπώς

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = \frac{q}{p}.$$

Επομένως η γενική λύση της (4.26) έχει την μορφή

$$f_k = C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k, \quad k = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4.27}$$

Η συνθήκη $f_0 = 1$ συνεπάγεται ότι

$$f_0 = C_1 + C_2 = 1. \tag{4.28}$$

Ας διαχωρίσουμε τώρα τις εξής τρεις περιπτώσεις:

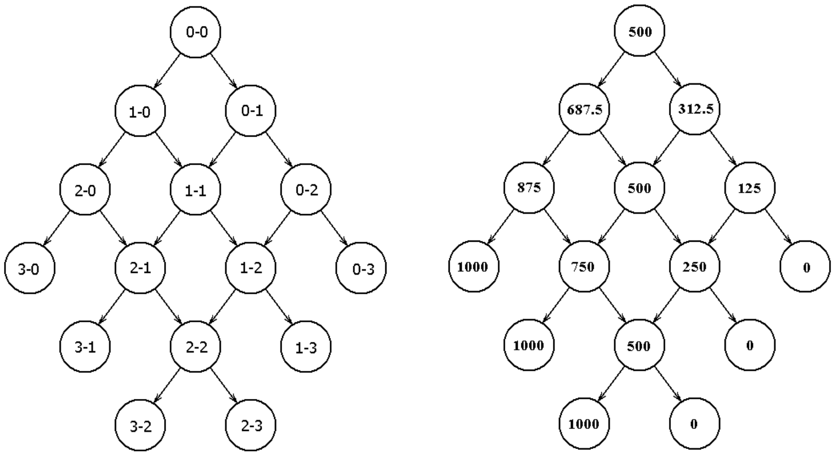
1. $q > p$. Σ' αυτή την περίπτωση ένα βήμα προς τα αριστερά (δηλαδή προς το μηδέν) είναι πιο πιθανό από ένα βήμα προς τα δεξιά και διαισθητικά θα πρέπει να περιμένουμε ότι, ανεξαρτήτως της θέσεως απ' όπου ξεκινάμε, η απορρόφηση στο 0 θα είναι βεβαία. Η ανάλυσή μας το επιβεβαιώνει: Αφού $q > p$, $\frac{q}{p} > 1$ και κατά συνέπεια αν το C_2 ήταν μη μηδενικό, ασχέτως μεγέθους, για κάποιο k θα είχαμε

$$|f_k| = \left| C_1 + C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k \right| > 1.$$

   Επομένως $C_2 = 0$, $C_1 = 1$, και $f_k = 1$ για κάθε $k = 1, 2, \ldots$.

2. $q = p$. Τότε $\frac{q}{p} = 1$ και $f_k = C_1 + C_2 = 1$ για κάθε k, δηλαδή και εδώ η απορρόφηση στο μηδέν είναι βεβαία.

3. $q < p$. Σ' αυτή την περίπτωση οποιαδήποτε μη αρνητικά C_1, C_2 που ικανοποιούν την (4.28) είναι λύσεις της (4.26) που παραμένουν ανάμεσα στο 0 και στο 1 (ώστε να μπορούν να ερμηνευθούν ως πιθανότητες). (Πράγματι, αν το C_1 ήταν αρνητικό τότε, επειδή το $C_2 \left(\frac{q}{p}\right)^k \to 0$ όταν $k \to \infty$, από κάποιο k και ύστερα το f_k θα γινόταν αρνητικό. Αν το C_2 ήταν αρνητικό τότε, λόγω της (4.28), το C_1 θα έπρεπε να ήταν > 1 και επομένως και το f_k θα γινόταν > 1 από κάποιο k και πάνω. Συνεπώς πρέπει να είναι και τα δύο



Σχήμα 4.12: Το πρόβλημα του Chevalier de Meré.

μη αρνητικά.) Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η αποδεκτές λύσεις της (4.26) έχουν την μορφή $c+(1-c)\left(\frac{q}{p}\right)^k$. Ισχυριζόμαστε ότι η μικρότερη από αυτές είναι η $f_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$ που επιτυγχάνεται όταν $c = 0$. Πράγματι ισχύει για κάθε k

$$c+(1-c)\left(\frac{q}{p}\right)^k \geq \left(\frac{q}{p}\right)^k \quad \Leftrightarrow \quad c \geq c\left(\frac{q}{p}\right)^k \quad \Leftrightarrow \quad 1 \geq \left(\frac{q}{p}\right)^k$$

το οποίο είναι αληθές. Συνεπώς η πιθανότητα απορρόφησης στο μηδέν ξεκινώντας από την k δίνεται από τον τύπο $f_k = \left(\frac{q}{p}\right)^k$.

Πρόβλημα 4.1. **Το πρόβλημα του Chevalier de Meré:** Πρόκειται για ένα από τα πρώτα προβλήματα της θεωρίας πιθανοτήτων. Δύο παίκτες παίζουν ένα τυχερό παιχνίδι στο οποίο ο καθένας έχει πιθανότητα επιτυχίας 1/2. Ας υποθέσουμε ότι ρίχνουν ένα τίμιο νόμισμα κατ΄ επανάληψη και ο πρώτος παίκτης που θα κερδίσει τρείς φορές, κερδίζει το παιχνίδι. (Συγκεκριμένα ας υποθέσουμε ότι ο πρώτος παίκτης κερδίζει κάθε φορά αν το νόμισμα έρθει κορώνα ενώ ο δεύτερος κερδίζει αν έρθει γράμματα.) Στην αρχή του παιχνιδιού ο κάθε παίκτης βάζει στο τραπέζι 8 νομίσματα και ο νικητής θα πάρει και τα 16. Το ερώτημα που έθεσε ο de Meré στον φιλόσοφο και μαθηματικό Blaise Pascal ήταν το εξής: Αν το παιχνίδι διακοπεί για κάποιο λόγο ποιος είναι ο πιο δίκαιος τρόπος για να μοιρασθούν τα χρήματα;

Λύση: Παρατηρείστε το ακόλουθο σχήμα. Κάθε βέλος $\searrow$ αναπαριστά μια επιτυχία του παίκτη 1 (κορώνα) ενώ βέλη $\swarrow$ επιτυχίες του παίκτη 2 (γράμματα). Για παράδειγμα, η ακολουθία $\searrow$ $\swarrow$ $\searrow$ $\searrow$, σημαίνει ότι ο παίκτης 1 κερδίζει το πρώτο παιχνίδι, χάνει το δεύτερο, και κερδίζει το τρίτο και το τέταρτο. Σ΄ αυτό το σημείο έχει συμπληρώσει τρεις επιτυχίες και παίρνει όλα τα χρήματα. Οι αριθμοί στους κόμβους του γράφου αναφέρονται στην πιθανότητα επιτυχίας του πρώτου παίκτη. Είναι σαφές ότι οι τελικοί κόμβοι που αντιστοιχούν σε σκορ 3-0, 3-1 και 3-2 για τον πρώτο παίκτη συμπληρώνονται με μονάδες και ότι οι κόμβοι που αντιστοιχούν σε σκορ 0-3, 1-3 και 2-3 συμπληρώνονται με 0. Οι υπόλοιποι κόμβοι συμπληρώνονται με τον εξής απλό κανόνα: Αν ένας κόμβος οδηγεί σε δύο άλλους τότε η τιμή του είναι ο μέσος όρος των δύο αυτών κόμβων. Έτσι προκύπτουν οι τιμές που βλέπουμε στο σχήμα. Προφανώς, αν το παιχνίδι διακοπεί όταν το σκορ είναι ισόπαλο (1-1 ή 2-2) τότε τα χρήματα πρέπει να μοιρασθούν στη μέση.

4.8 Στάσιμες κατανομές αλυσίδων Markov

Ορισμός 4.7. Αν κάποια κατανομή πιθανότητας π στο $\mathscr{S}$ ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\pi_j = \sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i P_{ij} \qquad \forall j \in \mathscr{S} \tag{4.29}$$

τότε θα ονομάζεται *στάσιμη κατανομή της αλυσίδας Markov.* Οι εξισώσεις αυτές ονομάζονται εξισώσεις στοχαστικής ισορροπίας ή στάσιμες εξισώσεις.

Αν ξεκινήσουμε την αλυσίδα Markov με την στάσιμη κατανομή, δηλαδή αν $P(X_0 = j) = \pi_j$ για κάθε j τότε

$$P(X_n = j) = \pi_j \qquad \text{για κάθε } n, \tag{4.30}$$

δηλαδή η αλυσίδα Markov συνεχίζει να έχει αυτή την κατανομή για όλες τις επόμενες χρονικές στιγμές. Πράγματι,

$$P(X_1 = j) = \sum_{i \in \mathscr{S}} P(X_1 = j | X_0 = i) P(X_0 = i) = \sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i P_{ij} = \pi_j$$

από την (4.29). Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα αποδεικνύεται η (4.30). Το προηγούμενο επιχείρημα εφαρμόζεται και αντίστροφα, δηλαδή αν η (4.30) ισχύει για κάποια κατανομή π_j, τότε αυτή θα πρέπει να ικανοποιεί το σύστημα (4.29).

Σημείωση: Το γραμμικό σύστημα (4.29) το οποίο μπορούμε να εκφράσουμε συνοπτικά ως $\pi = \pi P$, (όπου π είναι το διάνυσμα γραμμής που αντιστοιχεί στην στάσιμη κατανομή) είναι ομογενές και επομένως, αν το διάνυσμα π είναι λύση, τότε και το διάνυσμα $c\pi$ είναι λύση για κάθε πραγματικό c. Πρέπει επομένως να συμπληρωθεί με τη *εξίσωση κανονικοποίησης*

Εξίσωση Κανονικοποίησης: $\sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i = 1, \qquad \pi_i \geq 0$

4.8.1 Βασικό Θεώρημα Σύγκλισης για Αλυσίδες Markov

Θεώρημα 4.6 (Βασικό Θεώρημα Σύγκλισης)**.** *Για μια αδιαχώριστη, απεριοδική, θετικά επαναληπτική αλυσίδα Markov*

$$\lim_{n \to \infty} P_i(X_n = j) = \pi_j \quad \forall i, j \in \mathscr{S}$$

όπου π_j είναι η στάσιμη κατανομή που δίνεται από το σύστημα (4.29). Σάυτή την περίπτωση η λύση του συστήματος είναι μοναδική.

Ορισμός 4.8. Έστω $\mu = [\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r]$, $\nu = [\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_r]$, δύο κατανομές πιθανοτήτων στον χώρο καταστάσεων $\mathscr{S} = \{1, 2, \ldots, r\}$. Ορίζουμε ως απόσταση[2] ανάμεσα στις δύο κατανομές την ποσότητα

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} |\mu_i - \nu_i| \,.$$

Το θετικό μέρος ενός πραγματικού αριθμού a ορίζεται ως

$$a^+ := \begin{cases} a & \text{αν } a \geq 0 \\ 0 & \text{αν } a < 0 \end{cases}.$$

Για παράδειγμα το θετικό μέρος του 5 είναι $(5)^+ = 5$ ενώ το θετικό μέρος του -3 είναι $(-3)^+ = 0$. Χρησιμοποιώντας το θετικό μέρος έχουμε τις απλές σχέσεις

$$|x| = x^+ + (-x)^+, \qquad x = x^+ - (-x)^+.$$

Έτσι έχουμε (λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι οι μ και ν είναι κατανομές πιθανότητας),

$$0 = 1 - 1 = \sum_{i=1}^{r} \mu_i - \sum_{i=1}^{r} \nu_i = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i - \nu_i) = \sum_{i=1}^{r} (\mu_i - \nu_i)^+ - \sum_{i=1}^{r} (\nu_i - \mu_i)^+$$

και συνεπώς

$$\begin{aligned} d(\mu, \nu) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} |\mu_i - \nu_i| = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} (\mu_i - \nu_i)^+ + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} (\nu_i - \mu_i)^+ & (4.31) \\ &= \sum_{i=1}^{r} (\nu_i - \mu_i)^+ & (4.32) \end{aligned}$$

Επίσης είναι σαφές ότι για κάθε μ και ν, $d(\mu, \nu) \leq 1$. Αυτό προκύπτει από την ανισότητα

$$|\mu_i - \nu_i| \leq |\mu_i| + |\nu_i| = \mu_i + \nu_i$$

(μια και τα μ_i, ν_i είναι μη αρνητικά). Συνεπώς

$$d(\mu, \nu) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} |\mu_i - \nu_i| \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \mu_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{r} \nu_i = 1.$$

Λήμμα 4.1. *Αν η $Q := [q_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$ είναι ένας στοχαστικός πίνακας, τότε*

---

[2] Μια συνάρτηση απόστασης ανάμεσα σε δύο οποιαδήποτε στοιχεία ενός συνόλου $\mathscr{E}$ είναι μία συνάρτηση $d : \mathscr{E} \times \mathscr{E} \longrightarrow [0, \infty)$ η οποία ικανοποιεί τις συνθήκες

δ1. $d(x, y) = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.

δ2. $d(x, y) = d(y, x)$ για κάθε $x, y \in \mathscr{E}$.

δ3. (Τριγωνική ανισότητα) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ για κάθε $x, y, z \in \mathscr{E}$.

Στην περίπτωση μας το σύνολο $\mathscr{E}$ είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $\{\mu = [\mu_1, \ldots, \mu_r] : \mu_i \geq 0,$ για $i = 1, 2, \ldots, r$ και $\sum_{i=1}^{r} \mu_i = 1\}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε ότι η συνάρτηση απόστασης του ορισμού 4.7 ικανοποιεί τις τρεις παραπάνω συνθήκες.

α) $d(\mu Q, \nu Q) \leq d(\mu, \nu)$

β) Αν όλα τα στοιχεία του πίνακα, $q_{ij} \geq \alpha$, τότε $d(\mu Q, \nu Q) \leq (1-\alpha) d(\mu, \nu)$.

Απόδειξη *α)* Η συνισταμένη j του διανύσματος γραμμής μQ, το οποίο συμβολίζουμε με $(\mu Q)_j = \sum_{i=1}^r \mu_i q_{ij}$, και αντίστοιχα $(\nu Q)_j = \sum_{i=1}^r \nu_i q_{ij}$. Επομένως χρησιμοποιώντας την (4.31),

$$\begin{aligned} d(\mu Q, \nu Q) &= \sum_{j=1}^{r} \left(\sum_{i=1}^{r} (\mu_i - \nu_i) q_{ij} \right)^{+} \leq \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} (\mu_i - \nu_i)^{+} q_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{r} (\mu_i - \nu_i)^{+} \sum_{j=1}^{r} q_{ij} \mathbf{1}(\mu_i > \nu_i) \leq \sum_{i=1}^{r} (\mu_i - \nu_i)^{+} \qquad (4.33) \\ &= d(\mu, \nu) \qquad (4.34) \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το πρώτο σκέλος του λήμματος.

β) Παρατηρούμε ότι δεν μπορούμε να έχουμε $\mu_i > \nu_i$ για κάθε $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, διαφορετικά $1 = \sum_{i=1}^r \mu_i > \sum_{i=1}^r \nu_i = 1$ το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς μερικοί από τους όρους $\mathbf{1}(\mu_i > \nu_i)$ έχουν την τιμή 0 και επομένως $\sum_{i=1}^r \mathbf{1}(\mu_i > \nu_i) q_{ij} \leq 1 - \alpha$. Απ΄ αυτή την ανισότητα και τις ανισότητες (4.34) προκύπτει η β). ∎

Έστω $\mu^{(0)}$ μια κατανομή στο $\mathscr{S}$ και $\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$. Θα δείξουμε ότι η $\mu^{(n)}$ είναι ακολουθία Cauchy.

Θεώρημα 4.7. *Έστω αλυσίδα Markov με $P_{ij} > 0$ για κάθε $i, j \in \mathscr{S}$. Τότε $d(\mu^{(n)}, \mu^{(n+k)}) \to 0$ όταν $n, k \to \infty$.*

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} d(\mu^{(n)}, \mu^{(n+k)}) &= d(\mu^{(0)} P^n, \mu^{(0)} P^{n+k}) \leq (1-\alpha) d(\mu^{(0)} P^{n-1}, \mu^{(0)} P^{n+k-1}) \\ &\leq \cdots \leq (1-\alpha)^n d(\mu^{(0)}, \mu^{(0)} P^k) \leq (1-\alpha)^n \cdot 1 \to 0 \end{aligned}$$

Επομένως η ακολουθία $\mu^{(n)} = \mu^{(0)} P^n$ είναι Cauchy και κατά συνέπεια συγκλίνει. Θέτουμε $\pi := \lim_{n\to\infty} \mu^{(n)}$. Τότε

$$\pi P = \lim_{n\to\infty} \mu^{(n)} P = \lim_{n\to\infty} \mu^{(n+1)} = \pi$$

το οποίο σημαίνει ότι η π ικανοποιεί τις στάσιμες εξισώσεις. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι η λύση αυτή των στάσιμων εξισώσεων είναι μοναδική. Ας υποθέσουμε ότι υπάρχει και μια δεύτερη λύση, $\pi' = \pi' P$. Τότε

$$d(\pi, \pi') = d(\pi P^n, \pi' P^n) \leq (1-\alpha)^n d(\pi, \pi') \leq (1-\alpha)^n \to 0.$$

Συνεπώς $d(\pi, \pi') = 0$ το οποίο σημαίνει ότι $\pi = \pi'$.

Εχουμε λοιπόν αποδείξει ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} \mu^{(0)} P^n$ είναι η μοναδική λύση της $\pi = \pi P$ και ότι δεν εξαρτάται από την αρχική κατανομή $\mu^{(0)}$. Όταν $\mu^{(0)} = (\overbrace{0, 0, \ldots, 0}^{i-1}, 1, 0, \ldots, 0)$ τότε $\mu^{(0)} P^n = (P_{i1}^n, P_{i2}^n, \ldots, P_{ir}^n)$ και $P_{ij}^n \to \pi_j$. ∎

Παράδειγμα 4.11. Έστω X_n αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\{0,1,2\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/6 & 1/3 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Να ευρεθεί η στάσιμη κατανομή.

Λύση: Το σύστημα $\pi = \pi P$ δίνει τις εξισώσεις

$$\pi_0 = \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{6} \tag{4.35}$$

$$\pi_1 = \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{2} + \frac{\pi_2}{3} \tag{4.36}$$

$$\pi_2 = \frac{\pi_0}{3} + \frac{\pi_1}{4} + \frac{\pi_2}{2} \tag{4.37}$$

Μία από αυτές τις εξισώσεις είναι περιττή και θα πρέπει να αντικατασταθεί από την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Πολλαπλασιάζοντας την (4.35) επί 2 και αφαιρώντας την από την (4.36) απαλείφουμε το π_2 και παίρνουμε την σχέση $\pi_1 = \frac{5\pi_0}{3}$. Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην (4.35) προκύπτει ότι $\pi_2 = \frac{3\pi_0}{2}$. Συνεπώς, από την σχέση κανονικοποίησης έχουμε $\pi_0 + \frac{5\pi_0}{3} + \frac{3\pi_0}{2} = 1$ ή $\pi_0 = \frac{6}{25}$ κι' έτσι $\pi_1 = \frac{2}{5}$ και $\frac{9}{25}$. Κατά την επίλυση του συστήματος δεν χρησιμοποιήσαμε την (4.37).

Θα ολοκληρώσουμε την ανάλυση των στάσιμων εξισώσεων μιας ανάγωγης, απεριοδικής αλυσίδας Markov με το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 4.8. *Σε μια ανάγωγη, απεριοδική αλυσίδα η κατανομή ισορροπίας είναι αυστηρά θετική, δηλαδή $\pi_i > 0$ $\forall i \in \mathscr{S}$. Αν $\mu_{ii} := E_i T_i$ συμβολίζει τον μέσο χρόνο επιστροφής στην κατάσταση i τότε*

$$\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}} \tag{4.38}$$

Πριν την απόδειξη αυτού του θεωρήματος θα χρειαστούμε το εξής

Λήμμα 4.2. *Έστω $\{a_n\}$, $n = 0,1,2,\ldots$, μια πραγματική ακολουθία με όριο a. Τότε*

(ι) *για κάθε $z \in (-1,1)$ η δυναμοσειρά $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει και*

(ιι) *ισχύει ότι*

$$a = \lim_{z\to 1}(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4.39}$$

Απόδειξη Λήμματος (ι) Για κάθε $z \in (-1,1)$ υπάρχει r τέτοιο ώστε $|z| < r < 1$. Αφού η ακολουθία $\{a_n\}$ συγκλίνει στο a είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ τέτοιο ώστε $|a_n| < M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς $|a_n z^n| < M r^n$ και αφού $\sum_{n=0}^{\infty} M r^n = \frac{M}{1-r} < \infty$, επομένως η $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ συγκλίνει.

(ιι) Παρατηρούμε ότι για κάθε $z \in (-1, 1)$ ισχύει η ταυτότητα $(1-z)\sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1$. Συνεπώς, προκειμένου να αποδείξουμε την (4.39) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{z\to 1}(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a)\, z^n = 0 \tag{4.40}$$

Αλλά για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιο ώστε $|a_n - a| < \epsilon/2$ όταν $n \geq n_0$. Επίσης, αφού η $|a_n| < M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|a_n - a| < 2M$ για κάθε n. Συνεπώς έχουμε ότι, όταν $0 < z < 1$,

$$\begin{aligned}(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}(a_n - a)\, z^n &\leq (1-z)\sum_{n=0}^{n_0-1}|a_n - a|\, z^n \;+\; (1-z)\sum_{n=n_0}^{\infty}\frac{\epsilon}{2}z^n \\ &\leq 2Mn_0(1-z) + \frac{\epsilon}{2}.\end{aligned}$$

Επομένως, όταν $1 > z > 1 - \frac{\epsilon}{4n_0 M}$, το δεξί μέλος της ανισότητας γίνεται μικρότερο από ϵ. ∎

Απόδειξη του θεωρήματος: Από το βασικό θεώρημα σύγκλισης έχουμε ότι το όριο $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^n$ υπάρχει και είναι ίσο με π_i. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\pi_i = 1/\mu_{ii} > 0$ όταν η i είναι θετική επαναληπτική. Αφαιρώντας την ποσότητα $\frac{1}{\mu_{ii}(1-z)} = \frac{1}{\mu_{ii}}\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ από την σχέση (4.12), προκύπτει η

$$P_{ii}(z) - \frac{1}{\mu_{ii}}\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-F_{ii}(z)} - \frac{1}{\mu_{ii}(1-z)}$$

ή ισοδύναμα, λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $P_{ii}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} P_{ii}^n z^n$, η

$$(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(P_{ii}^n - \frac{1}{\mu_{ii}}\right) z^n = \frac{1-z}{1-F_{ii}(z)} - \frac{1}{\mu_{ii}} \tag{4.41}$$

Αν αφήσουμε τώρα $z \to 1$ στην (4.41) παρατηρούμε ότι το δεξιό μέλος έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ εφ'οσον $F_{ii}(1) = f_{ii} = 1$ (υπενθυμίζουμε ότι κάθε κατάσταση στην αλυσίδα είναι θετικά επαναληπτική). Εφαρμόζοντας τον κανόνα του de l'Hôpital βλέπουμε ότι

$$\lim_{z\to 1}\frac{1-z}{1-F_{ii}(z)} = \lim_{z\to 1}\frac{-1}{-\frac{d}{dz}F_{ii}(z)} = \frac{1}{F'_{ii}(1)} = \frac{1}{\mu_{ii}}.$$

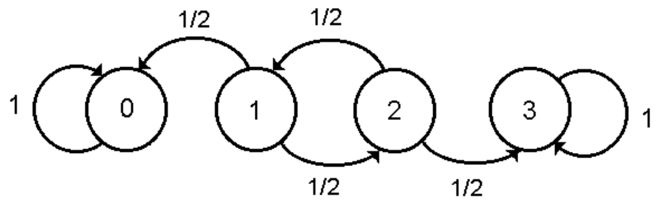
Από τα παραπάνω προκύπτει ότι όταν $z \to 1$ το δεξί μέλος της (4.41) τίνει στο μηδέν. Συνεπώς το ίδιο ισχύει και για το αριστερό, δηλαδή

$$\lim_{z\to 1}(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(P_{ii}^n - \frac{1}{\mu_{ii}}\right) z^n = 0. \tag{4.42}$$

Αλλά από το βασικό θεώρημα σύγκλισης έχουμε ότι $\lim_{n\to\infty} P_{ii}^n = \pi_i$ και συνεπώς από το προηγούμενο λήμμα έχουμε

$$\lim_{z\to 1}(1-z)\sum_{n=0}^{\infty}\left(P_{ii}^n - \frac{1}{\mu_{ii}}\right) z^n = \pi_i - \frac{1}{\mu_{ii}}. \tag{4.43}$$

Συγκρίνοντας τις (4.42), (4.43) προκύπτει ότι $\pi_i = \frac{1}{\mu_{ii}} > 0$. ∎



Σχήμα 4.13:

Παράδειγμα 4.12. Ας εξετάσουμε την ακόλουθη αλυσίδα Markov «(Καταστροφή του παίκτη»):

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Είναι σαφές ότι η αλυσίδα αυτή είναι διαχωρίσιμη με τρεις κλάσεις ισοδυναμίας, $\{0\}$, $\{3\}$ και $\{1, 2, \}$. Οι δύο πρώτες κλάσεις είναι επαναληπτικές (και μάλιστα απορροφητικές) ενώ η τελευταία είναι μεταβατική. Οι μεταβατικές καταστάσεις έχουν περίοδο 2. Δεδομένου ότι η αλυσίδα είναι διαχωρίσιμη δεν περιμένουμε το σύστημα που δίνει τις στάσιμες πιθανότητες να έχει μοναδική λύση. Πράγματι, οι στάσιμες πιθανότητες προκύπτουν από τις εξισώσεις $\pi = \pi P$ που στην περίπτωσή μας είναι

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 + \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_1 &= \frac{1}{2}\pi_2 \\ \pi_2 &= \frac{1}{2}\pi_1 \\ \pi_3 &= \frac{1}{2}\pi_2 + \pi_3 \end{aligned}$$

μαζί με την εξίσωση κανονικοποίησης

$$\pi_0 + \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1$$

Από τις παραπάνω εξισώσεις προκύπτει η λύση $\pi_1 = \pi_2 = 0$ και τα π_0, π_3 είναι απροσδιόριστα αλλά πρέπει να ικανοποιούν την σχέση $\pi_0 + \pi_3 = 1$. Επομένως μπορούμε να γράψουμε

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3] = [\alpha, 0, 0, 1 - \alpha] \qquad \text{όπου } 0 \le \alpha \le 1. \tag{4.44}$$

Υπάρχει δηλαδή εν προκειμένω μία απειρία λύσεων, αφού το α είναι αυθαίρετο. Παρατηρείστε ότι η οριακή συμπεριφορά της αλυσίδας Markov εξαρτάται από την αρχική συνθήκη. Αν η αρχική κατανομή είναι η $[1, 0, 0, 0]$ τότε η αλυσίδα θα παραμείνει για πάντα στην κατάσταση 0, ενώ αν είναι η $[0, 0, 0, 1]$ τότε θα παραμείνει για πάντα στην κατάσταση 3. Αν η αρχική κατανομή είναι η $[0.3, 0, 0, 0.7]$ τότε η αλυσίδα θα παραμείνει σάυτή την κατανομή. ('Ολες αυτές οι κατανομές έχουν την μορφή της γενικής λύσης (4.44) και συνεπώς είναι στάσιμες κατανομές.) Το γενικότερο ερώτημα που προκύπτει τώρα είναι το εξής: Για κάποια αυθαίρετη αρχική κατανομή $[\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3]$ ποια είναι η τιμή του ορίου $\lim_{n\to\infty} P(X_n = i)$;

Ένας τρόπος να απαντήσουμε το παραπάνω ερώτημα είναι υπολογιστικός: Αρκεί να βρούμε το όριο του πίνακα P^n όταν το $n \to \infty$. Ο πίνακας μετάβασης δεύτερης και τρίτης τάξης δίνονται από

$$P^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{5}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & 0 & \frac{5}{8} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και γενικά ο πίνακας μετάβασης n βημάτων (μετά από πράξεις, χρησιμοποιώντας το πρόγραμμα `Mathematica`) δίνεται από

$$P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6} & \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} & \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} & \frac{1}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6} \\ \frac{1}{3} + \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n - 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6} & \frac{-\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} & \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} & \frac{2}{3} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Από την παραπάνω έκφραση βλέπουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} P^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} [P(X_n = 0), P(X_n = 1), P(X_n = 2), P(X_n = 3)] &= \lim_{n\to\infty} (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) P^n \\ &= (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \lim_{n\to\infty} P^n = (\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \left[\mu_0 + \frac{2}{3}\mu_1 + \frac{1}{3}\mu_2, \;\; 0, \;\; 0, \;\; \mu_3 + \frac{2}{3}\mu_2 + \frac{1}{3}\mu_1 \right]. \end{aligned}$$

Η παραπάνω έκφραση μας δίνει την πιθανότητα της «τελικής θέσης» του σωματιδίου αν η αρχική θέση δίνεται από την κατανομή μ.

4.9 Διπλά Στοχαστικές Αλυσίδες Markov

Ορισμός 4.9. Μια αλυσίδα ονομάζεται διπλά στοχαστική αν, για κάθε j στο χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$, $\sum_{i\in\mathscr{S}} P_{ij} = 1$.

Με άλλα λόγια μια αλυσίδα είναι διπλά στοχαστική όταν όχι μόνον όλες οι γραμμές *αλλά και όλες οι στήλες* του πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης αθροίζονται στην μονάδα. Η συμπεριφορά των διπλά στοχαστικών αλυσίδων είναι ιδιαίτερα απλή. Ισχύει μάλιστα το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 4.9. *Η στάσιμη κατανομή μιας αδιαχώριστης διπλά στοχαστικής αλυσίδας Markov με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων, $\mathscr{S} = \{1, 2, \ldots, r\}$ είναι η ομοιόμορφη κατανομή, δηλαδή η μοναδική λύση του συστήματος $\pi_j = \sum_{i=1}^{r} \pi_i P_{ij}$, μαζί με τις εξισώσεις κανονικοποίησης είναι η $\pi_i = \frac{1}{r}$, $i = 1, 2, \ldots, r$.*

Απόδειξη: Το γεγονός ότι σύστημα που δίνει τις στάσιμες πιθανότητες έχει μοναδική λύση είναι συνέπεια του βασικού οριακού θεωρήματος για αδιαχώριστες αλυσίδες. Συνεπώς, αν διαπιστώσουμε ότι η ομοιόμορφη κατανομή αποτελεί λύση του συστήματος μπορούμε να είμαστε βέβαιοι ότι είναι και η μοναδική. Πράγματι

$$\frac{1}{r} = \sum_{i=1}^{r} \frac{1}{r} P_{ij} \Longleftrightarrow 1 = \sum_{i=1}^{r} P_{ij} \qquad \forall j.$$

Η τελευταία αυτή σχέση ισχύει όμως από τον ορισμό της διπλά στοχαστικής αλυσίδας και συνεπώς η ομοιόμορφη κατανομή ικανοποιεί τις στάσιμες εξισώσεις. ∎

4.10 Η Γενική Διαδικασία Γεννήσεων-Θανάτων

Η στάσιμη κατανομή πιθανότητας π δίνεται από τη σχέση $\pi = \pi P$, ή αναλυτικά

$$[\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots] = [\pi_0, \pi_1, \pi_2, \ldots] \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ q_1 & r_1 & p_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q_2 & r_2 & p_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & q_3 & r_3 & p_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q_4 & r_4 & p_4 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & \ddots & \ddots & \end{bmatrix}$$

από την οποία προκύπτει το σύστημα εξισώσεων

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 r_0 + \pi_1 q_1 \\ \pi_1 &= \pi_0 p_0 + \pi_1 r_1 + \pi_2 q_1 \\ \pi_2 &= \pi_1 p_2 + \pi_2 r_2 + \pi_3 q_2 \\ &\vdots \\ \pi_n &= \pi_{n-1} p_{n-1} + \pi_n r_n + \pi_{n+1} q_{n+1} \\ &\vdots \end{aligned} \tag{4.45}$$

Οι (4.45) ονομάζονται επίσης και «σύστημα εξισώσεων ολικής ισορροπίας». Οι εξισώσεις αυτές μπορούν να επιλυθούν και μαζί με την συνθήκη κανονικοποίησης $\sum_{i=0}^{\infty} \pi_i = 1$ να βρούμε τις στάσιμες πιθανότητες της αλυσίδας. Υπάρχει όμως στην συγκεκριμένη περίπτωση και ένα απλούστερο σύστημα εξισώσεων με την ίδια λύση, το οποίο θα εξετάσουμε στη συνέχεια. Ας φανταστούμε μια νοητή γραμμή η οποία διαχωρίζει το σύνολο των καταστάσεων σε δύο τμήματα, στις καταστάσεις $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ και στις καταστάσεις $\{n+1, n+2, n+3, \ldots\}$. Έστω U_k ο αριθμός των φορών που το σωματίδιο διασχίζει την νοητή γραμμή από δεξιά προς τα αριστερά και D_k ο αριθμός των φορών που το σωματίδιο διασχίζει τη γραμμή από τα αριστερά προς τα δεξιά μέσα στο χρονικό διάστημα $[0, k]$. Παρατηρείστε ότι $|U_k - D_k| \leq 1$ γιατί το σωματίδιο δεν είναι δυνατόν να διασχίσει τη γραμμή δυο φορές προς την ίδια κατεύθυνση στη σειρά. Διαιρώντας με k και παίρνοντας το όριο όταν $k \to \infty$,

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \frac{|U_k - D_k|}{k} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

και επομένως

$$\lim_{k\to\infty} \frac{U_k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{D_k}{k}$$

δηλαδή ο ρυθμός με τον οποίο η αλυσίδα μεταβαίνει από το n στο $n+1$ και επομένως διασχίζει τη γραμμή από τα αριστερά προς τα δεξιά είναι ίσος με τον ρυθμό με τον οποίο η αλυσίδα μεταβαίνει από το $n+1$ στο n (διασχίζοντας τη γραμμή από τα δεξιά προς τα αριστερά). Αλλά

$$\lim_{k\to\infty} \frac{U_k}{k} = \pi_n p_n \quad \text{και} \quad \lim_{k\to\infty} \frac{D_k}{k} = \pi_{n+1} q_{n+1}$$

και συνεπώς έχουμε τις εξισώσεις

$$\pi_n p_n = \pi_{n+1} q_{n+1} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{4.46}$$

Η λύση τους είναι απλούστατη: Γράφοντας τις εξισώσεις στη σειρά

$$\begin{aligned} \pi_0 p_0 &= \pi_1 q_1 \\ \pi_1 p_1 &= \pi_2 q_2 \\ \pi_2 p_2 &= \pi_3 q_3 \\ &\vdots \\ \pi_{n-2} p_{n-2} &= \pi_{n-1} q_{n-1} \\ \pi_{n-1} p_{n-1} &= \pi_n q_n \end{aligned}$$

και πολλαπλασιάζοντας κατά μέλη προκύπτει ότι

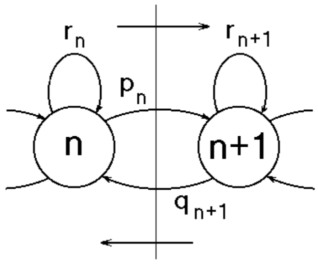
$$\pi_n = \pi_0 \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_{n-1} q_n}, \qquad n = 1, 2, \ldots. \tag{4.47}$$

Ο προσδιορισμός της π_0 γίνεται μέσω των εξισώσεων κανονικοποίησης, δηλαδή

$$\pi_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_{n-1} q_n} \right) = 1$$

ή

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_0 p_1 \cdots p_{n-2} p_{n-1}}{q_1 q_2 \cdots q_{n-1} q_n}} \tag{4.48}$$



Σχήμα 4.14:

εφ' όσον η άπειρη σειρά

$$\sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} \frac{p_{i-1}}{q_i} \tag{4.49}$$

έχει πεπερασμένο άθροισμα. Σ' αυτή την περίπτωση οι στάσιμες πιθανότητες δίνονται από τη σχέση

$$\pi_n = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{p_{i-1}}{q_i}}{1 + \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j} \frac{p_{i-1}}{q_i}}, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{4.50}$$

Αν η σειρά έχει άπειρο άθροισμα τότε όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας είναι μεταβατικές και οι στάσιμες πιθανότητες δεν υπάρχουν.

Παράδειγμα 4.13 (Διαδικασία γεννήσεων-θανάτων με σταθερούς συντελεστές). Έστω $p_n = p$, $q_n = q$, $r_n = r$ για κάθε $n \geq 1$. Η μόνη υπόθεση που κάνουμε προς το παρόν για τα p_0, r_0 είναι βέβαια ότι είναι μη αρνητικά και αθροίζονται στη μονάδα. Από τις (4.47) προκύπτει ότι

$$\pi_n = \pi_0 \frac{p_0}{q} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Αν υποθέσουμε ότι $p < q$ τότε η σειρά (4.49) συγκλίνει και ισούται με $\frac{p_0}{q} \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{p}{q}\right)^{j-1} = \frac{p_0}{q-p}$. Επομένως, όταν $p < q$, η αλυσίδα αυτή έχει την στάσιμη κατανομή

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \frac{q-p}{q-p+p_0} \\ \pi_n &= \frac{p_0}{q-p+p_0} \left(1 - \frac{p}{q}\right) \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} \quad n = 1, 2, \ldots. \end{aligned}$$

η οποία είναι γενικευμένη γεωμετρική. Αν βέβαια $p > q$ τότε όλες οι καταστάσεις είναι μεταβατικές και η αλυσίδα δεν έχει στάσιμη κατανομή. Τέλος, αν $p = q$, μπορεί κανείς να δείξει ότι όλες οι καταστάσεις είναι *μηδενικές επαναληπτικές* και επομένως ότι και πάλι δεν υπάρχει στάσιμη κατανομή.

Στην περίπτωση που $p_0 = p$, $r_0 = 1 - p$, η στάσιμη κατανομή γίνεται γεωμετρική:

$$\pi_n = \left(1 - \frac{p}{q}\right) \left(\frac{p}{q}\right)^n \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Παράδειγμα 4.14. Έστω $p_n = p/(n+1)$, $q_n = q$, $r_n = 1-q-\frac{p}{n+1}$ για κάθε n, όπου υποθέτουμε ότι τα $p > 0$ και $q > 0$ είναι τέτοια ώστε $p+q < 1$. Σ' αυτή την περίπτωση η (4.47) δίνει την σχέση $\pi_n = \pi_0 \frac{p^n}{q^n n!}$ και συνεπώς η σειρά (4.49) παίρνει την μορφή

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\frac{p}{q}\right)^j = e^{p/q} - 1$$

και είναι πάντα πεπερασμένη (για οποιεσδήποτε τιμές του p και q). Η στάσιμη κατανομή είναι Poisson:

$$\pi_n = \frac{1}{n!}\rho^n e^{-\rho}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Παράδειγμα 4.15 (Αλυσίδα Ehrenfest). Ας υποθέσουμε ότι $r_n = 0\ \forall n$, και ότι $p_n = \frac{N-n}{N}$, $q_n = \frac{n}{N}$, για $n = 0, 1, \ldots, N$, άλλως $p_n = q_n = 0$. Ουσιαστικά ο χώρος καταστάσεων περιορίζεται τώρα στο σύνολο $\{0, 1, \ldots, N\}$. Από τις (4.47) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}
\pi_n &= \pi_0 \frac{N(N-1)(N-2)\cdots(N-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} = \pi_0 \frac{N!}{(N-n)!n!} \\
&= \pi_0 \binom{N}{n}, \qquad n = 0, 1, \ldots, N.
\end{aligned}$$

Η π_0 προσδιορίζεται από τη σχέση κανονικοποίησης $\pi_0 \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} = 1$. Όμως το άθροισμα $\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n}$ είναι ίσο με $(1+1)^N = 2^N$. Συνεπώς $\pi_0 = 2^{-N}$ και η στάσιμη κατανομή δίνεται από τη σχέση

$$\pi_n = \binom{N}{n} 2^{-N}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

είναι δηλαδή διωνυμική.

Παράδειγμα 4.16 (Πρότυπο διάχυσης Bernoulli-Laplace). Η αλυσίδα του παραδείγματος 4.3 βλέπουμε ότι είναι επίσης μια διαδικασία γεννήσεων-θανάτων με παραμέτρους $r_n = \frac{2(N-n)}{N^2}$, $p_n = \left(\frac{N-n}{N}\right)^2$, $q_n = \left(\frac{n}{N}\right)^2$ για $n = 0, 1, 2, \ldots, N$ και $r_n = p_n = q_n = 0$ για όλες τις άλλες τιμές, δηλαδή και πάλι μια διαδικασία με πεπερασμένο χώρο καταστάσεων. Εφαρμόζοντας μια ακόμη φορά την (4.47) έχουμε

$$\begin{aligned}
\pi_n &= \pi_0 \frac{N^2(N-1)^2(N-2)^2\ldots(N-n+1)^2}{1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdots n^2} = \pi_0 \left(\frac{N!}{(N-n)!n!}\right)^2 \\
&= \pi_0 \binom{N}{n}^2.
\end{aligned}$$

Η εξίσωση κανονικοποίησης δίνει $\pi_0 \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n}^2 = 1$ και από αυτήν θα υπολογίσουμε το π_0. Πρώτα θα εκφράσουμε το άθροισμα σε πιο συμπαγή μορφή. Δεδομένου ότι $\binom{N}{n} = \binom{N}{N-n}$ το άθροισμα γράφεται και ως

$$\sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} \binom{N}{N-n} = \binom{2N}{N}. \tag{4.51}$$

Η τελευταία αυτή ισότητα δικαιολογείται με το εξής συνδυαστικό επιχείρημα. Ας υπολογίσουμε όλες τις δυνατές ομάδες N ατόμων που μπορούν να επιλεγούν από ένα σύνολο $2N$ ανθρώπων,

N ανδρών και N γυναικών. Ένας τρόπος να κάνουμε τον υπολογισμό είναι να αγνοήσουμε το φύλο και να συνειδητοποιήσουμε ότι πρόκειται απλώς για επιλογή N στοιχείων από ένα σύνολο με $2N$ στοιχεία. Αυτό δίνει το δεξιό μέλος της (4.51). Ο άλλος τρόπος είναι να προσδιορίσουμε πρώτα πόσους άνδρες θα έχει η ομάδα που θα διαλέξουμε. Αν έχει n άνδρες τότε θα πρέπει να έχει $N-n$ γυναίκες και $\binom{N}{n}\binom{N}{N-n}$ θα είναι ο συνολικός αριθμός των ομάδων με n άνδρες. Ο συνολικός αριθμός ομάδων, ανεξαρτήτως του αριθμού των ανδρών που περιέχουν, δίνεται λοιπόν από το αριστερό μέλος της εξίσωσης. Έτσι, η (4.51) προκύπτει μετρώντας με δύο διαφορετικούς τρόπους το ίδιο πλήθος ομάδων.

Από τα παραπάνω είναι σαφές ότι $\pi_0 = \frac{1}{\binom{2N}{N}}$ και επομένως η στάσιμη κατανομή έχει την μορφή

$$\pi_n = \frac{\binom{N}{n}^2}{\binom{2N}{N}} = \frac{\binom{N}{n}\binom{N}{N-n}}{\binom{2N}{N}}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N,$$

είναι δηλαδή υπεργεωμετρική.

4.11 Μέσος χρόνος μετάβασης μεταξύ καταστάσεων

Έστω μ_{ij} ο μέσος χρόνος μετάβασης από μία κατάσταση i σε μια άλλη j (όταν $i = j$ τότε εννοούμε το χρόνο επιστροφής στην κατάσταση j). Οι ποσότητες αυτές συνδέονται με τις σχέσεις

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k \neq j} P_{ik}\mu_{kj} \qquad \text{όταν} \qquad j \neq i.$$

$$\mu_{jj} = 1 + \sum_{k \neq j} P_{jk}\mu_{kj}.$$

Ο μέσος χρόνος επιστροφής στην κατάσταση j μπορεί να υπολογισθεί και κατευθείαν από το θεώρημα 4.5 αν είναι γνωστή η στάσιμη κατανομή:

$$\mu_{jj} = \frac{1}{\pi_j}.$$

Θεωρώντας την κατάσταση j σταθερή και την i μεταβλητή έχουμε ένα γραμμικό σύστημα από την επίλυση του οποίου προκύπτουν οι άγνωστοι μ_{ij}.

Για παράδειγμα ας υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο μετάβασης από την κατάσταση 1 στην κατάσταση 5 στον γράφο της παραγράφου 4.9. Γράφοντας m_i αντί για μ_{i5} έχουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcccccccccc} m_1 & = & 1 & & & + & \frac{1}{3}m_2 & + & \frac{1}{3}m_3 & + & \frac{1}{3}m_4 \\ m_2 & = & 1 & + & \frac{1}{3}m_1 & & & + & \frac{1}{3}m_3 & + & \frac{1}{3}m_4 \\ m_3 & = & 1 & + & \frac{1}{3}m_1 & + & \frac{1}{3}m_2 & & & & \\ m_4 & = & 1 & + & \frac{1}{3}m_1 & + & \frac{1}{3}m_2 & & & & \end{array} \tag{4.52}$$

Η λύση του συστήματος είναι απλή: αφαιρώντας την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη βλέπουμε ότι $m_1 = m_2$ και όμοια, από την τρίτη και την τέταρτη προκύπτει ότι $m_3 = m_4$. Έτσι προκύπτει ότι $m_1 = m_2 = 7.5$ και $m_3 = m_4 = 6$. Συνεπώς χρειάζονται κατά μέσον όρο 7.5 βήματα για να μεταβούμε από την κατάσταση 1 στην 5.

Σαν ένα δεύτερο παράδειγμα ας εξετάσουμε την αλυσίδα Ehrenfest με 6 σφαιρίδια. Ο χώρος καταστάσεων σ' αυτή την περίπτωση είναι $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/6 & 0 & 5/6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/6 & 0 & 4/6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3/6 & 0 & 3/6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4/6 & 0 & 2/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5/6 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Η στάσιμη κατανομή είναι

$$\pi_i = \frac{1}{64}\binom{6}{i} \qquad \text{για } i = 0, 1, \ldots, 6.$$

Ας υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο μετάβασης στην κατάσταση 0 από την κατάσταση 6. Θέτοντας $m_i := \mu_{i0}$ για $i = 1, 2, \ldots, 6$ έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} m_1 &= 1 + \tfrac{5}{6}m_2 \\ m_2 &= 1 + \tfrac{2}{6}m_1 + \tfrac{4}{6}m_3 \\ m_3 &= 1 + \tfrac{3}{6}m_2 + \tfrac{3}{6}m_4 \\ m_4 &= 1 + \tfrac{4}{6}m_3 + \tfrac{2}{6}m_5 \\ m_5 &= 1 + \tfrac{5}{6}m_4 + \tfrac{1}{6}m_6 \\ m_6 &= 1 + m_5 \end{aligned} \tag{4.53}$$

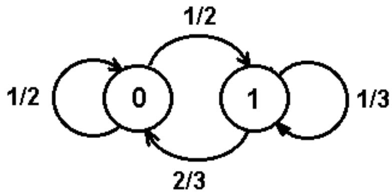
Το σύστημα αυτό δίνει

$$m_1 = 63, \qquad m_2 = 74\tfrac{2}{5}, \qquad m_3 = 78\tfrac{3}{5}, \qquad m_4 = 80\tfrac{4}{5}, \qquad m_5 = 82\tfrac{1}{5}, \qquad m_6 = 83\tfrac{1}{5}.$$

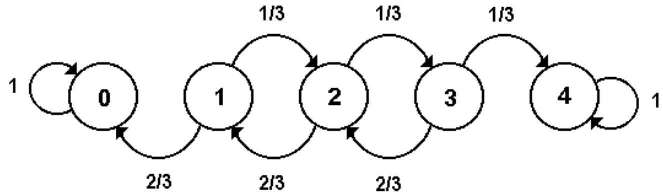
Ο χρόνος πρώτης επανόδου στο 0 μπορεί να υπολογισθεί από την σχέση

$$\mu_{00} = 1 + \mu_{10} = 1 + m_1 = 64.$$

Επισημαίνουμε όμως ότι υπάρχει απλούστερος τρόπος που δεν απαιτεί την επίλυση του συστήματος (4.53), υπό την προϋπόθεση ότι έχουμε υπολογίσει την στάσιμη κατανομή. Από το θεώρημα 4.5 έχουμε $\mu_{00} = \frac{1}{\pi_0} = \frac{1}{\frac{1}{64}\binom{6}{0}} = 64$.



Σχήμα 4.15: Αλυσίδα Markov με δύο καταστάσεις



Σχήμα 4.16:

4.12 Ασκήσεις

Άσκηση 4.1. Έστω ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, ακολουθούν μια διαδικασία Markov με δύο καταστάσεις και διάγραμμα μετάβασης που

1) Ποιος είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης και η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας
2) Έστω ότι, με πιθανότητα 1, $X_0 = 1$. Να ευρεθεί η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $S_3 := X_1 + X_2 + X_3$.
3) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι να παρατηρήσουμε δύο διαδοχικές μονάδες;

Άσκηση 4.2. Έστω αλυσίδα Markov με διάγραμμα μετάβασης που δίνεται στο σχήμα 4.16

όπου $\alpha \in (0, 1)$.

1) Να κατατάξετε τις καταστάσεις της αλυσίδας αυτής.
2) Να ευρεθεί η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 4 όταν το αρχικό σημείο εκκίνησης είναι η κατάσταση 2 σαν συνάρτηση του α.
3) Έστω m_2 ο μέσος χρόνος απορρόφησης (*είτε στην κατάσταση 0 είτε στην 1, δηλαδή ο «μέσος χρόνος που διαρκεί το παιχνίδι»*) ξεκινώντας από την κατάσταση 2. Ποια είναι η τιμή του α που μεγιστοποιεί τον m_2 σαν συνάρτηση του α;

Άσκηση 4.3. Έστω αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S} = \{0, 1, 2\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι η αλυσίδα μη διαχωρίσιμη; Να ευρεθεί η στάσιμη κατανομή. Ξεκινώντας από την κατάσταση 0 ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι να φθάσουμε στην κατάσταση 2;

Άσκηση 4.4. Έστω ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, τα αποτελέσματα διαδοχικών ρίψεων ενός ζαριού (δηλαδή τα ξ_i είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, ομοιόμορφα κατανεμημένες πάνω στους ακεραίους $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$). Ορίζουμε την στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ με βάση τις σχέσεις

$$X_0 = 1, \qquad X_n = \max\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_n\}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots.$$

Από τον παραπάνω ορισμό βλέπουμε ότι X_n είναι ο μεγαλύτερος αριθμός που έχουμε φέρει με το ζάρι μέχρι και την n-οστή ρίψη.

α) Η ανέλιξη $\{X_n\}$ είναι αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Εξηγείστε με δυο λόγια γιατί.

β) Βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P και κατατάξτε τις καταστάσεις

γ) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος μετάβασης από την κατάσταση 1 μέχρι την κατάσταση 6;

δ) Ποια είναι η διασπορά του χρόνου μετάβασης από την 1 στην 6;

ε) Υπολογίστε τις πιθανότητες $P_{33}^n = P(X_n = 3|X_0 = 3)$ και $P_{35}^n = P(X_n = 5|X_0 = 3)$. (Ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν είναι ο μόνος ή ο ευκολότερος τρόπος υπολογισμού.)

Άσκηση 4.5. Δίδονται οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 1/4 & 3/4 & 0 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

α) Κατατάξατε τις καταστάσεις των δύο αλυσίδων Markov με τους παραπάνω πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης.

β) Ποια είναι η στάσιμη κατανομή που αντιστοιχεί στον πίνακα P_1;

Άσκηση 4.6. Έστω ξ_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, τα αποτελέσματα διαδοχικών ρίψεων ενός τίμιου ζαριού. Θέτουμε $X_n = \xi_1 + \xi_2 + \cdots + \xi_n$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Ποια είναι η πιθανότητα το X_n (δηλαδή το άθροισμα των αποτελεσμάτων των διαδοχικών ρίψεων) να είναι πολλαπλάσιο του 3 όταν ο αριθμός ρίψεων είναι μεγάλος;
(*Υπόδειξη:* Βρείτε μια αλυσίδα Markov με κατάλληλο χώρο καταστάσεων που να επιτρέπει τον εύκολο υπολογισμό του ορίου $\lim_{n\to\infty} P(X_n$ είναι πολλαπλάσιο του 3))

Άσκηση 4.7. Έστω ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$ ανεξάρτητες, ισόνομες, ακέραιες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή $P(\xi = k) = \lambda_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Ορίζουμε την στοχαστική ανέλιξη $\{X_n\}$ με βάση τις σχέσεις

$$X_0 = 0, \qquad X_n = \max\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}. \tag{4.54}$$

Δεδομένου ότι

$$X_{n+1} = \max\{X_n, \xi_{n+1}\}$$

διαπιστώνουμε ότι

$$P(X_{n+1} = i | X_n = j, X_{n-1} = j_1, X_{n-2} = j_2, \ldots) = P(X_{n+1} = i | X_n = j),$$

δηλαδή ότι ισχύει η Μαρκοβιανή ιδιότητα. Συνεπώς, η $\{X_n\}$ είναι αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

α) Να ευρεθεί ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης και να κατατάξετε τις καταστάσεις.

β) Ορίζουμε τις ποσότητες $\Lambda_j := \sum_{l=0}^{j} \lambda_l = P(\xi \leq j)$. Δείξτε ότι

$$P(X_n = j | X_0 = i) = P_{ij}^n = \begin{cases} \Lambda_j^n - \Lambda_{j-1}^n & j > i \\ \Lambda_j^n & j = i \\ 0 & j < i \end{cases}$$

Υπόδειξη: Ο καλύτερος τρόπος για τον υπολογισμό της P_{ij}^n βασίζεται στην σχέση

$$P(X_n = j | X_0 = i) = P(X_n \leq j | X_0 =) - P(X_n \leq j - 1 | X_0 = i).$$

γ) Για μια οποιαδήποτε αλυσίδα Markov της οποίας οι καταστάσεις i και j είναι μεταβατικές ορίζουμε την ποσότητα $G_{ij} := \sum_{n=0}^{\infty} P_{ij}^n$ η οποία όπως είδαμε είναι πεπερασμένη. Δείξτε ότι G_{ij} είναι η μέση τιμή του συνολικού αριθμού επισκέψεων της αλυσίδας στην κατάσταση j ξεκινώντας από την κατάσταση i. Υπολογίστε τον πίνακα G_{ij} για την αλυσίδα Markov που περιγράφεται από την σχέση (4.54).

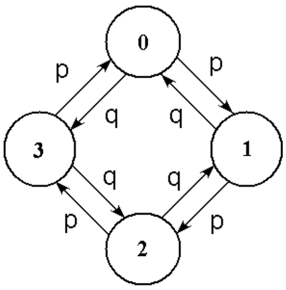
δ) Ας υποθέσουμε ότι η αλυσίδα Markov (4.54) βρίσκεται στην κατάσταση j την χρονική στιγμή 0. Δείξτε ότι ο συνολικός χρόνος παραμονής στην κατάσταση αυτή είναι γεωμετρικά κατανεμημένος. Συγκεκριμένα, αν $N_j := \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(X_n = j)$ είναι ο συνολικός αριθμός επισκέψεων στην j (δηλαδή ο συνολικός χρόνος παραμονής της αλυσίδας σ' αυτή την κατάσταση) τότε $P(N_j = k | X_0 = j) = \Lambda_j^{k-1}(1 - \Lambda_j)$.

ε) Ας ορίσουμε τώρα τις ποσότητες f_{ij} σαν την πιθανότητα να επισκεφθεί κάποτε η αλυσίδα την κατάσταση j ξεκινώντας από την κατάσταση i. Δείξτε ότι

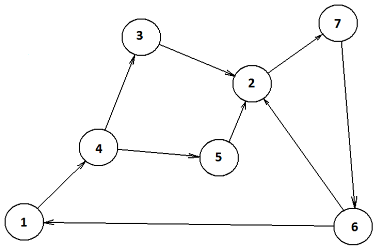
$$G_{ij} = \alpha_{ij} \frac{1}{1 - \Lambda_{ij}}.$$

Από αυτή την σχέση δείξτε ότι

$$f_{ij} = \frac{P(\xi = j)}{P(\xi \geq j)} \qquad \text{για } j > i.$$



Σχήμα 4.17: Κυκλική αλυσίδα Markov.



Σχήμα 4.18: Διάγραμμα που δείχνει τις θετικές πιθανότητες μετάβασης

Άσκηση 4.8. Έστω αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P (Το διάγραμμα μετάβασης δίνεται στο σχήμα 4.17) και ο πίνακας P από την

$$P = \begin{bmatrix} 0 & p & 0 & q \\ q & 0 & p & 0 \\ 0 & q & 0 & p \\ p & 0 & q & 0 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύσατε ότι

$$P^2 = \begin{bmatrix} 2pq & 0 & p^2+q^2 & 0 \\ 0 & 2pq & 0 & p^2+q^2 \\ p^2+q^2 & 0 & 2pq & 0 \\ 0 & p^2+q^2 & 0 & 2pq \end{bmatrix}.$$

Πόσες κλάσεις επικοινωνίας έχουμε σ′ αυτή την αλυσίδα; Ποια είναι η περίοδος της κάθε κατάστασης; Ποια είναι η στάσιμη κατανομή; Ποιος είναι ο μέσος χρόνος μετάβασης από την κατάσταση 2 στην 0;

Άσκηση 4.9. Έστω αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων και διάγραμμα όπως φαίνεται στο σχήμα 4.18.

Θεωρούμε ότι όταν υπάρχει βέλος του συνδέει την κατάσταση i με την κατάσταση j το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα, $P_{ij} > 0$. Να κατατάξετε τις καταστάσεις τις αλυσίδας και να βρείτε την περίοδό τους.

Άσκηση 4.10. Έστω αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_2 & \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_0 \end{bmatrix}$$

όπου $\alpha_i \geq 0$ και $\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 = 1$. Να αποδειχθεί ότι η αλυσίδα αυτή είναι εργοδική αν τουλάχιστον δύο από τα τρία α_i είναι μεγαλύτερα του μηδενός. Ποια είναι η στάσιμη κατανομή σ΄ αυτή την περίπτωση;

Άσκηση 4.11. Θεωρούμε το πρότυπο διάχυσης των Ehrenfest με 3 σφαιρίδια.

α) Να ευρεθούν οι πίνακες P, P^2, P^3.

β) Να ευρεθεί η στάσιμη κατανομή.

γ) Να υπολογισθεί η $E_i T_0$ για κάθε i στον χώρο καταστάσεων.

δ) Να ευρεθεί η $E_i T_i$ για κάθε i.

Άσκηση 4.12. Ένας ανθρακωρύχος είναι παγιδευμένος σε μια σκοτεινή σήραγγα με τρεις στενές διόδους. Η πρώτη από αυτές οδηγεί πίσω στην σήραγγα μετά από 10 κοπιαστικές ώρες. Η δεύτερη επίσης οδηγεί στη σήραγγα μετά από 4 ώρες, ενώ η τελευταία οδηγεί στην επιφάνεια μετά από 5 ώρες. Ο ανθρακωρύχος μέσα στο σκοτάδι και στον πανικό του δεν είναι σε θέση να σκεφτεί ψύχραιμα και κάθε φορά επιλέγει μία από τις τρεις σήραγγες στην τύχη (ανεξάρτητα αν την έχει επιλέξει και στο παρελθόν). Πόσες ώρες κατά μέσο όρο θα χρειαστεί ο ανθρακωρύχος μέχρι να φτάσει στην επιφάνεια;

Άσκηση 4.13 (Έλεγχος αποθεμάτων $s - S$). Η ζήτηση για ένα είδος κάθε μέρα είναι μια τυχαία μεταβλητή με τιμές στους φυσικούς αριθμούς, f_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$. Αρχικά τα αποθέματα είναι S τεμάχια. Έστω X_n το ύψος των αποθεμάτων στην αρχή της μέρας n και Y_n η ζήτηση κατά τη διάρκεια αυτής της ημέρας. Έτσι

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - Y_n & \text{όταν } X_n - Y_n > s \\ S & \text{όταν } X_n - Y_n \leq s \end{cases}$$

Όταν στο τέλος της ημέρας τα αποθέματα πέσουν κάτω από το s, γίνεται καινούργια παραγελία μεγέθους $S - X_n$ έτσι ώστε στην αρχή της επόμενης ημέρας τα αποθέματα αποκαθίστανται στο αρχικό ύψος S. Όταν κάποιο τμήμα της ζήτησης δεν ικανοποιείται άμεσα χάνεται. Έστω ότι η ζήτηση, είναι ισοπίθανα $0, 1, 2, 3, 4$, $s = 2$ και $S = 4$. Να ευρεθεί η κατανομή της στάθμης των αποθεμάτων κάτω από συνθήκες στάσιμης λειτουργίας, καθώς και το ποσοστό της ζήτησης που χάνεται.

Άσκηση 4.14. Μια γάτα κυνηγάει ένα ποντίκι σε μια αποθήκη με δύο δωμάτια. Αρχικά η γάτα βρίσκεται στο δωμάτιο 0 και το ποντίκι στο δωμάτιο 1. Το δωμάτιο στο οποίο βρίσκεται η γάτα κάθε χρονική στιγμή περιγράφεται από μια αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P_1. (Ο χρόνος είναι διακριτός.) Το ποντίκι επίσης κινείται σύμφωνα με μια αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P_2. Όταν η γάτα και το ποντίκι βρεθούν στο ίδιο δωμάτιο, η γάτα το πιάνει και το κυνήγι τελειώνει. Έστω

$$P_1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 \\ 0.3 & 0.7 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad P_2 = \begin{bmatrix} 0.4 & 0.6 \\ 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι η διαδικασία του κυνηγιού μπορεί να περιγραφεί από μια διαδικασία Markov με τρεις καταστάσεις, υπό την προϋπόθεση ότι δεν μας ενδιαφέρει να ξέρουμε σε ποιο δωμάτιο τελειώνει το κυνήγι. Βρείτε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης αυτής της διαδικασίας και την μέση διάρκεια του κυνηγιού.

Άσκηση 4.15. Έστω αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων τους φυσικούς $\{0, 1, 2, \ldots\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 3/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{(n-1)}{n} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \frac{1}{n} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

Να δείξετε ότι όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας επικοινωνούν μεταξύ τους και να βρείτε την στάσιμη κατανομή.

Άσκηση 4.16. Έστω αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων τους φυσικούς $\{0, 1, 2, \ldots\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

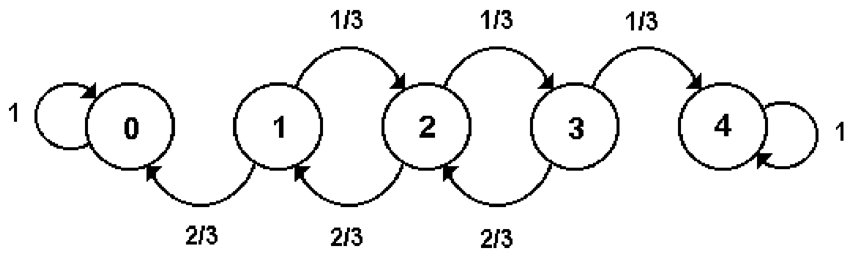
$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 1/5 & 0 & \ldots & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & \ldots & \frac{1}{n} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

Να δείξετε ότι όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας επικοινωνούν μεταξύ τους και να βρείτε την στάσιμη κατανομή.

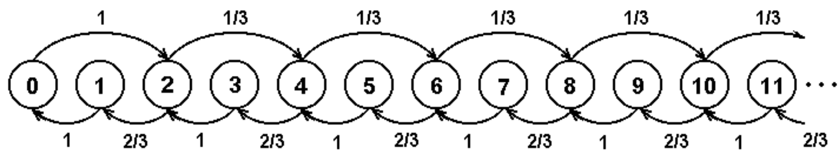
Άσκηση 4.17. Ένας παρατηρητής σε κάποιο σημείο της εθνικής οδού παρατηρεί ότι ένα στα πέντε επιβατικά αυτοκίνητα ακολουθείται από φορτηγό ενώ τρία στα πέντε φορτηγά ακολουθούνται από επιβατικά αυτοκίνητα. Ποιό είναι το ποσοστό των φορτηγών που κινούνται στο τμήμα αυτό του δρόμου κατά την διάρκεια των παρατηρήσεων.

Άσκηση 4.18. Θεωρείστε τον τυχαίο περίπατο στο διάγραμμα του σχήματος 4.19. Ένας παίκτης κερδίζει 4 μονάδες αν καταλήξει στην κατάσταση 4 και δεν κερδίζει τίποτε αν καταλήξει στην κατάσταση 0.

α) Ποιο είναι το μέσο κέρδος αν υποθέσουμε ότι ο παίκτης ξεκινά από την κατάσταση $i = 1, 2, 3$;



Σχήμα 4.19:



Σχήμα 4.20:

β) Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα μελλοντικά κέρδη την χρονική στιγμή n έχουν παρούσα αξία β^n όπου ο παράγων απόσβεσης είναι $\beta = 0.8$. Ποια είναι η παρούσα αξία του μέσου κέρδους σ′ αυτή την περίπτωση;

Άσκηση 4.19. Θεωρήστε την αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ και διάγραμμα μετάβασης το εικονιζόμενο στο σχήμα 4.20. Παρατηρείστε ότι όλες οι καταστάσεις επικοινωνούν μεταξύ τους. Είναι μεταβατικές ή επαναληπτικές; Αν ισχύει το δεύτερο να υπολογίσετε την στάσιμη κατανομή.

Άσκηση 4.20. Έστω αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, 3\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Να δείξετε ότι όλες οι καταστάσεις της αλυσίδας επικοινωνούν μεταξύ τους και να βρείτε την στάσιμη κατανομή.

Άσκηση 4.21. Έστω $\{X_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$, $\{Y_n; n = 0, 1, 2, \ldots\}$, δύο αλυσίδες Markov με χώρο καταστάσεων τους ακεραίους, $\mathbb{Z} := \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}$. Είναι η διαδικασία $Z_n := X_n + Y_n$ υποχρεωτικά αλυσίδα Markov; Εξηγείστε. Θα αλλάζατε την απάντησή σας αν η $\{Y_n\}$ ήταν όχι απλώς μια διαδικασία Markov αλλά μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές;

Άσκηση 4.22. Έστω $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, στοχαστική διαδικασία Markov διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων το σύνολο $\{0, 1, 2, 3, \ldots\}$, και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

α) Να ευρεθεί η στάσιμη κατανομή, π_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ της διαδικασίας αυτής.

β) Ξεκινώντας από την κατάσταση 0, ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι να επιστρέψουμε στο 0; Γενικότερα, ξεκινώντας από την n ποιος είναι ο μέσος χρόνος επιστροφής σ΄ αυτή την κατάσταση;

γ) Υποθέστε ότι $p_n = \frac{1}{n(n-1)(n-2)}$ όταν $n \geq 3$ και 0 διαφορετικά. Απαντήστε τα ερωτήματα α) και β) σ΄ αυτή την περίπτωση.

Άσκηση 4.23. Ένα σωματίδιο εκτελεί τυχαίο περίπατο στους ακεραίους $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$, ξεκινώντας από το μηδέν. Η πιθανότητα να κινηθεί προς τα δεξιά είναι p ενώ η πιθανότητα να κινηθεί προς τα αριστερά είναι $q = 1 - p$. Έστω δεύτερο σωματίδιο το οποίο κινείται με τις ίδιες παραμέτρους, ανεξάρτητα από το πρώτο, ξεκινώντας απότην θέση 10. Υπολογίστε την πιθανότητα να συναντηθούν κάποτε σαν συνάρτηση του p. (*Υπόδειξη:* Έστω X_n η θέση του πρώτου σωματιδίου μετά το n-οστό βήμα και Y_n η θέση του δεύτερου. Τι είδους διαδικασία είναι η $R_n := X_n - Y_n$;)

Άσκηση 4.24. Έστω ένα εξάρτημα του οποίου η διάρκεια ζωής (μετρημένη σε μήνες) είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στους ακεραίους $\{1, 2, 3, 4\}$. Στο τέλος κάθε μήνα, το εξάρτημα επιθεωρείται και αν έχει αστοχήσει (υποστεί βλάβη) τότε αντικαθίσταται με ένα παρόμοιο (του οποίου η διάρκεια ζωής έχει την ίδια κατανομή και είναι ανεξάρτητη από εκείνες των προηγουμένων εξαρτημάτων). Κατασκευάστε μία αλυσίδα Markov η οποία να περιγράφει αυτή την διαδικασία.

α) Ποιος είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης;

β) Ποιες είναι οι στάσιμες πιθανότητες;

γ) Υποθέτουμε ότι το κόστος κάθε αντικατάστασης εξαρτήματος λόγω βλάβης είναι C_1 δρχ. Ποιος είναι ο μέσος ρυθμός κόστους (σε δρχ. ανά μήνα) αυτής της διαδικασίας;

Ας υποθέσουμε τώρα ότι θέτουμε σε εφαρμογή την εξής πολιτική προληπτικών αντικαταστάσεων: Το εξάρτημα αντικαθίσταται είτε όταν υφίσταται βλάβη, είτε προληπτικά, *στο τέλος του τρίτου μήνα λειτουργίας*. Ποια είναι η αλυσίδα Markov που περιγράφει αυτή την διαδικασία;

α) Ποιος είναι πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης σ΄ αυτή την περίπτωση;

β) Τι ποσοστό των αντικαταστάσεων οφείλεται σε βλάβες και τι ποσοστό σε προληπτικές αντικαταστάσεις;

γ) Υποθέτουμε ότι το κόστος κάθε αντικατάστασης εξαρτήματος λόγω βλάβης είναι C_1 δρχ. ενώ το κόστος κάθε προληπτικής αντικατάστασης $C_2 < C_1$. Ποια επιπλέον συνθήκη πρέπει να πληρούν τα C_1, C_2, έτσι ώστε η πολιτική προληπτικής αντικατάστασης να είναι οικονομικά συμφέρουσα;

Άσκηση 4.25. Μια κάλπη περιέχει N σφαιρίδια, a λευκά και b μαύρα με $a + b = N$. Τις χρονικές στιγμές $n = 1, 2, 3, \ldots$, ρίχνουμε ένα νόμισμα που έρχεται κορώνα με πιθανότητα p. Αν έρθει κορώνα τότε διαλέγουμε στην τύχη ένα σφαιρίδιο από την κάλπη και το αντικαθιστούμε με ένα λευκό σφαιρίδιο. Αν έρθει γράμματα τότε διαλέγουμε ένα σφαιρίδιο στην τύχη και το αντικαθιστούμε με ένα μαύρο. Συμβολίζουμε με X_n τον αριθμό των λευκών σφαιριδίων στην κάλπη τη χρονική στιγμή n.

α) Είναι η X_n αλυσίδα Markov;

β) Υπολογίστε τις πιθανότητες μετάβασης p_{ij}.

γ) Έστω $N = 2$. Υπολογίστε τις στάσιμες πιθανότητες σ' αυτή την περίπτωση.

δ) Είναι η αλυσίδα αναστρέψιμη για κάθε N;

ε) Ποια είναι η στάσιμη κατανομή στην γενική περίπτωση;

ζ) Έστω $p = 1$. Σ' αυτή την περίπτωση, τελικά θα απομείνουν μόνο λευκά σφαιρίδια στην κάλπη. Υπολογίστε την μέση τιμή του χρόνου που θα συμβεί αυτό.

Άσκηση 4.26. Έστω μια διαδικασία Markov με σύνολο καταστάσεων $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3/4 & 0 & 1/4 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 1/4 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 0 & 1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

α) Να κατατάξετε τις καταστάσεις της αλυσίδας.

β) Αν v_i, $i = 0, 1, 2, 3, 4$, είναι η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 4 δεδομένου ότι η διαδικασία ξεκινάει αρχικά από την κατάσταση i να υπολογίσετε τις πιθανότητες απορρόφησης v_i.

γ) Γενικότερα θεωρούμε μια διαδικασία Markov με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, 3, \cdots, N\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & \\ q+r & & p & & & & & & & \\ r & q & & p & & & & & & \\ r & & q & & p & & & & & \\ r & & & q & & p & & & & \\ \vdots & & & & \ddots & & \ddots & & & \\ r & & & & & & q & & p & \\ r & & & & & & & q & & p \\ & & & & & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

όπου $p, q, r > 0$ και $p+q+r = 1$. Να δώσετε μια γενική έκφραση για την πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση N σαν συνάρτηση της αρχικής κατάστασης $i = 0, 1, 2, \ldots, N$.

Άσκηση 4.27. Έστω μια αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S} = \{0, 1, 2, \ldots\}$ και ας υποθέσουμε ότι η κατάσταση 0 είναι απορροφητική. Δείξτε ότι η πιθανότητα απορρόφησης στην κατάσταση 0 ξεκινώντας από την κατάσταση i, f_{i0}, δίνεται από το όριο

$$f_{i0} = \lim_{n\to\infty} P_{i0}^n$$

Λύση: Ξεκινώντας από τη σχέση (4.14) (και εξετάζοντας μόνο την μη τετριμμένη περίπτωση $i \neq 0$) παρατηρούμε ότι

$$P_{i0}^n = \sum_{k=1}^{n} f_{i0}^{(k)} P_{00}^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} f_{i0}^{(k)}$$

όπου, στη δεύτερη σχέση λάβαμε υπ' όψιν μας ότι $P_{00}^{n-k} = 1$ αφού η κατάσταση 0 είναι απορροφητική. Αλλά τότε, η ακολουθία $\{P_{i0}^n\}$ είναι αύξουσα και φραγμένη και εξ ορισμού (σχέση (4.5» συγκλίνει στην f_{i0}.

Άσκηση 4.28. Παρατηρούμε τις διαδοχικές ρίψεις ενός νομίσματος που έρχεται κορώνα με πιθανότητα p και γράμματα με πιθανότητα q.

α) Αν T_2 είναι ο χρόνος που απαιτείται μέχρι να εμφανισθούν δύο *διαδοχικές* κορώνες να υπολογίσετε την μέση τιμή ET_2.

β) Θεωρούμε την αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων τον $\{0, 1, 2, \ldots, k\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης τον $(k+1) \times (k+1)$ πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} q & p & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & p & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ q & 0 & 0 & p & & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \ddots & & & \\ q & 0 & 0 & 0 & & 0 & p & 0 \\ q & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & p \\ q & 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & p \end{bmatrix}.$$

Να κατατατάξετε τις καταστάσεις της και να υπολογίσετε την στάσιμη κατανομή.

γ) Η αλυσίδα του ερωτήματος β) μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να υπολογίσουμε τον μέσο χρόνο μέχρι να παρατηρήσουμε k διαδοχικές κορώνες. Να περιγράψετε την διαδικασία και να υπολογίσετε τον ET_k, δηλαδή τον μέσο χρόνο που απαιτείται μέχρι να εμφανιστούν k κορώνες.

Άσκηση 4.29. Θεωρούμε ένα σύστημα ελέγχου ποιότητας που λειτουργεί ως εξής: Τεμάχια ενός προιόντος έρχονται διαδοχικά σε ένα σταθμό ελέγχου. Κάθε τεμάχιο θεωρούμε ότι είναι καλό με πιθανότητα p και ελαττωματικό με πιθανότητα $q = 1 - p$ *ανεξάρτητα από τα άλλα.* Ο σταθμός ελέγχου έχει δύο διαφορετικές φάσεις λειτουργίας οι οποίες εναλλάσσονται μεταξύ τους. Όταν βρίσκεται στην φάση Ι εξετάζει *όλα* τα τεμάχια που έρχονται, ένα–ένα, απορρίπτοντας τα ελαττωματικά και αφήνοντας τα καλά να περάσουν. Όταν ο σταθμός ελέγχου βρει k *διαδοχικά* καλά τεμάχια τότε περνάει στην φάση ΙΙ και αλλάζει τρόπο λειτουργίας. Στην φάση ΙΙ εξετάζει κάθε τεμάχιο που έρχεται με πιθανότητα $\beta > 0$ ενώ με πιθανότητα $1 - \beta$ το αφήνει να περάσει *χωρίς να το ελέγξει.* Αν, σ' αυτή τη φάση, ο σταθμός ελέγχου τύχει να εξετάσει ένα τεμάχιο και το τεμάχιο τύχει να είναι ελαττωματικό τότε το απορρίπτει και επιστρέφει στην φάση Ι όπου εξετάζει όλα τα τεμάχια ανεξαιρέτως, μέχρις ότου, ξανά, να βρεί k διαδοχικά καλά τεμάχια.

α) Να βρείτε μια αλυσίδα Markov που περιγράφει αυτό το σύστημα. (Υπόδειξη: Αρκεί μια μικρή τροποποίηση της αλυσίδας του προβλήματος 1.)

β) Να βρείτε την στάσιμη κατανομή της αλυσίδας Markov.

γ) Να υπολογίσετε το ποσοστό των τεμαχίων που το σύστημα ελέγχου απορρίπτει και το ποσοστό των ελαττωματικών τεμαχίων που περνάει χωρίς να απορριφθεί από το σύστημα.

Κεφάλαιο 5

Εφαρμογές

5.1 Κλαδωτές Ανελίξεις

Έστω ένας οργανισμός που στο τέλος της ζωής του αναπαράγεται και αφήνει ξ απογόνους. Ο αριθμός των απογόνων είναι τ.μ. με τιμές στους φυσικούς και κατανομή $P(\xi = n) = p_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$. (Για να αποφύγουμε την τετριμμένη περίπτωση υποθέτουμε ότι $p_0 < 1$.) Ο καθένας από τους απογόνους αφήνει με τη σειρά του, στο τέλος της δεύτερης γενιάς, ένα τυχαίο αριθμό απογόνων με την ίδια κατανομή όπως ο αρχικός. Υποθέτουμε ανεξαρτησία μεταξύ του αριθμού των απογόνων από οργανισμό σε οργανισμό κι΄ από γενιά σε γενιά.

Έστω X_n το συνολικό μέγεθος του πληθυσμού τη γενιά n και $\xi_i^{(n)}$ ο αριθμός των απογόνων του οργανισμού i της γενιάς n. Στην πραγματοποίηση που απεικονίζεται στο σχήμα 5.1 είναι $X_0 = 1$, $\xi_1^{(0)} = 2$, $X_1 = 2$, $\xi_1^{(1)} = 3$, $\xi_2^{(1)} = 1$, $X_2 = 4$, $\xi_1^{(2)} = \xi_3^{(2)} = \xi_4^{(2)} = 0$, $\xi_2^{(2)} = 4$, $X_3 = 4$. Γενικά

$$X_n = \sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i^{(n-1)}$$

(όπου το παραπάνω άθροισμα θεωρείται ίσο με το 0 αν $X_{n-1} = 0$). Έστω $F(z) = Ez^\xi = \sum_{n=0}^\infty p_n z^n$ η πιθανογεννήτρια του αριθμού των απογόνων κάθε οργανισμού και $G_n(z) := Ez^{X_n}$ η πιθανογεννήτρια συνάρτηση της τ.μ. X_n. Δεδομένης της ανεξαρτησίας των $\xi_i^{(n-1)}$ μεταξύ τους και από το X_{n-1} από την παραπάνω εξίσωση έχουμε

$$E[z^{X_n}|X_{n-1}] = E\left[\prod_{i=1}^{X_{n-1}} z^{\xi_i^{(n-1)}} |X_{n-1}\right] = (F(z))^{X_{n-1}}$$

και παίρνοντας μέση τιμή ως προς X_{n-1}

$$G_n(z) = G_{n-1}(F(z)).$$

Την παραπάνω σχέση μπορούμε να γράψουμε επίσης σαν $G_n(z) = G_{n-1} \circ F(z)$ όπου το σύμβολο $\circ$ δηλώνει τη σύνθεση των δύο συναρτήσεων. Αναδρομικά παίρνουμε

$$G_n(z) = G_0 \circ \overbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F}^{n \text{ όροι}} (z)$$

Στη συγκεκριμένη περίπτωση $X_0 = 1$ μ.π.1 και συνεπώς $G_0(z) = z$ οπότε

$$G_n(z) = F \circ F \circ \cdots \circ F(z). \tag{5.1}$$

5.1.1 Ανάλυση μέσης τιμής

Ο τύπος της (5.1) από μία άποψη λύνει το πρόβλημα πλήρως εφόσον μας δίνει την πιθανογεννήτρια του πληθυσμού σαν συνάρτηση του χρόνου (αριθμού γεννεών). Ομολογουμένως όμως δεν πρόκειται για λύση σε «κλειστή μορφή» υπό την έννοια ότι ο υπολογισμός της είναι κατ' αρχήν δυνατός, αλλά από πρακτική άποψη παρουσιάζει εν γένει μεγάλες δυσκολίες. Προτού επιχειρήσουμε να εξαγάγουμε συμπεράσματα για την συμπεριφορά της κλαδωτής διαδικασίας από τον τύπο (5.1) θα προσπαθήσουμε πρώτα να απαντήσουμε μερικά απλά ερωτήματα. Έστω $m_n := EX_n$ το μέσο μέγεθος του πληθυσμού της n γενεάς.

$$E[X_n | X_{n-1}] = E\left[\sum_{i=1}^{X_{n-1}} \xi_i^{(n-1)} | X_{n-1}\right] = \mu X_{n-1}$$

και παίρνοντας μέσες τιμές ως προς X_{n-1}

$$m_n = \mu m_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Η αναδρομή αυτή μας δίνει αμέσως την μέση τιμή του πληθυσμού της n γενεάς

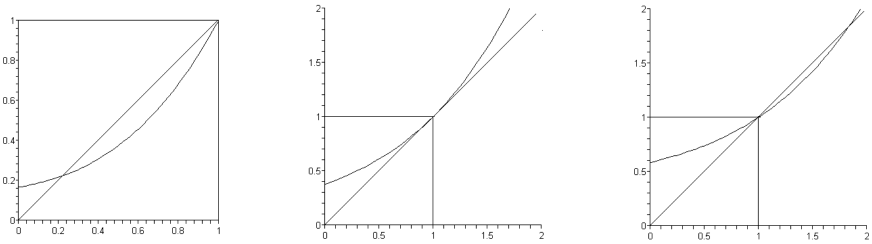
$$m_n = m_0 \mu^n, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

όπου, στην περίπτωσή μας, με ένα αρχικό προγεννήτορα, $m_0 = 1$. Το αποτέλεσμα αυτό θα μπορούσε να επιτευχθεί επίσης υπολογίζοντας την παράγωγο

$$\frac{d}{dz} F \circ F \circ \cdots \circ F(z)|_{z=1}.$$

Όπως βλέπουμε, η συμπεριφορά της κλαδωτής διαδικασίας είναι ριζικά διαφορετική ανάλογα με το εάν ο μέσος αριθμός απογόνων μ ανά οργανισμό είναι μικρότερος ή μεγαλύτερος της μονάδας. Στην πρώτη περίπτωση, κατά μέσο όρο, ο πληθυσμός μειώνεται εκθετικά γρήγορα ενώ στη δεύτερη ο πληθυσμός αυξάνεται εκθετικά γρήγορα. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η *κριτική περίπτωση* $\mu = 1$ στην οποία η μέση τιμή του πληθυσμού παραμένει σταθερή.

Η ανάλυση μέσης τιμής που μόλις είδαμε απαντά μερικά ερωτήματα σχετικά με τη συμπεριφορά της κλαδωτής ανέλιξης αλλά είναι κατά βάση μια ντετερμινιστική ανάλυση η οποία αδυνατεί να αγγίξει μερικές πολύ σημαντικές πτυχές του προβλήματος. Για παράδειγμα είδαμε ότι στην *υπερκριτική* περίπτωση ($\mu > 1$) ο πληθυσμός *κατά μέσον όρο* αυξάνεται εκθετικά γρήγορα. Αυτό δεν αποκλείει όμως την εξαφάνιση του είδους που θα μπορούσε να συμβεί αν, για παράδειγμα, στην αρχή της διαδικασίας ο πρώτος οργανισμός έχει 0 απογόνους.



Σχήμα 5.1: Οι τρεις περιπτώσεις για τις λύσεις της εξίσωσης $z = F(z)$.

5.1.2 Η πιθανότητα εξάλειψης

Η πιθανότητα ότι η γενεά n έχει πληθυσμό 0 ($P(X_n = 0)$) δίνεται από τον τύπο

$$\pi_n := P(X_n = 0) = F \circ F \circ \cdots \circ F(0). \tag{5.2}$$

Είναι προφανές ότι αν η γενεά n έχει πληθυσμό 0 τότε και όλες οι επόμενες γενεές θα έχουν πληθυσμό μηδέν, δηλαδή το είδος θα έχει εκλείψει. Πρέπει να είναι εξ' ίσου σαφές ότι, αν $X_n = 0$, αυτό σημαίνει ή ότι όλοι οι οργανισμοί της γενεάς $n-1$ είχαν 0 απογόνους ή ότι το είδος είχε εκλείψει σε κάποια προηγούμενη γενεά. Ας συμβολίσουμε με $\bar{\pi}_n$ την πιθανότητα ότι το είδος δεν έχει εκλείψει μέχρι και την n–οστή γενεά που σημαίνει

$$\bar{\pi}_n = P(X_0 > 0, X_1 > 0, X_2 > 0, \ldots, X_n > 0).$$

Όμοια,

$$\bar{\pi}_{n+1} = P(X_0 > 0, X_1 > 0, X_2 > 0, \ldots, X_n > 0, X_{n+1} > 0)$$

και επομένως εξάγουμε το συμπέρασμα ότι η ακολουθία $\bar{\pi}_n$ είναι *φθίνουσα*. Ας ορίσουμε $\pi_n := 1 - \bar{\pi}_n$ την πιθανότητα να έχει εκλείψει το είδος μέχρι την n-οστή γενεά. Η ακολουθία π_n είναι αύξουσα άνω φραγμένη (από τη μονάδα) και συνεπώς συγκλίνει. Ας ονομάσουμε το όριο π. Επίσης, από την σχέση (5.2) έχουμε την αναδρομή

$$\pi_n = F(\pi_{n-1})$$

και κατά συνέπεια, αφήνοντας το n να τείνει στο άπειρο (και επικαλούμενοι την συνέχεια της πιθανογεννήτριας συνάρτησης F) βλέπουμε ότι το όριο π πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$\pi = F(\pi) \tag{5.3}$$

Κατά συνέπεια το π είναι μια από τις λύσεις της εξίσωσης $z = F(z)$. Εφ' όσον η $F(z)$ είναι πιθανογεννήτρια συνάρτηση $F(1) = 1$ και επομένως η $\pi = 1$ ικανοποιεί πάντα την (5.3). Από τα παρακάτω σχήματα βλέπουμε επίσης ότι για να υπάρχει λύση της (5.3) μικρότερη της μονάδας θα πρέπει η κλίση της F στο σημείο $z = 1$ να είναι μεγαλύτερη της μονάδας.

Γραφική παράσταση μιας πραγματοποίησης κλαδωτής ανέλιξης.

Ισχύει όμως ότι $F'(1) = \sum_{n=1}^{\infty} np_n = \mu$, ο μέσος αριθμός των απογόνων κάθε οργανισμού. Βλέπουμε λοιπόν ότι αν $\mu \leq 1$ τότε η εξαφάνιση είναι βεβαία. Αντίθετα, αν $\mu > 1$ η πιθανότητα εξάλειψης, π είναι μικρότερη από την μονάδα και δίνεται από την (5.3).

Παράδειγμα 5.1. Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός των απογόνων κάθε οργανισμού είναι γεωμετρικά κατανεμημένος με πιθανογεννήτρια $F(z) = \frac{1}{4-3z}$. Έχουμε $F'(z) = \frac{3}{(4-3z)^2}$ και συνεπώς $F'(1) = 3 > 1$. Αυτό σημαίνει ότι η πιθανότητα εξάλειψης μιας διαδικασίας που ξεκινά με ένα οργανισμό είναι μικρότερη από την μονάδα και δίνεται από την ρίζα της $\pi = \frac{1}{4-3\pi}$, ή $3\pi^2 - 4\pi + 1 = 0$. Η εξίσωση αυτή έχει δύο ρίζες, την μονάδα και την $\pi = 1/3$ που μας δίνει και την πιθανότητα εξάλειψης.

Η παραπάνω ανάλυση έγινε με βάση μια διαδικασία που ξεκινά με 1 μόνο οργανισμό την χρονική στιγμή 0. Αν το μέγεθος του αρχικού πληθυσμού ήταν k τότε είναι εύκολο να δούμε ότι η πιθανότητα εξάλειψης είναι π^k όπου π είναι, όπως πριν, η μικρότερη λύση της (5.3). Ο λόγος είναι ότι εξάλειψη του συνολικού πληθυσμού σημαίνει εξάλειψη των απογόνων καθενός από τους k προγεννήτορες, γεγονότα που συμβαίνουν με πιθανότητα π το καθένα και είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.

5.1.3 Ο συνολικός αριθμός απογόνων μιας κλαδωτής ανέλιξης

Έστω κλαδωτή ανέλιξη $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$ της οποίας ο αρχικός πληθυσμός X_0 είναι ίσος με 1 με πιθανότητα 1 και ο αριθμός των απογόνων κάθε οργανισμού έχει πιθανογεννήτρια $F(z) := \sum_{n=0}^{\infty} p_n z^n$. Ο συνολικός αριθμός απογόνων του προγεννήτορα που ξεκινά την κλαδωτή ανέλιξη είναι $Y = \sum_{n=1}^{\infty} X_n$. Προφανώς, αν ο μέσος αριθμός απογόνων $\mu = F'(1)$ είναι ≤ 1 τότε η εξάλειψη είναι βεβαία και επομένως $P(Y < \infty) = 1$ δηλαδή ο συνολικός αριθμός απογόνων είναι πεπερασμένος με πιθανότητα 1. Αντίθετα, αν $\mu > 1$ τότε $P(Y < \infty) < 1$. (Σ' αυτή την περίπτωση φυσικά, η πιθανότητα το Y να είναι πεπερασμένο είναι ίση με την πιθανότητα εξάλειψης.) Σε κάθε περίπτωση θα υπολογίσουμε την πιθανογεννήτρια $\phi(z) := Ez^Y$, $z \in (0,1)$ ως εξής:

$$E[z^Y | X_1 = k] = E[z^k z^{Y_1 + Y_2 + \cdots + Y_k} | X_1 = k] \tag{5.4}$$

όπου οι $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$, είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με την ίδια κατανομή όπως και η αρχική Y και περιγράφουν τον συνολικό αριθμό απογόνων του καθενός από τα k «παιδιά» του αρχικού ατόμου. Η βασική σχέση (5.4) συνεπάγεται επομένως ότι $E[z^Y | X_1 = k] = z^k \phi(z)^k$ και επομένως ότι

$$\phi(z) = E[z^Y] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k E[z^Y | X_1 = k] = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \left(z\phi(z)\right)^k.$$

Έτσι, η πιθανογεννήτρια του συνολικού αριθμού απογόνων του προγεννήτορα, $\phi(z)$ δίδεται από την λύση της εξίσωσης

$$\phi(z) = F(z\phi(z))). \tag{5.5}$$

Ας δούμε στη συνέχεια δύο απλά παραδείγματα περιπτώσεων που η (5.5) μπορεί να λυθεί ακριβώς.

Έστω ότι $F(z) = q + pz^2$ όπου, $p, q > 0$ και $p + q = 1$. Σ' αυτή την περίπτωση κάθε οργανισμός έχει είτε 2 απογόνους είτε κανέναν με πιθανότητες p και q αντίστοιχα. Ο μέσος αριθμός απογόνων είναι $\mu = 2p$ και επομένως $\mu > 1$ αν και μόνο αν $p > q$. Συνεπώς, αν $p > q$ τότε η πιθανότητα εξάλλειψης, π, δίδεται από την (μικρότερη) λύση της εξίσωσης $\pi = F(\pi)$ ή $\pi = q + p\pi^2$. Η εξίσωση αυτή έχει λύσεις $\pi = 1$ και $\pi = q/p$. Συνεπώς η πιθανότητα εξάλλειψης σε κάθε περίπτωση δίδεται από την σχέση $\min(q/p, 1)$. Η πιθανογεννήτρια του συνολικού αριθμού απογόνων δίδεται από την (5.5) ως εξής:

$$\phi(z) = q + pz^2 \phi(z)^2$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\phi(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4pqz^2}}{2pz^2}$. Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι μόνο το αρνητικό πρόσημο αντιστοιχεί σε δυναμοσειρά με θετικούς όρους. Συνεπώς

$$\phi(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz^2}}{2pz^2}$$

και λαμβάνοντας υπ' όψιν το ανάπτυγμα σε δυναμοσειρά

$$\sqrt{1-x} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \binom{1/2}{n} (-x)^n = 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{4}\right)^n \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \frac{1}{2pz^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(pqz^2\right)^n \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2q} \left(pqz^2\right)^{n-1} \frac{1}{2n-1} \binom{2n}{n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} q(pq)^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^{2n}. \end{aligned}$$

Συνεπώς η κατανομή του συνολικού αριθμού απογόνων είναι

$$P(Y = 2n) = q(pq)^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

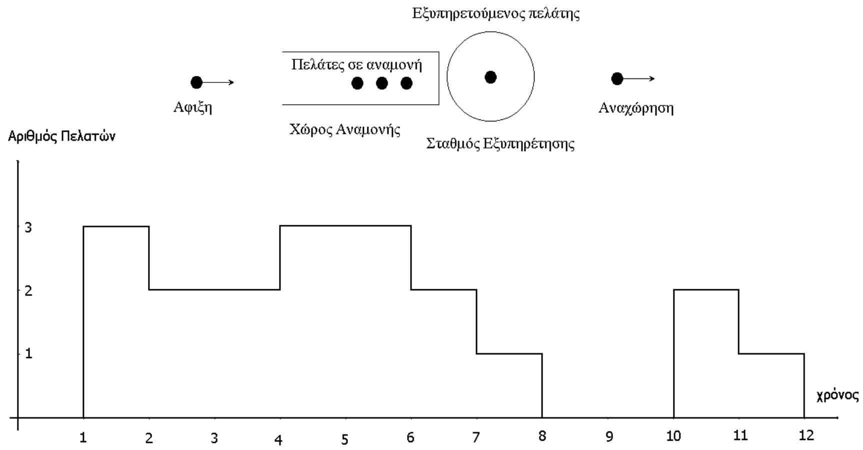
(όπου $p \leq q$).

Μια δεύτερη περίπτωση η οποία έχει παραδόξως παρόμοια λύση είναι όταν ο αριθμός των απογόνων είναι γεωμετρικά κατανεμημένος με πιθανογεννήτρια $F(z) = \frac{1-q}{1-qz}$ όπου, $1 > q > 0$ και $p := 1 - q$. Ο μέσος αριθμός απογόνων εδώ είναι $\mu = q/p$ και επομένως πάλι έχουμε $\mu > 1$ αν και μόνο αν $q > p$. Συνεπώς, αν $q > p$ τότε η πιθανότητα εξάλλειψης, π, δίδεται από την (μικρότερη) λύση της εξίσωσης $\pi = F(\pi)$, ή $\pi = \frac{1-q}{1-q\pi}$. Η εξίσωση αυτή έχει λύσεις $\pi = 1$ και $\pi = p/q$. Επομένως και σ' αυτή την περίπτωση η πιθανότητα εξάλλειψης δίδεται από την σχέση $\min(p/q, 1)$. Η πιθανογεννήτρια του συνολικού αριθμού απογόνων είναι σ' αυτή την περίπτωση

$$\phi(z) = \frac{1-q}{1 - qz\phi(z)}$$

ή

$$\phi(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pqz}}{2qz}.$$



Σχήμα 5.2: Σύστημα αναμονής

Το ανάπτυγμα σε σειρά (από το διωνυμικό θεώρημα) όπως και στην προηγούμενη περίπτωση δίδει

$$\phi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(pq)^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} z^n$$

και συνεπώς

$$P(Y = n) = p(pq)^n \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}, \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

5.2 Συστήματα αναμονής σε διακριτό χρόνο

Θεωρούμε το εξής απλό σύστημα αναμονής: Στην αρχή κάθε χρονικής περιόδου, $n = 1, 2, \dots$, φθάνουν στο χώρο εξυπηρέτησης ξ_n πελάτες. Αν ο σταθμός εξυπηρέτησης είναι διαθέσιμος τότε ο πρώτος από αυτούς γίνεται αμέσως δεκτός από τον σταθμό ενώ οι υπόλοιποι περιμένουν στον χώρο αναμονής. Αν ο σταθμός είναι απασχολημένος (διότι εξυπηρετεί κάποιον πελάτη που έφθασε στο σύστημα προηγουμένως, όλες οι νέες αφίξεις απλώς περιμένουν στον χώρο αναμονής την σειρά τους για να εξυπηρετηθούν. Υποθέτουμε ότι ο χρόνος εξυπηρέτησης κάθε πελάτη είναι ακριβώς μία χρονική μονάδα. Για παράδειγμα, αν τις χρονικές στιγμές 1, 2, 3, 4, 5, 6, έλθουν αντίστοιχα, 3, 0, 1, 0, 2, 1, πελάτες τότε ο αριθμός πελατών στο σύστημα δίνεται από το παρακάτω διάγραμμα.

Χρονική στιγμή	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Αριθμός αφίξεων	3	0	1	2	1	0	0	0	0	2	0	0

Ας υποθέσουμε ότι ο αριθμός των αφίξεων είναι μια α.ι. ακολουθία ακέραιων τ.μ. με κατανομή $P(\xi = k) = p_k$, $k = 1, 2, \dots$. Θέλουμε να υπολογίσουμε τον αριθμό πελατών στο σύστημα κάτω από συνθήκες μακροχρόνιας, στάσιμης λειτουργίας (στεαδψ στατε) καθώς και άλλες ποσότητες που καθορίζουν την ποιότητα της εξυπηρέτησης (όπως ο μέσος χρόνος εξυπηρέτησης, η κατανομή του χρόνου εξυπηρέτησης για ένα τυχαίο πελάτη και η πιθανότητα ένας τυχαίος πελάτης να μην χρειαστεί να περιμένει).

Ξεκινάμε με την απλή αλλά θεμελιώδη παρατήρηση ότι εφόσον ο σταθμός έχει την δυνατότητα να εξυπηρετεί ένα πελάτη ανά χρονική μονάδα, θα πρέπει ο μέσος αριθμός αφίξεων να είναι μικρότερος (ή το πολύ ίσος;) με την μονάδα, άλλως μακροχρόνια ο σταθμός δεν θα είναι σε θέση να ανταποκριθεί και το μέγεθος της ουράς των πελατών που περιμένουν συνεχώς θα αυξάνεται. Υποθέτουμε λοιπόν ότι

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k < 1. \tag{5.6}$$

Ας συμβολίσουμε με X_n τον αριθμό των πελατών την χρονική στιγμή n, αμέσως μετά από τις αφίξεις ξ_n και την (ενδεχόμενη) αναχώρηση του πελάτη που εξυπηρετήθηκε κατά την διάρκεια της περιόδου $n-1$. Έχουμε την σχέση

$$X_n = (X_{n-1} - 1)^+ + \xi_n. \tag{5.7}$$

Ως συνήθως x^+ είναι το θετικό μέρος του πραγματικού αριθμού x, δηλαδή, $x^+ = x$ αν $x \geq 0$ ενώ $x = 0$ αν $x < 0$. Η εξίσωση (5.7) είναι συνεπώς ένας συμπαγής τρόπος για να εκφράσουμε την σχέση $X_n = \xi_n$ αν $X_{n-1} = 0$ (αν δηλαδή την περίοδο $n-1$ ο σταθμός εξυπηρέτησης δεν είχε κανένα πελάτη) και $X_n = X_{n-1} - 1 + \xi_n$ αν $X_{n-1} > 0$ (αν την περίοδο $n-1$ ο σταθμός ήταν απασχολημένος, οπότε στο τέλος της περιόδου $n-1$ θα έχουμε έναν πελάτη λιγότερο, εκείνον που εξυπηρετήθηκε και έφυγε από το σύστημα).

Από την σχέση (5.7) είναι σαφές ότι η διαδικασία X_n είναι Μαρκοβιανή. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης είναι

$$P = \begin{bmatrix} p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \cdots \\ 0 & p_0 & p_1 & p_2 & \cdots \\ 0 & 0 & p_0 & p_1 & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}. \tag{5.8}$$

Η στάσιμη κατανομή προκύπτει από την επίλυση του συστήματος

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_0 p_0 + \pi_1 p_0 \\ \pi_1 &= \pi_0 p_1 + \pi_1 p_1 + \pi_2 p_0 \\ \pi_2 &= \pi_0 p_2 + \pi_1 p_2 + \pi_2 p_1 + \pi_3 p_0 \\ &\vdots \\ \pi_n &= \pi_0 p_n + \pi_1 p_n + \pi_2 p_{n-1} + \pi_3 p_{n-2} + \cdots + \pi_{n-1}\pi_2 + \pi_n p_1 + \pi_{n+1} p_0. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Παρατηρήστε ότι οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφτούν με την μορφή

$$\pi_n = \pi_0 p_n + \sum_{k=0}^{n} \pi_{k+1} p_{n-k}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots \tag{5.10}$$

Από την παραπάνω σχέση μπορούμε να υπολογίσουμε την πιθανογεννήτρια της στάσιμης κατανομής $\Pi(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_n$ συναρτήσει της πιθανογεννήτριας του αριθμού των αφίξεων, $P(z) := \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n$, ως εξής

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} z^n \pi_n &= \pi_0 \sum_{n=0}^{\infty} z^n p_n + \sum_{n=0}^{\infty} z^n \sum_{k=0}^{n} \pi_{k+1} p_{n-k} \\
&= \pi_0 P(z) + \sum_{k=0}^{\infty} z^k \pi_{k+1} \sum_{n=k}^{\infty} z^{n-k} p_{n-k} \\
&= \pi_0 P(z) + P(z) \sum_{k=1}^{\infty} z^{k-1} \pi_k \\
&= \pi_0 P(z) + P(z) z^{-1} \left(\Pi(z) - \pi_0 \right).
\end{aligned}$$

Από τον παραπάνω υπολογισμό συμπεραίνουμε ότι

$$\Pi(z) = \pi_0 P(z) + P(z) \frac{\Pi(z) - \pi_0}{z}$$

ή

$$\Pi(z) = \pi_0 P(z) \frac{1-z}{P(z) - z}. \tag{5.11}$$

Η εξίσωση (5.11) εκφράζει την άγνωστη πιθανογεννήτρια του αριθμού των πελατών στο σύστημα υπό συνθήκες ισορροπίας ως συνάρτηση της γνωστής πιθανογεννήτριας του αριθμού των αφίξεων και υπό αυτή την έννοια αποτελεί την λύση του προβλήματός μας. Στο δεξιό μέλος της (5.11) εμφανίζεται και η άγνωστη πιθανότητα π_0 την οποία θα πρέπει να προσδιορίσουμε. Αυτό μπορεί να γίνει ως εξής: Από τις ιδιότητες της πιθανογεννήτριας μιας κατανομής γνωρίζουμε ότι $\Pi(1) = P(1) = 1$. Αν θέσουμε $z = 1$ στην εξίσωση (5.11) το αριστερό μέλος θα γίνει 1. Το δεξιό μέλος έχει την απροσδιόριστη μορφή $\frac{0}{0}$ και συνεπώς θα πρέπει να εφαρμόσουμε τον κανόνα του de l'Hôpital. Έχουμε λοιπόν

$$1 = \pi(0) 1 \lim_{z \to 1} \frac{1-z}{P(z) - z} = \pi(0) \frac{-1}{P'(1) - 1}.$$

Γνωρίζουμε όμως ότι $P'(1) = \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \mu$, και συνεπώς $1 = \pi_0 \frac{1}{1-\mu}$ ή

$$\pi_0 = 1 - \mu. \tag{5.12}$$

Η τελευταία αυτή σχέση έχει έννοια υπό την προϋπόθεση ότι $\mu < 1$. Συνδυάζοντας τις (5.11) και (5.12) έχουμε την τελική έκφραση για την πιθανογεννήτρια του αριθμού των πελατών στο σύστημα σε κατάσταση ισορροπίας:

$$\Pi(z) = P(z)(1-\mu) \frac{1-z}{P(z) - z}. \tag{5.13}$$

Παράδειγμα 5.2. Έστω ότι η κατανομή του αριθμού των αφίξεων σε κάθε περίοδο είναι γεωμετρική με πιθανογεννήτρια $P(z) = \frac{1-q}{1-qz}$. Παρατηρήστε ότι αυτή είναι η γεωμετρική κατανομή $P(\xi = k) = q^k p$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, με μέση τιμή

$$\mu = \frac{q}{p}. \tag{5.14}$$

Η υπόθεση $\mu < 1$ μεταφράζεται, ως προς την πιθανότητα p, σε $q < p$, ή $p > 1/2$. Επίσης, από την (5.14) έχουμε $p = \frac{1}{1+\mu}$, $q = \frac{\mu}{1+\mu}$ και συνεπώς η πιθανογεννήτρια του αριθμού των αφίξεων μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$P(z) = \frac{(1+\mu)^{-1}}{1 - \mu(1+\mu)^{-1} z}.$$

Αντικαθιστώντας την σχέση αυτή στην (5.13) και εκτελώντας τις στοιχειώδεις απλοποιήσεις έχουμε

$$\Pi(z) = \frac{1-\mu}{1-\mu z}. \tag{5.15}$$

Παράδειγμα 5.3. Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο αριθμός των αφίξεων σε κάθε περίοδο έχει πιθανογεννήτρια $P(z) = p_0 + p_1 z + p_2 z^2$ όπου βέβαια τα p_i είναι μη αρνητικά και $p_0 + p_1 + p_2 = 1$. Εδώ η μέση τιμή είναι $\mu = p_1 + 2p_2$, $1 - \mu = p_0 - p_2$, και η συνθήκη $\mu < 1$ επιβάλλει $p_0 > p_2$. Αντικαθιστώντας την πιθανογεννήτρια αυτή στην (5.13) προκύπτει μετά από απλοποιήσεις ότι

$$\Pi(z) = (p_0 + z p_1 + z^2 p_2) \frac{1 - \frac{p_2}{p_0}}{1 - \frac{p_2}{p_0} z}.$$

5.2.1 Η κατανομή ολοκληρωμένης ουράς (Integrated Tail distribution)

Έστω ξ μη αρνητική ακέραια τ.μ. με κατανομή $P(\xi = n) = p_n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, πιθανογεννήτρια $P(z)$ και μέσο μ. Διατεινόμαστε ότι οι ποσότητες

$$\rho_n = \frac{1}{\mu} \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k = \frac{P(\xi > n)}{\mu}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

ορίζουν μια καινούργια κατανομή (που προκύπτει από την $\{p_k\}$) και την οποία ονομάζουμε κατανομή ολοκληρωμένης ουράς της $\{p_k\}$. Αφού τα ρ_n είναι προφανώς μη αρνητικά, αρκεί να διαπιστώσουμε ότι αθροίζονται στην μονάδα, πράγμα που προκύπτει αμέσως από την σχέση $\sum_{n=0}^{\infty} P(\xi > n) = E\xi = \mu$ που είδαμε στο Κεφάλαιο 1. Θα συμβολίζουμε την πιθανογεννήτρια της κατανομής ολοκληρωμένης ουράς με $P_I(z)$. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
P_I(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} z^n \rho_n = \frac{1}{\mu} \sum_{n=0}^{\infty} z^n E1(\xi > n) = \frac{1}{\mu} E\left[\sum_{n=0}^{\infty} z^n 1(\xi > n)\right] \\
&= \frac{1}{\mu} E\left[\sum_{n=0}^{\xi-1} z^n\right] = \frac{1}{\mu} E\left[\frac{1 - z^\xi}{1 - z}\right] \\
&= \frac{1 - P(z)}{\mu(1 - z)}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την έκφραση στην (5.13) έχουμε

$$\Pi(z) = P(z)(1-\mu)\frac{1-z}{P(z)-z} = P(z)(1-\mu)\frac{1-z}{1-z-(1-P(z))} = P(z)(1-\mu)\frac{1}{1-\frac{1-P(z)}{1-z}}.$$

και συνεπώς

$$\Pi(z) = P(z)\frac{1-\mu}{1-\mu P_I(z)}. \tag{5.17}$$

5.3 Ένα δεύτερο μοντέλο συστήματος αναμονής

Ας υποθέσουμε τώρα ότι την αρχή κάθε χρονικής περιόδου έρχεται ακριβώς ένας πελάτης και μέχρι το τέλος της χρονικής αυτής περιόδου εξυπηρετούνται ξ πελάτες. Θέτουμε $p_n = P(\xi = n)$, $r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k$.

$$X_{n+1} = (X_n + 1 - \xi_n)^+$$

$$P = \begin{bmatrix} r_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ r_1 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ r_2 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & \cdots \\ r_3 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k r_k \\ \pi_1 &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \pi_k p_k \\ \pi_2 &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k+1} p_k \\ \pi_3 &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k+2} p_k \\ &\vdots \\ \pi_{n+1} &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \pi_{k+n} p_k \end{aligned}$$

Το παραπάνω σύστημα μπορεί να λυθεί ως εξής: Αγνοούμε προς το παρόν την πρώτη εξίσωση που αναφέρεται στο π_0 και δοκιμάζουμε την λύση $\pi_n = C\sigma^n$ όπου $C > 0$ και $0 < \sigma < 1$. Αντικαθιστώντας στο παραπάνω σύστημα έχουμε

$$C\sigma^{n+1} = \sum_{k=0}^{\infty} C\sigma^{n+k} p_k$$

ή

$$\sigma = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma^k p_k = P(\sigma).$$

Με άλλα λόγια η λύση που δοκιμάσαμε ικανοποιεί το σύστημα υπό την προϋπόθεση ότι το σ ικανοποιεί την εξίσωση

$$\sigma = P(\sigma).$$

Συνεπώς

$$\pi_n = C\sigma^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

και η τιμή του C προκύπτει από τη συνθήκη κανονικοποίησης $\sum_{n=0}^{\infty} \pi_n = 1$ που δίνει $C = 1-\sigma$. Έτσι, η στάσιμη κατανομή είναι γεωμετρική

$$\pi_n = (1-\sigma)\sigma^n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

5.4 Χρονική Αναστρεψιμότης

Ορισμός 5.1. Έστω $X_0, X_1, X_2, \ldots$ μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου με χώρο καταστάσεων $\mathscr{S}$. Η αλυσίδα θα ονομάζεται **αναστρέψιμη** αν

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_k = i_k) = P(X_n = i_0, X_{n-1} = i_1, \ldots, X_{n-k} = i_k), \tag{5.18}$$

για κάθε n, $k \leq n$, και $i_0, \ldots, i_k \in \mathscr{S}$.

Διαισθητικά, αυτός ο ορισμός εκφράζει την απαίτηση οι στατιστικές ιδιότητες τις διαδικασίας να παραμένει η ίδια όταν η φορά του χρόνου αναστρέφεται. Μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα ότι η (5.18) συνεπάγεται την γενικότερη σχέση

$$P(X_{j_0} = i_0, X_{j_1} = i_1, \ldots, X_{j_k} = i_k) = P(X_{n-j_0} = i_0, X_{n-j_1} = i_1, \ldots, X_{n-j_k} = i_k),$$

όπου $j_0 < \ldots < j_k$ και $n \geq j_k$. Ας εξερευνήσουμε τώρα μερικές από τις συνέπειες του παραπάνω ορισμού. Το P_{ij} συμβολίζει τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης (δηλαδή $P(X_1 = j|X_0 = i) = P_{ij}$) και με π τις στάσιμες πιθανότητες της αλυσίδας Markov.

(α) Θέτουμε $k = 0$ στην (5.18). Αυτό συνεπάγεται ότι $P(X_0 = i) = P(X_n = i) \overset{def}{=} \pi_i$ για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ και $i \in \mathscr{S}$. Κατά συνέπεια η αλυσίδα Markov πρέπει να βρίσκεται σε στάσιμη κατάσταση προκειμένου να είναι αναστρέψιμη.

(β) Στη συνέχεια, υποθέτοντας ότι (X_n) είναι σε στάσιμη κατάσταση και χρησιμοποιώντας την Μαρκοβιανή ιδιότητα παρατηρούμε ότι μπορούμε να γράψουμε την (5.18) ως

$$P_{i_{k-1}i_k} P_{i_{k-2}i_{k-1}} \ldots P_{i_0 i_1} \pi_{i_0} = \pi_{i_k} P_{i_k i_{k-1}} P_{i_{k-1}i_{k-2}} \ldots P_{i_1 i_0}. \tag{5.19}$$

Θέτοντας $k = 1$ στην παραπάνω εξίσωση βλέπουμε ότι

$$\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji} \quad \text{για κάθε } i, j \in \mathscr{S}. \tag{5.20}$$

Μέχρι στιγμής έχουμε αποδείξει ότι ο ορισμός της αναστρεψιμότητας (5.18) συνεπάγεται τις **(α)** και **(β)**. Στη συνέχεια θα αποδείξουμε το αντίστροφο δηλαδή ότι

Θεώρημα 5.1. *Μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου (P, π) σε κατάσταση ισορροπίας είναι αναστρέψιμη αν και μόνο αν ικανοποιεί την (5.20).*

Απόδειξη: Το μόνο που χρειάζεται να ελέγξουμε για μια στάσιμη αλυσίδα Markov είναι ότι η (5.20) συνεπάγεται την (5.19) (η οποία, όπως έχουμε ήδη δει είναι ισοδύναμη με την (5.18). ∎

5.5 Η ανάστροφη αλυσίδα

Έστω (X_n) μια αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P και στάσιμες πιθανότητες π. Ορίζουμε την ανάστροφη αλυσίδα ως μια αλυσίδα Markov με κατάσταση ισορροπίας π και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $\widetilde{P}$ που δίδεται από τις σχέσεις

$$\widetilde{P}_{ij} = \frac{\pi_j P_{ji}}{\pi_i}. \tag{5.21}$$

Ας εξετάσουμε πρώτα απ' όλα κατά πόσον αυτός ο ορισμός δίδει όντως ένα καινούργιο πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

- για κάθε $i, j \in \mathscr{S}$ $\widetilde{P}_{ij} \geq 0$,
- για κάθε $i \in \mathscr{S}$

  $$\sum_{j \in \mathscr{S}} \widetilde{P}_{ij} = \frac{1}{\pi_i} \sum_{j \in \mathscr{S}} \pi_j P_{ji} = 1,$$

  όπου η τελευταία ισότητα απορρέει από το γεγονός ότι $\pi P = \pi$,
- $\pi \widetilde{P} = \pi$. Πράγματι, για κάθε $i \in \mathscr{S}$,

  $$\sum_{j \in \mathscr{S}} \pi_j \widetilde{P}_{ji} = \sum_{j \in \mathscr{S}} \pi_j \frac{\pi_i P_{ij}}{\pi_j} = \pi_i \sum_{j \in \mathscr{S}} P_{ij} = \pi_i.$$

Παρατήρηση: Αν για μια αλυσίδα Markov, $P = \widetilde{P}$ τότε η αλυσίδα αυτή είναι αναστρέψιμη

5.6 Κριτήριο αναστρεψιμότητας του Kolmogorov

Θεώρημα 5.2 (Κριτήριο του Kolmogorov). *Μια στάσιμη αλυσίδα Markov διακριτού χρόνου είναι αναστρέψιμη αν η πιθανότητα να διασχίσει το σωμάτιο οποιοδήποτε βρόγχο στο χώρο καταστάσεων είναι ίση με την πιθανότητα να διασχίσει το σωμάτιο τον ίδιο βρόχο κατά την* **αντίθετη φορά**, *αν δηλαδή*

$$P_{i_1 i_2} P_{i_2 i_3} \cdots P_{i_{k-2} i_{k-1}} P_{i_{k-1} i_k} P_{i_k i_1} = P_{i_1 i_k} P i_k i_{k-1} P_{i_{k-1} i_{k-2}} \cdots P_{i_3 i_2} P_{i_2 i_1} \tag{5.22}$$

για κάθε $i_1, i, 2 \ldots, i_k \in \mathscr{S}$

Απόδειξη *Αναγκαιότης:* Χωρίς βλάβη της γενικότητας ας θεωρήσουμε το βρόγχο $i \to j \to k \to l \to i$. Από την (5.18) (με $n = k = 4$) έχουμε

$$P(X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k, X_3 = l, X_4 = i) = P(X_4 = i, X_3 = j, X_2 = k, X_1 = l, X_0 = i)$$

και από αυτή τη σχέση, χρησιμοποιώντας την μαρκοβιανή ιδιότητα και το γεγονός ότι $P(X_0 = i) = \pi_i$ (αφού η αλυσίδα είναι στάσιμη) προκύπτει ότι

$$\pi_0 P_{ij} P_{jk} P_{kl} P_{li} = \pi_0 P_{il} P_{lk} P_{kj} P_{ji}. \tag{5.23}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.20) κατ΄ επανάληψιν, το αριστερό μέλος της παραπάνω εξίσωσης γράφεται διαδοχικά ως

$$P_{ji} \pi_j P_{jk} P_{kl} P_{li} = P_{ji} P_{jk} \pi_k P_{kl} P_{li} = P_{ji} P_{jk} P_{kl} \pi_l P_{li} = P_{ji} P_{jk} P_{kl} P_{li} \pi_i.$$

Η τελευταία αυτή ποσότητα είναι ίση με το δεξιό μέλος της (5.23) και, απαλείφοντας το π_0, προκύπτει ότι

$$P_{ij} P_{jk} P_{kl} P_{li} = P_{il} P_{lk} P_{kj} P_{ji}.$$

Συνεπώς η αναστρεψιμότητα συνεπάγεται την (5.22).

Ικανότης: Θα δείξουμε πρώτα ότι το κριτήριο συνεπάγεται ότι για κάθε ζεύγος από καταστάσεις $i \neq j$ και για κάθε $n \geq 1$,

$$P_{ij} P_{ji}^n = P_{ij}^n P_{ji}. \tag{5.24}$$

Για να αποφύγουμε περίπλοκους συμβολισμούς ας εξετάσουμε την περίπτωση $n = 3$. Πράγματι $P_{ji}^3 = \sum_{k \in \mathscr{S}} \sum_{l \in \mathscr{S}} P_{jk} P_{kl} P_{li}$ και συνεπώς

$$P_{ij} P_{ji}^3 = \sum_{k \in \mathscr{S}} \sum_{l \in \mathscr{S}} P_{ij} P_{jk} P_{kl} P_{li}.$$

Αλλά $P_{ij} P_{jk} P_{kl} P_{li} = P_{il} P_{lk} P_{kj} P_{ji}$ από την (5.22) και επομένως η (5.24) επαληθεύεται:

$$P_{ij} P_{ji}^3 = \left. \sum_{k \in \mathscr{S}} \sum_{l \in \mathscr{S}} P_{il} P_{lk} P_{kj} \right) P_{ji} = P_{ij}^3 P_{ji}.$$

Αν η αλυσίδα είναι απεριοδική μπορούμε να αφήσουμε το n να τείνει στο άπειρο και να χρησιμοποιήσουμε το βασικό θεώρημα σύγκλισης ($P_{ij}^n \to \pi_j$, $P_{ji}^n \to \pi_i$) για να αποφανθούμε ότι $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$.

Αν η αλυσίδα έχει περίοδο μεγαλύτερη από την μονάδα θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε διαφορετική προσέγγιση. Αθροίζοντας τα μέλη της (5.24) και διαιρώντας με n παίρνουμε

$$P_{ij} \left. \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{ji}^k \right) = \left. \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{ij}^k \right) P_{ji}. \tag{5.25}$$

Αφήνοντας $n \to \infty$ στην ανωτέρω εξίσωση λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} P_{ji}^k = \pi_i$. Επομένως η (5.21) συνεπάγεται ότι για κάθε i, j, $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$. ∎

5.6.1 Αναστρεψιμότης και Τυχαίοι Περίπατοι σε Γράφους

Θεωρούμε ένα τυχαίο περίπατο πάνω σε κάποιο μη προσανατολισμένο, συνδεδεμένο γράφο (όπως για παράδειγμα αυτόν του σχήματος 5.3). (Ένας γράφος ονομάζεται συνδεδεμένος αν μπορούμε να πάμε από κάθε κόμβο σε κάθε άλλο κόμβο.) Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης αυτής της διαδικασίας δίνεται όπως είδαμε από την (5.26). Θα αποδείξουμε τώρα ότι κάθε τυχαίος περίπατος σε (μη προσανατολισμένο) γράφο είναι αναστρέψιμη αλυσίδα Markov χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Kolmogorov. Έστω $i \longrightarrow j \longrightarrow k \longrightarrow l \longrightarrow i$ ένας βρόγχος στο χώρο καταστάσεων. Η πιθανότητα να διασχίσουμε τον βρόγχο αυτό κατά την ανωτέρω φορά είναι

$$P_{ij}P_{jk}P_{kl}P_{li} = \frac{v_{ij}}{d_i}\frac{v_{jk}}{d_j}\frac{v_{kl}}{d_k}\frac{v_{li}}{d_l} = \frac{1}{d_i d_j d_k d_l}.$$

Η πιθανότητα να διασχίσουμε τον ίδιο βρόγχο κατά την αντίστροφη φορά, δηλαδή $i \longrightarrow l \longrightarrow k \longrightarrow j \longrightarrow i$ είναι

$$P_{il}P_{lk}P_{kj}P_{ji} = \frac{v_{il}}{d_i}\frac{v_{lk}}{d_l}\frac{v_{kj}}{d_k}\frac{v_{ji}}{d_j} = \frac{1}{d_i d_l d_k d_j}.$$

Υπενθυμίζουμε ότι $v_{ij} = 1$ αν υπάρχει ακμή που να συνδέει το i με το j και $v_{ij} = 0$ διαφορετικά. Εφ' όσον ο γράφος είναι μη προσανατολισμένος $v_{ij} = v_{ji}$ για κάθε i, j. Οι δύο πιθανότητες είναι ίσες και, αφού αυτό το επιχείρημα ισχύει για οποιοδήποτε βρόγχο, βάσει του κριτηρίου του Kolmogorov η αλυσίδα είναι αναστρέψιμη. Συνεπώς *τυχαίοι περίπατοι σε μη προσανατολισμένους γράφους είναι αναστρέψιμες αλυσίδες Markov*

Επομένως ισχύει ότι $\pi_i P_{ij} = \pi_j P_{ji}$ ή

$$\pi_i \frac{v_{ij}}{d_i} = \pi_j \frac{v_{ji}}{d_j} \quad \forall i, j \in \mathscr{S}.$$

Επειδή ο γράφος είναι συνδεδεμένος, ξεκινώντας από τον κόμβο i μπορούμε να επισκεφθούμε κάθε άλλο κόμβο. Για παράδειγμα στο γράφο του σχήματος 5.3, $1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow 5 \longrightarrow 4$. Για κάθε ζευγάρι καταστάσεων σαυτή τη διαδρομή ισχύει $\pi_i \frac{1}{d_i} = \pi_j \frac{1}{d_j}$ (αφού $v_{ij} = 1$). Συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\pi_i}{d_i} = c \quad \forall i \in \mathscr{S}$$

δηλαδή ότι το ανωτέρω πηλίκο παραμένει σταθερό για όλες τις καταστάσεις του γράφου. Η τιμή του προσδιορίζεται από την εξίσωση κανονικοποίησης:

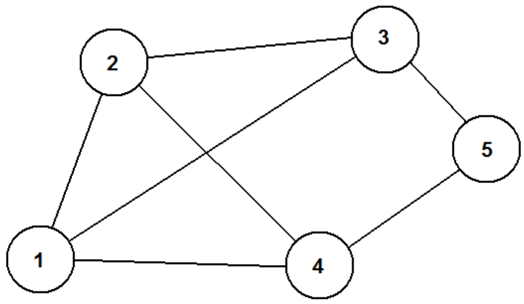
$$\sum_{i \in \mathscr{S}} \pi_i = \sum_{i \in \mathscr{S}} c d_i = 1$$

και συνεπώς

$$c = \frac{1}{\sum_{i \in \mathscr{S}} d_i}.$$

Για παράδειγμα, στο γράφο του σχήματος 4.7 $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3$, $d_5 = 2$, και $c = 14$ και επομένως $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{3}{14}$, $\pi_5 = \frac{2}{14}$. Παρατηρούμε ακόμη ότι

$$\sum_{i \in \mathscr{S}} d_i = 2 \times \text{ Συνολικός αριθμός ακμών του γράφου.}$$



Σχήμα 5.3: Τυχαίος περίπατος πάνω σ' ένα γράφο.

(Αυτό ισχύει διότι η ακμή που συνδέει τον κόμβο i με τον κόμβο j συνεισφέρει μια μονάδα στο d_i και άλλη μία στο d_j.

5.7 Τυχαίοι περίπατοι σε γράφους

Ένας γράφος αποτελείται από ένα σύνολο κόμβων, V, και ένα σύνολο ακμών που συνδέουν τους κόμβους, $\mathscr{V}$. Μαθηματικά, ο γράφος ορίζεται σαν μια δυάδα $(V, \mathscr{V})$ όπου το σύνολο $\mathscr{V}$ είναι ένα υποσύνολο του καρτεσιανού γινομένου $V \times V$. Για παράδειγμα, στο σχήμα ;; $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ και $\mathscr{V} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4, \}, \{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 5\}, \{4, 5\}\}$. Ένας συνοπτικός τρόπος περιγραφής ενός γράφου με n κόμβους, δηλαδή με $V = \{1, 2, 3, \ldots, n\}$ είναι μέσω του $n \times n$ πίνακα προσπτώσεως $\mathbf{V} := [v_{ij}]_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}}$ όπου

$$v_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{αν υπάρχει ακμή που συνδέει τους κόμβους } i \text{ και } j \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} .$$

Παρατηρείστε ότι ο πίνακας προσπτώσεως είναι αναγκαστικά συμμετρικός, δηλαδή $v_{ij} = v_{ji}$ αφού αν μια ακμή συνδέει το i με το j τότε η ίδια ακμή θα συνδέει και το j με το i. Στον γράφο του σχήματος 5.3 ο πίνακας προσπτώσεως που αντιστοιχεί είναι η

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Τέλος ονομάζουμε *βαθμό* του κόμβου i, τον οποίο θα συμβολίζουμε με d_i, τον αριθμό των ακμών που τον συνδέουν με τους άλλους κόμβους. Έτσι, στο σχήμα 5.3 έχουμε $d_1 = d_2 = d_3 = d_4 = 3$ και $d_5 = 2$. Γενικά ισχύει η σχέση

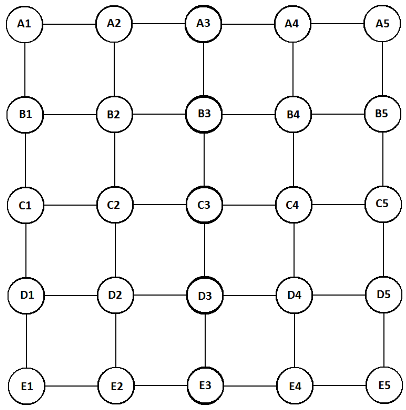
$$d_i = \sum_{j \in V} v_{ij}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα σωμάτιο που κάνει ένα τυχαίο περίπατο πάνω σ' αυτό τον γράφο. Όταν το σωμάτιο βρίσκεται στον κόμβο i για το επόμενο άλμα διαλέγει με ίση πιθανότητα κάποια από τις ακμές που ξεκινούν από τον κόμβο i και την επόμενη χρονική στιγμή μεταπηδά στον αντίστοιχο κόμβο. Για παράδειγμα, στον γράφο του σχήματος ;; αν το σωματίδιο βρίσκεται στον κόμβο 1, τότε με πιθανότητα 1/3 την επόμενη χρονική στιγμή θα βρεθεί σε έναν από τους κόμβους 2,3, ή 4. Ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης για τον γράφο του σχήματος είναι

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

και, λύνοντας το σύστημα $\pi = \pi P$ μαζί με τη συνθήκη κανονικοποίησης παίρνουμε $\pi_1 = \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \frac{3}{14}$, $\pi_5 = \frac{2}{14}$. Γενικότερα ένας τυχαίος περίπατος σε ένα γράφο, με βάση τους κανόνες που περιγράψαμε θα έχει πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P με

$$p_{ij} = \frac{v_{ij}}{d_i}, \qquad \forall i, j \in V. \tag{5.26}$$



Σχήμα 5.4: Τυχαίος περίπατος πάνω σ′ ένα τετραγωνικό πλέγμα.

5.8 Ασκήσεις

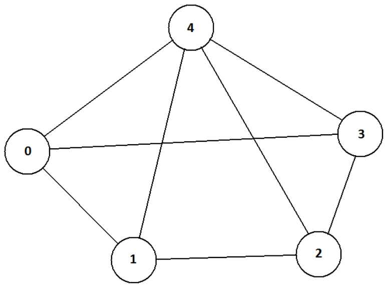
Άσκηση 5.1. Θεωρούμε ένα σωματίδιο το οποίο εκτελεί τυχαίο περίπατο στο γράφο του σχήματος 5.4

1) Ποια είναι η στάσιμη κατανομή της διαδικασίας αυτής;
2) Έστω ότι το σωματίδιο ξενικά από την κατάσταση C3 την χρονική στιγμή 0. Ποια είναι η πιθανότητα να επιστρέψει στην C3 *πριν επισκεφθεί για πρώτη φορά μια από της καταστάσεις στην εξωτερική περιφέρεια του γράφου;* (Με τον όρο «εξωτερική περιφέρεια» εννοούμε όλες της καταστάσεις της μορφής A$\star$, E$\star$, $\star$1, $\star$5, όπου $\star$ είναι οποιοδήποτε από τα σύμβολα $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ ή από τα $\{A, B, C, D, E\}$.)
3) Ποιος είναι ο μέσος χρόνος επανόδου στην κατάσταση C3;

Άσκηση 5.2. Έστω $\{X_n\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, κλαδωτή ανέλιξη. Υποθέτουμε ότι $X_0 = 1$ με πιθανότητα 1 και ότι κάθε οργανισμός έχει k απογόνους με πιθανότητα $\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$.

1) Να ευρεθεί η πιθανογεννήτρια συνάρτηση του αριθμού των απογόνων κάθε οργανισμού καθώς και ο μέσος αριθμός απογόνων του κάθε οργανισμού.
2) Να ευρεθεί η πιθανότητα τελικής εξάλειψης του είδους.
3) Να ευρεθεί η πιθανογεννήτρια του μεγέθους του συνολικού πληθυσμού της πρώτης, δεύτερης, και τρίτης γενεάς.
4) Να ευρεθεί η κατανομή του μεγέθους της n-οστής γενεάς.

Άσκηση 5.3. Ένας οργανισμός στο τέλος της ζωής του αφήνει ξ απογόνους, όπου ξ τυχαία μεταβλητή με κατανομή $P(\xi = 0) = 1/6$, $P(\xi = 1) = 1/2$, και $P(\xi = 2) = 1/3$. Έστω X_n το μέγεθος του πληθυσμού της n-οστής γενεάς. Υποθέτοντας ότι αρχικά η κλαδωτή ανέλιξη ξεκινά με ένα οργανισμό, δηλαδή $X_0 \equiv 1$,



Σχήμα 5.5: Τυχαίος περίπατος πάνω σ' ένα πλήρη γράφο.

α) Βρείτε την μέση τιμή της τυχαίας μεταβλητής X_n, $m_n := EX_n$, σαν συνάρτηση του n.

β) Ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει εξαλειφθεί το είδος μετά από 3 γενιές;

γ) Ποια είναι η πιθανότητα να εξαλειφθεί κάποτε το είδος;

Άσκηση 5.4. Θεωρούμε ένα σωματίδιο που εκτελεί τυχαίο περίπατο πάνω στο γράφο του σχήματος 5.5.

α) Ποιος είναι ο πίνακας πιθανοτήτων μετάβασης; Είναι αυτή η διαδικασία Markov αναστρέψιμη;

β) Ποια είναι η στάσιμη κατανομή;

γ) Έστω T_{03} τυχαία μεταβλητή που συμβολίζει τον χρόνο μετάβασης από την κατάσταση 0 στην κατάσταση 3. Να υπολογισθεί η μέση της τιμή, ET_{03}.

δ) Ποια είναι η κατανομή της τ.μ. T_{03}; Η διασπορά της;

Άσκηση 5.5. Θεωρούμε μια κλαδωτή ανέλιξη στην οποία ο κάθε οργανισμός έχει 0 ή 2 απογόνους με πιθανότητα 1/4 και 3/4 αντίστοιχα. Αν η κλαδωτή ανέλιξη ξεκινήσει με 1 οργανισμό ποια είναι η πιθανότητα εξάλειψης του είδους;

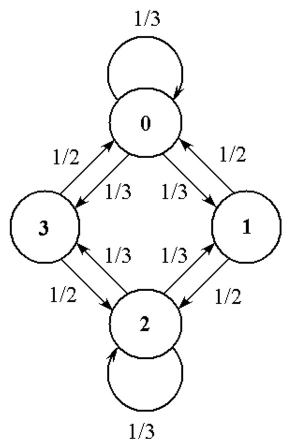
Άσκηση 5.6. Έστω αλυσίδα Markov με διάγραμμα πιθανοτήτων μετάβασης που δίνεται από το σχήμα 5.6.

α) Είναι η αλυσίδα αυτή διπλά στοχαστική;

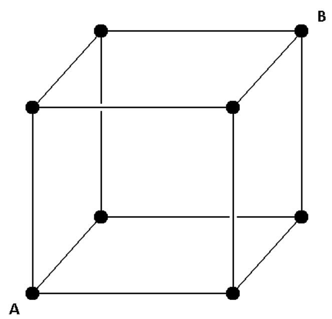
β) Να ευρεθεί η στάσιμη κατανομή.

γ) Είναι η αλυσίδα χρονικά αναστρέψιμη;

δ) Ξεκινώντας από την κατάσταση 0 ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι να επιστρέψουμε στο 0;



Σχήμα 5.6: Αλυσίδα Markov.



Σχήμα 5.7: Τυχαίος περίπατος στον κύβο.

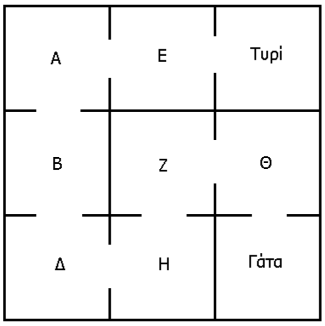
Άσκηση 5.7. Ένα σωματίδιο εκτελεί τυχαίο περίπατο στις κορυφές του κύβου που εικονίζεται στο σχήμα 5.7.

α) Να ευρεθεί η στάσιμη κατανομή.

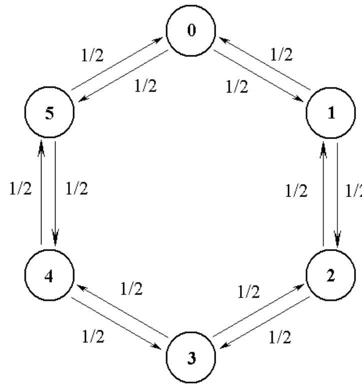
β) Ξεκινώντας από το σημείο Α ποιος είναι ο μέσος χρόνος μέχρι να επιστρέψει το σωμάτιο στο Α;

γ) Ξεκινώντας από το Α ποιος είναι ο μέσος χρόνος να πάει στο Β;

Άσκηση 5.8. Ένας ποντικός τοποθετείται στον θάλαμο Α του λαβυρίνθου του σχήματος 5.8. Υποθέτουμε ότι κινείται από δωμάτιο σε δωμάτιο διαλέγοντας κάθε φορά μία από τις πόρτες του δωματίου που βρίσκεται στην τύχη. Αν συμβολίζουμε με X_n την θέση του ποντικιού τη χρονική στιγμή n, είναι σαφές από τις παραπάνω υποθέσεις ότι η $\{X_n\}$ είναι αλυσίδα Markov. Πόσες κλάσεις ισοδυναμίας έχει; Να βρεθεί η στάσιμη κατανομή και ο μέσος χρόνος επιστροφής στην κατάσταση Α. Είναι η αλυσίδα αναστρέψιμη; Αν σε ένα από τους θαλάμους υπάρχει ένα κομμάτι τυρί και σε έναν άλλο μια γάτα, όπως φαίνεται στο σχήμα, ποια είναι η πιθανότητα να φτάσει ο ποντικός πρώτα στο τυρί;



Σχήμα 5.8: Τυχαίος περίπατος στον λαβύρινθο.



Σχήμα 5.9: Στο παράδειγμα αυτό, $n = 5$.

Άσκηση 5.9. Έστω η αλυσίδα Markov με χώρο καταστάσεων $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ και πιθανότητες μετάβασης όπως φαίνονται στο σχήμα 5.9

α) Ποια είναι η στάσιμη κατανομή;

β) Έστω ότι η αλυσίδα ξεκινά από την κατάσταση 0. Να ευρεθεί ο μέσος αριθμός των επισκέψεων στην κατάσταση i πριν η αλυσίδα επιστρέψει στο 0.

γ) Υπολογίστε την πιθανότητα f_n ότι η αλυσίδα επισκέπτεται όλες τις καταστάσεις, $1, 2, \ldots, n$, πριν επιστρέψει στο μηδέν. (Η αλυσίδα αρχικά θα κάνει ένα βήμα είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Λαμβάνοντας αυτό υπ' όψιν βρείτε μια αναδρομική σχέση που να εκφράζει την f_n σαν συνάρτηση της f_{n-1}.)

Άσκηση 5.10. Έστω κλαδωτή ανέλιξη $\{X_n\}$ με $X_0 = 1$ και αριθμό απογόνων ανά οργανισμό με κατανομή $p_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα εξάλειψης.

β) Να δείξετε (επαγωγικά ή με όποιο άλλο τρόπο προτιμάτε) ότι το μέγεθος του πληθυσμού την n–οστή γενεά, X_n, έχει πιθανογεννήτρια $G_n(z) := Ez^{X_n}$ που δίδεται από την σχέση

$$G_n(z) = \frac{n - (n-1)z}{n + 1 - nz}.$$

γ) Από την $G_n(z)$ να βρείτε την πιθανότητα $P(X_n > 0)$ και την κατανομή της X_n.

Άσκηση 5.11. Έστω κλαδωτή ανέλιξη $\{X_n\}$ με $X_0 = 1$ και αριθμό απογόνων ανά οργανισμό με κατανομή $p_n = (1-\alpha)\alpha^n$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, όπου $0 < \alpha < 1/2$.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα εξάλειψης.

β) Να δείξετε ότι το μέγεθος του πληθυσμού την n–οστή γενεά, X_n, έχει πιθανογεννήτρια $G_n(z) := Ez^{X_n}$ που δίδεται από την σχέση

$$G_n(z) = \frac{\rho^n - 1 - \rho z(\rho^{n-1} - 1)}{\rho^{n+1} - 1 - \rho z(\rho^n - 1)}$$

όπου $\rho = \alpha/(1-\alpha)$.

γ) Να δείξετε ότι η οριακή πιθανογεννήτρια, *δεδομένου ότι δεν έχει συμβεί εξάλειψη*, δίδεται από την σχέση

$$\lim_{n\to\infty} E[z^{X_n}|X_n > 0] = \frac{z(1-2\alpha)}{1-\alpha(1+z)}.$$

Άσκηση 5.12. Έστω κλαδωτή ανέλιξη $\{X_n\}$ με $X_0 = 1$ και αριθμό απογόνων ανά οργανισμό με κατανομή $p_0 = p_1 = p_2 = p_3 = 1/4$ και $p_k = 0$ για $k = 4, 5, 6, \ldots$.

α) Να υπολογίσετε την πιθανότητα εξάλειψης. (*Υπόδειξη:* Αν βρεθείτε αντιμέτωποι με μια τριτοβάθμια εξίσωση μην απογοητευθείτε. Η μια της ρίζα είναι γνωστή!)

β) Να υπολογίσετε την κατανομή του μεγέθους του πληθυσμού της γενιάς $n = 2$.

Άσκηση 5.13. Έστω ξ_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές με τιμές στο $\mathbb{N}_0$ και κατανομή $P(\xi = i) = p_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, όπου φυσικά $p_i \geq 0$ και $\sum_{i=0}^{\infty} p_i = 1$. Ορίζουμε την ακολουθία τυχαίων μεταβλητών

$$X_{n+1} = \begin{cases} X_n - \xi_n + 1 & \text{αν} \quad X_n - \xi_n + 1 \geq 0 \\ 0 & \text{αν} \quad X_n - \xi_n + 1 < 0 \end{cases} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

και $X_0 = 0$ με πιθανότητα 1.

α) Να δείξετε ότι η ακολουθία $\{X_n\}$ είναι μια αλυσίδα Markov.

β) Να δείξετε ότι ο πίνακας πιθανοτήτων είναι ο

$$\begin{bmatrix} Q_0 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ Q_1 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ Q_2 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ Q_3 & p_3 & p_2 & p_1 & p_0 & 0 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

όπου $Q_i := 1 - (p_0 + p_1 + \cdots + p_i) = \sum_{j=i+1}^{\infty} p_j$.

γ) Να δώσετε ένα απλό επιχείρημα που να δείχνει ότι η αλυσίδα αυτή είναι αδιαχώριστη δ) Αν συμβολίσουμε με $P(z) := \sum_{i=0}^{\infty} p_i z^i$ την πιθανογεννήτρια συνάρτηση των ξ_n, να δειχθεί ότι η στάσιμη κατανομή της αλυσίδας Markov, π_i, αν υπάρχει, είναι γεωμετρική. Συγκεκριμένα $\pi_i = (1-\sigma)\sigma^i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, όπου το σ είναι λύση της εξίσωσης

$$\sigma = P(\sigma).$$

Κεφάλαιο 6

Ανανεωτικές Σημειακές Διαδικασίες και Ανανεωτική Θεωρία

6.1 Ανανεωτικές διαδικασίες σε διακριτό χρόνο

Έστω $\{X_i\}$ μία ακολουθία από ισόνομες, ανεξάρτητες τ.μ. που παίρνουν τιμές στους *θετικούς* ακεραίους και $S_k = \sum_{i=1}^{k} X_i$, $S_0 = 0$. Φανταζόμαστε ένα σωματίδιο το οποίο κάνει βήματα προς τα δεξιά όπου το i-οστό βήμα έχει μέγεθος X_i που είναι αυστηρά θετικό. Τότε τα $S_0, S_1, S_2, S_3, \ldots,$ είναι οι αριθμοί που επισκέπτεται διαδοχικά το σωματίδιο ξεκινώντας από το μηδέν και

$$S_0 < S_1 < S_2 < S_3 < \cdots . \tag{6.1}$$

Συμβολίζουμε με $\mathscr{M}$ το τυχαίο υποσύνολο των φυσικών αριθμών που επισκέπτεται το σωματίδιο, δηλαδή $\mathscr{M} := \{S_k; k = 0, 1, 2, \ldots\}$, και θα εξετάσουμε μερικές από τις ιδιότητές του.

Το πρώτο ερώτημα που θα διερευνήσουμε αφορά την πιθανότητα, α_k, να επισκεφθεί το σωματίδιο τον ακέραιο $k = 0, 1, 2, \ldots$. Παρατηρήστε ότι $\alpha_k = P(k \in \mathscr{M})$ ή ισοδύναμα ότι $\alpha_k = P(S_n = k \text{ για κάποιο } n \in \mathbb{N})$. Αυτό σημαίνει ότι $\alpha_k = \sum_{n=0}^{\infty} P(S_n = k)$ εφ' όσον, λόγω της (6.1), τα ενδεχόμενα $\{S_n = k\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots,$ είναι ξένα μεταξύ τους. Συνεπώς μπορούμε να γράψουμε

$$\alpha_k = \begin{cases} 1 & \text{όταν } k = 0 \\ \sum_{n=1}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) & \text{όταν } k = 1, 2, \ldots \end{cases} \tag{6.2}$$

Ο υπολογισμός του παραπάνω αθροίσματος δεν είναι εν γένει εύκολος εκτός από συγκεκριμένες περιπτώσεις. Η ακολουθία α_k ονομάζεται *ανανεωτική πυκνότητα.*

Παράδειγμα 6.1. Έστω ότι οι X_i είναι γεωμετρικές τ.μ. με πιθανότητα επιτυχίας p. Τότε το άθροισμα $X_1 + X_2 + \cdots X_n$ έχει κατανομή Pascal και συνεπώς

$$P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) = \begin{cases} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n} p^n & \text{όταν } k = n, n+1, n+2, \ldots \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την έκφραση στην (6.2) έχουμε, για $k \geq 1$,

$$\begin{aligned}\alpha_k &= \sum_{n=1}^{k} \binom{k-1}{n-1} q^{k-n} p^n = \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} q^{k-l-1} p^{l+1} \\ &= p \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k-1}{l} q^{k-1-l} p^l = p(q+p)^{k-1} \\ &= p.\end{aligned}$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος για να δούμε το ίδιο αποτέλεσμα είναι θεωρήσουμε μία ακολουθία από τ.μ. Bernoulli, $\{\xi_j\}$, $j = 1, 2, \ldots$, ανεξάρτητες μεταξύ τους και με πιθανότητα επιτυχίας p:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{μ.π. } p \\ 0 & \text{μ.π. } q = 1 - p \end{cases}.$$

Φανταζόμαστε κάθε μία από αυτές τις τ.μ. σαν μια «μάρκα» στον αντίστοιχο ακέραιο

Σχήμα 5.1: Σε κάθε ακέραιο αντιστοιχούμε μια τ.μ. Bernoulli. Όταν η μεταβλητή αυτή παίρνει τιμή 1 τότε θεωρούμε ότι έχουμε ένα σημείο της ανανεωτικής διαδικασίας.

Μπορούμε λοιπόν να δούμε εναλλακτικά, όταν τα X_i είναι γεωμετρικές τ.μ. το σύνολο $\mathscr{M}$ σαν το σύνολο $\{j \in \mathbb{N} : \xi_j = 1\}$ και επομένως σ' αυτή την περίπτωση $\alpha_k = P(k \in \mathscr{M}) = P(k \in \{j \in \mathbb{N} : \xi_j = 1\}) = P(\xi_k = 1) = p$, για $k = 1, 2, \ldots$.

6.2 Υπολογισμός της Ανανεωτικής Πυκνότητας a_k

Προκειμένου να προσδιορίσουμε την ανανεωτική πυκνότητα, ο απλούστερος τρόπος, όπως θα δούμε, είναι να χρησιμοποιήσουμε γεννήτριες συναρτήσεις. Έστω

$$\alpha(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$$

η γεννήτρια συνάρτηση της ακολουθίας $\{\alpha_k\}$ και $\phi_X(z) := \sum_{n=1}^{\infty} P(X = k) z^k$ είναι η πιθανογεννήτρια της κατανομής των προσαυξήσεων, X. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\alpha(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) && (6.3)\\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} z^k P(X_1 + X_2 + \cdots + X_n = k) = \sum_{n=0}^{\infty} \phi_X(z)^k && (6.4)\\ &= \frac{1}{1 - \phi_X(z)}. && (6.5)\end{aligned}$$

Η παραπάνω σχέση δίνει τον μετασχηματισμό z της ανανεωτικής πυκνότητας a_k σαν συνάρτηση της πιθανογεννήτριας της X. Στο ακόλουθο παράδειγμα θα δούμε πως από αυτή τη σχέση μπορούμε να προσδιορίσουμε την ίδια την ανανεωτική πυκνότητα. Έστω ότι

$$X = \begin{cases} 1 & \text{μ.π. } p \\ 2 & \text{μ.π. } q \end{cases}$$

$\phi_X(z) = zp + z^2 q$. Έτσι

$$\alpha(z) = \frac{1}{1 - pz - qz^2}$$

Ο παρονομαστής γράφεται ως $(1 - z)(qz + 1)$ και αναλύοντας σε απλά κλάσματα έχουμε $\frac{1}{1-pz-qz^2} = \frac{A_1}{1-z} + \frac{A_2}{qz+1}$ όπου $A_1 = \frac{1}{1+q}$, $A_2 = \frac{q}{1+q}$ και επομένως

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \frac{1}{1+q}\left(\frac{1}{1-z} + \frac{q}{1+qz}\right) \\ &= \frac{1}{1+q} \quad \sum_{k=0}^{\infty} z^k \ + \ q\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k q^k z^k \Bigg) \end{aligned}$$

και συνεπώς

$$\alpha_k = \frac{1}{1+q} + (-1)^k q^{k+1}.$$

Παρατηρούμε ότι $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \frac{1}{1+q}$ όπως αναμενόταν από το γεγονός ότι $EX_1 = p+2q = 1+q$ και το ότι $\lim_{k\to\infty} \alpha_k = \frac{1}{EX}$.

Σχήμα 5.2: Δειγματική συνάρτηση ανανεωτικής διαδικασίας

6.3 Εφαρμογές στη Θεωρία Αξιοπιστίας

Έστω εξάρτημα μηχανής του οποίου η ζωή (διάρκεια λειτουργίας) εκπεφρασμένη σε μήνες, είναι τυχαία μεταβλητή. Την χρονική στιγμή 0 ξεκινάμε με ένα καινούργιο εξάρτημα το οποίο διαρκεί X_1 μήνες και αστοχεί (δηλαδή παύει να λειτουργεί λόγω βλάβης) οπότε και αντικαθίσταται αμέσως με όμοιο εξάρτημα του οποίου η διάρκεια ζωής είναι X_2 και ούτω καθ΄ εξής. Υποθέτουμε ότι οι διάρκειες λειτουργίας των εξαρτημάτων $\{X_i, i = 1, 2, \ldots, \}$, είναι ανεξάρτητες, ισόνομες, τυχαίες μεταβλητές με δεδομένη κατανομή $P(X = k) = p_k$. Έστω τέλος ότι κάθε αντικατάσταση του εξαρτήματος λόγω βλάβης στοιχίζει στην εταιρία c_1 ευρώ και ότι ένα ευρώ τον επόμενο μήνα έχει αξία ρ ευρώ σήμερα (όπου φυσικά $0 < \rho < 1$) και, γενικότερα, ένα ευρώ τον μήνα n έχει αξία ρ^n ευρώ σήμερα. Ζητείται το παρόν κόστος της συνολικής διαδικασίας υπό αυτές τις συνθήκες.

Η απάντηση σ΄ αυτό το ερώτημα βασίζεται στην παρατήρηση ότι οι αντικαταστάσεις λόγω βλάβης θα συμβούν τους μήνες $S_k := X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, $k = 1, 2, \ldots,$. Το κόστος της βλάβης που συμβαίνει το μήνα S_k έχει παρούσα αξία $c_1\rho^{S_k}$ και συνεπώς η παρούσα αξία του συνολικού κόστους είναι

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_1 \rho^{S_k}$$

και κατά συνέπεια η μέση τιμή της παρούσας αξίας του κόστους είναι

$$C = E\sum_{k=1}^{\infty} c_1\rho^{S_k} = \sum_{k=1}^{\infty} c_1 E\rho^{S_k}.$$

Παρατηρείστε ότι $E\rho^{S_k} = E\rho^{X_1+\cdots+X_k} = (\phi_X(\rho))^k$ και συνεπώς

$$C = \sum_{k=1}^{\infty} c_1 (\phi_X(\rho))^k = c_1\frac{\phi_X(\rho)}{1-\phi_X(\rho)}. \tag{6.6}$$

Παράδειγμα 6.2. Ας υποθέσουμε ότι η διάρκεια ζωής του κάθε εξαρτήματος είναι γεωμετρικά κατανεμημένη με μέση τιμή 4 μήνες. Επίσης έστω $c_1 = 500.000$ και$\rho = 0.99$ (που αντιστοιχεί σε μηνιαίο επιτόκιο $\frac{1}{\rho} = 0.0101\%$). Η παρούσα αξία του συνολικού κόστους υπολογίζεται τότε ως εξής: Εφ' όσον η X είναι γεωμετρική, η πιθανογεννήτρια έχει τη μορφή $\phi_X(z) = \frac{pz}{1-qz}$ με $q = 1-p$ και $\frac{1}{p} = 4$. Συνεπώς, σ' αυτή την περίπτωση $\phi_X(\rho) = \frac{0.25\times 0.99}{1-0.75\times 0.99} = 0,9612$ και το συνολικό κόστος είναι $C = 500.000\frac{0,9612}{1-0,9612} = 500.000\times 24,75 = 12,375\times 10^6$.

Γενικότερα, αν υποθέσουμε ότι ένα ευρώ τον μήνα n αξίζει $f(n)$ ευρώ σήμερα (όπου βέβαια $f(n) < 1$ και η $f(n)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του n) τότε το συνολικό κόστος (παρούσα αξία) είναι $\sum_{k=1}^{\infty} f(S_k)$ ενώ μέσο κόστος δίνεται από την σχέση

$$\begin{aligned} C &= E\sum_{k=1}^{\infty} f(S_k) = E\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} 1(S_k = n)f(n) && (6.7)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n)E\sum_{k=1}^{\infty} 1(S_k = n) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)P(n\in\mathscr{M}) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)\alpha_n. && (6.8)\end{aligned}$$

Για να συνδέσουμε την ανάλυση μας με αυτή της προηγουμένης παραγράφου, όταν $f(n) = \rho^n$ που ήταν η περίπτωση που εξετάσαμε προηγουμένως, $C = \sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\alpha_n = c_1\frac{\phi_X(\rho)}{1-\phi_X(\rho)}$, που συμφωνεί βεβαίως με την έκφραση (6.6).

6.4 Προληπτική Αντικατάσταση με Βάση την Ηλικία

Σε πολλές περιπτώσεις η αντικατάσταση ενός εξαρτήματος λόγω βλάβης έχει μεγαλύτερο κόστος από μία προληπτική αντικατάσταση ενός εξαρτήματος που λειτουργεί. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι το κόστος προληπτικής αντικατάστασης είναι $c_2 < c_1$ όπου c_1 όπως πριν είναι το κόστος αντικατάστασης λόγω βλάβης και ότι ένα εξάρτημα ηλικίας M αντικαθίσταται προληπτικά. Κατά συνέπεια, ένα εξάρτημα ηλικίας $n < M$ αντικαθίσταται αποκλειστικά λόγω βλάβης, ενώ ένα εξάρτημα ηλικίας M αντικαθίσταται είτε λόγω βλάβης, είτε προληπτικά. Θα συμβολίσουμε με $p_k = P(X = k)$ και $Q_k = P(X\geq k) = \sum_{i=k}^{\infty} p_k$. Η πιθανότητα αντικατάστασης εξαρτήματος ηλικίας M λόγω βλάβης είναι $\frac{p_M}{Q_M}$ ενώ η πιθανότητα αντικατάστασης εξαρτήματος ηλικίας M προληπτικά είναι $1-\frac{p_M}{Q_M} = \frac{Q_{M+1}}{Q_M}$.

Σχήμα 5.3: Η ηλικία αντικατάστασης εδώ είναι $M = 4$. Παρατηρείστε ότι μερικές αντικαταστάσεις εξαρτημάτων ηλικίας 4 οφείλονται σε βλάβη ενώ άλλες είναι προληπτικές.

Έστω X_i, $i = 1, 2, \ldots$ η διάρκεια ζωής του εξαρτήματος i. Υποθέτουμε όπως και προηγουμένως ότι τα X_i είναι α.ι.τ.μ. με συνάρτηση κατανομής p_k. Ορίζουμε τώρα τις καινούργιες τ.μ. $X_i^{(M)}$ μέσω της σχέσης

$$X_i^{(M)} = \begin{cases} X_i & \text{αν } X_i \leq M \\ M & \text{αν } X_i > M \end{cases}$$

Οι καινούργιες αυτές τ.μ. αντιπροσωπεύουν τις καινούργιες διάρκειες λειτουργίας των εξαρτημάτων όταν χρησιμοποιούμε πολιτική αντικατάστασης με ηλικία αντικατάστασης M και οι οποίες φυσικά ποτέ δεν υπερβαίνουν την ηλικία της προληπτικής αντικατάστασης M. Η κατανομή των $X_i^{(M)}$ δίνεται από την

$$P(X_i^{(M)} = k) = \begin{cases} p_k & \text{για } k = 1, 2, \ldots, M-1 \\ Q_M := \sum_{i=M}^{\infty} p_i & \text{για } k = M \\ 0 & \text{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Το σύνολο $\{S_k^{(M)} : k = 1, 2, \ldots\}$ είναι οι χρόνοι αντικατάστασης των εξαρτημάτων (είτε λόγω βλάβης, είτε λόγω προληπτικής αντικατάστασης). Παρατηρούμε ακόμη ότι η αντικατάσταση που συμβαίνει τον μήνα S_k είναι προληπτική αν $X_k > M$ ενώ οφείλεται σε βλάβη αν $X_k \leq M$. Επομένως, αν $f(n)$ είναι η συνάρτηση που δίνει την παρούσα αξία του χρήματος τον μήνα n, το συνολικό κόστος αυτής της μεθόδου αντικατάστασης δίνεται από την σχέση

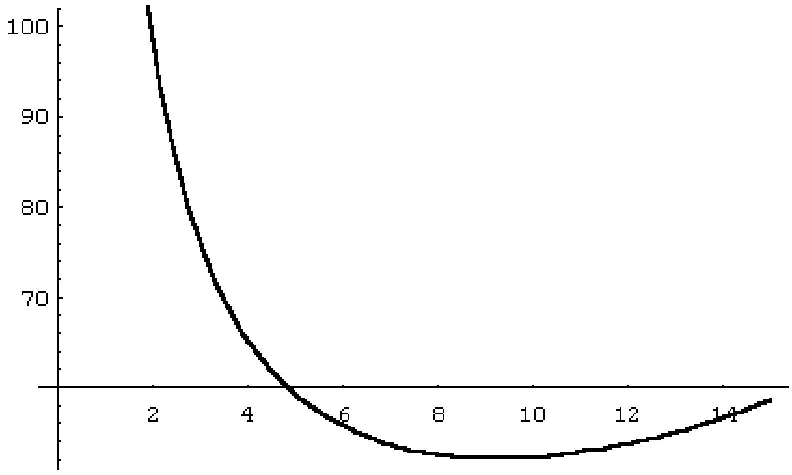
$$c_1 \sum_{k=1}^{\infty} f(S_k^{(M)}) - (c_1 - c_2) \sum_{k=1}^{\infty} f(S_k^{(M)}) 1(X_k > M). \tag{6.9}$$

Το μέσο κόστος δίνεται από τη σχέση

$$\begin{aligned} C(M) &:= c_1 E \sum_{k=1}^{\infty} f(S_k^{(M)}) - (c_1 - c_2) E \sum_{k=1}^{\infty} f(S_k^{(M)}) 1(X_k > M) \\ &= c_1 \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_n^{(M)} f(n) - (c_1 - c_2) E \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) 1(S_k^{(M)} = n) 1(X_k > M) \end{aligned}$$

όπου $\alpha_n^{(M)}$ είναι η πιθανότητα $P(S_k^{(M)} = n,$ για κάποιο $k)$ δηλαδή η ανανεωτική πυκνότητα του n όταν τα βήματα της ανανεωτικής διαδικασίας είναι τα $\{X_i^{(M)}\}$. Το τελευταίο άθροισμα στην παραπάνω εξίσωση γράφεται σαν

$$\begin{aligned} E \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f(n) 1(S_k^{(M)} = n) 1(X_k > M) &= \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \sum_{k=1}^{\infty} P(S_k^{(M)} = n, X_k^{(M)} = M, X_k > M) \\ &= \sum_{n=M}^{\infty} f(n) \sum_{k=1}^{\infty} P(S_{k-1}^{(M)} = n - M) P(X_k > M) \\ &= \sum_{n=M}^{\infty} f(n) \alpha_{n-M}^{(M)} Q_{M+1} \\ &= Q_{M+1} \sum_{n=0}^{\infty} f(n+M) \alpha_n^{(M)} \end{aligned}$$



Σχήμα 6.1: Στο σχήμα αυτό βλέπουμε το μέσο κόστος σαν συνάρτηση της ηλικίας αντικατάστασης. Το ελάχιστο κόστος επιτυγχάνεται όταν η ηλικία αντικατάστασης είναι $M = 9$.

Αν $f(n) = \rho^n$ τότε το δεύτερο άθροισμα γράφεται $\sum_{n=0}^{\infty} \rho^{n+M} \alpha_n = \frac{\rho^M}{1-\phi_X^M(\rho)}$ ενώ το πρώτο είναι $\frac{\phi_X^M(\rho)}{1-\phi_X^M(\rho)}$ και συνεπώς το συνολικό κόστος είναι

$$C(M) = c_2 \frac{\phi_X^M(\rho)}{1-\phi_X^M(\rho)} + (c_1 - c_2) p_M \frac{\rho^M}{1-\phi_X^M(\rho)} = \frac{c_2 \phi_X^M(\rho) + (c_1 - c_2) p_M \rho^M}{1-\phi_X^M(\rho)}$$

όπου

$$\phi_X^M(\rho) = \sum_{i=0}^{M-1} \rho^i p_i + \rho^M Q_M.$$

Παράδειγμα 6.3. Ας υποθέσουμε ότι $\rho = 0.99$, $c_1 = 500$, $c_2 = 100$, και ότι η ζωή του εξαρτήματος είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στους ακεραίους $\{1, 2, 3, \ldots, K\}$. Τότε $p_i = \frac{1}{K}$ για $i = 1, 2, \ldots, K$, και

$$\begin{aligned} \phi_X^M(\rho) &= \frac{1}{K}\left(\rho + \rho^2 + \cdots + \rho^{M-1}\right) + \rho^M \frac{K-M+1}{K} = \frac{1-\rho^M}{K(1-\rho)} + \rho^M \frac{K-M+1}{K} \\ &= \rho \frac{1 + \rho^{M-1}(K-M) - \rho^M(K-M+1)}{K(1-\rho)}. \end{aligned}$$

Κεφάλαιο 7

Μαρκοβιανές διαδικασίες αποφάσεων

7.1 Διαδικασίες Markov με αμοιβές

Έστω μια αδιαχώριστη διαδικασία Markov (X_n) με χώρο καταστάσεων $\mathbb{S}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης P_{ij}. Θα υποθέσουμε ότι κάθε φορά που η διαδικασία βρίσκεται στην κατάσταση j παίρνουμε μια αμοιβή $g(j)$ όπου $g : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}$ μια δεδομένη συνάρτηση. Έστω επίσης ότι η παρούσα αξία την χρονική στιγμή 0 μιας μοναδιαίας αμοιβής που θα ληφθεί την χρονική στιγμή 1 είναι ίση με $\alpha \in (0, 1]$, όπου α ο συντελεστής απόσβεσης. Αν υποθέσουμε ότι την χρονική στιγμή 0 η αλυσίδα βρίσκεται στην κατάσταση i τότε η παρούσα αξία της συνολικής αμοιβής την χρονική στιγμή 0 των αμοιβών που θα πάρουμε τις πρώτες $n-1$ χρονικές στιγμές είναι $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k g(X_k)$. Αν η συνάρτηση g είναι φραγμένη (μια συνθήκη που ικανοποιείται αυτόματα αν ο χώρος καταστάσεων είναι πεπερασμένος) τότε έχει σίγουρα νόημα να εξετάσουμε την παρούσα αξία των συνολικών αμοιβών όταν ο χρονικός ορίζοντας είναι άπειρος, δηλαδή η διαδικασία Μάρκωφ δεν σταματά ποτέ. Σ' αυτή την περίπτωση η παρούσα αξία της συνολικής αμοιβής είναι $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k g(X_k)$ και είναι ασφαλώς μια τυχαία μεταβλητή.

Ας συμβολίσουμε τώρα με $V(i)$ την μέση τιμή αυτής της τυχαίας μεταβλητής. Συμβολίζοντας με $E_i Y$ την δεσμευμένη μέση τιμή $E[Y|X_0 = i]$ όπου Y είναι μια οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή έχουμε ότι

$$\begin{aligned} V(i) &= E_i \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k g(X_k) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k E[g(X_k)|X_0 = i] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \sum_{j \in \mathbb{S}} P_{ij}^k g(j) = \sum_{j \in \mathbb{S}} g(j) \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k P_{ij}^k \end{aligned}$$

Παρατηρείστε ότι η συνάρτηση $V : \mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}$ μπορεί να εκφραστεί βάσει της g καθώς και του πίνακα

$$R_{ij}^{\alpha} := \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k P_{ij}^k. \tag{7.1}$$

Συγκεκριμένα έχουμε ότι

$$V(i) = \sum_{j\in\mathbb{S}} R_{ij}^{\alpha} g(j). \tag{7.2}$$

Η σχέση (7.1 μπορεί να εκφραστεί και ως εξής

$$R^{\alpha} = I + \alpha P + \alpha^2 P^2 + \cdots + \alpha^n P^n + \cdots .$$

Από την παραπάνω σχέση έχουμε, πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη από τα δεξιά με αP,

$$\alpha P R^{\alpha} = \alpha P + \alpha^2 P^2 + \cdots + \alpha^n P^n + \cdots .$$

Αφαιρώντας κατά μέλη την δεύτερη από την πρώτη σχέση έχουμε

$$(I - \alpha P) R^{\alpha} = I. \tag{7.3}$$

Κάτω από επιπλέον συνθήκες (για παράδειγμα αν ο χώρος καταστάσεων $\mathbb{S}$ είναι πεπερασμένος και συνεπώς οι πίνακες P και R^{α} είναι πεπερασμένοι τετραγωνικοί πίνακες) από την (7.3) προκύπτει ότι

$$R^{\alpha} = (I - \alpha P)^{-1}. \tag{7.4}$$

Η εξίσωση (7.2) τότε γράφεται στη μορφή

$$V = R^{\alpha} g = (I - \alpha P)^{-1} g. \tag{7.5}$$

Μια ισοδύναμη μέθοδος για τον προσδιορισμό της V βασίζεται στην ανάλυση του πρώτου βήματος και στην μαρκοβιανή ιδιότητα που μας επιτρέπει να γράψουμε την εξής σχέση

$$V(i) = g(i) + \alpha \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij} V(j). \tag{7.6}$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσουμε την ισοδυναμία των (7.4) και (7.6). Η δικαιολόγηση της (7.6) βασιζεται στο εξής επιχείρημα. Την χρονική στιγμή μηδέν εισπράτουμε $g(i)$ και στη συνέχεια μεταβαίνουμε στην κατάσταση j με πιθανότητα P_{ij}. Η παρούσα αξία των συνολικών απολαβών ξεκινώντας από την κατάσταση j είναι εξ' ορισμού $V(j)$, αλλά θα πρέπει να πολλαπλασιαστεί με τον παράγοντα απόσβεσης α.

Παράδειγμα 1. Εστω μια διαδικασία Markov με χώρο καταστάσεων $\mathbb{S} = \{0, 1, 2, 3\}$ και πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Αν $g(i)$ για $i = 0, 1, 2, 3$ είναι δεδομένοι αριθμοί, και ο συντελεστής απόσβεσης είναι $\alpha < 1$, να ευρεθεί η παρούσα αξία $V(i)$ των συνολικών αμοιβών για κάθε αρχικό σημείο εκκίνησης i. Σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα (7.6) γίνεται

$$\begin{aligned}
V(0) &= g(0) + \alpha V(1) \\
V(1) &= g(1) + \frac{\alpha}{2}(V(0) + V(2)) \\
V(2) &= g(2) + \frac{\alpha}{2}(V(1) + V(3)) \\
V(3) &= g(3) + \alpha V(2).
\end{aligned}$$

7.2 Μέσος ρυθμός αμοιβής

Σε αντίθεση με την προηγούμενη παράγραφο όπου θεωρήσαμε την παρούσα αξία όλων των μελλοντικών αμοιβών, σε πολλά προβλήματα έχουμε διαδικασίες Markov για τις οποίες έχουμε κάποιο κόστος ή κέρδος $g(i)$ όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση i και μας ενδιαφέρει το μέσο κόστος (ή κέρδος) ανά μονάδα χρόνου για κάποιο μεγάλο χρονικό ορίζοντα. Θα θεωρήσουμε ότι η αλυσίδα Markov (X_n) είναι αδιαχώριστη, θετικά επαναληπτική. Το μέσο κόστος αυτό εκφράζεται ως

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_i \sum_{k=0}^{n-1} g(X_k). \tag{7.7}$$

Η παραπάνω σχέση, εναλλάσοντας το άθροισμα με την δεσμευμένη μέση τιμή γράφεται και ως

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} E[g(X_k)|X_0 = i] &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}^k g(j) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{S}} g(j) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^k \\
&= \sum_{j\in\mathbb{S}} g(j)\pi_j. \qquad (7.8)
\end{aligned}$$

Η εναλλαγή του ορίου και του αθροίσματος στον χώρο καταστάσεων $\mathbb{S}$ στην δεύτερη εξίσωση πιο πάνω χρειάζεται μια πιο προσεκτική δικαιολόγηση, επιτρέπεται πάντα όμως όταν ο $\mathbb{S}$ είναι πεπερασμένος. Στην τρίτη εξίσωση χρησιμοποιήσαμε το βασικό οριακό θεώρημα για αδιαχώριστες θετικά επαλαλληπτικές αλυσίδες Markov που μας εξασφαλίζει ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P_{ij}^k = \pi_j \tag{7.9}$$

για κάθε $i \in \mathbb{S}$, όπου π είναι η στάσιμη κατανομή που προκύπτει ως η (μοναδική μετά την κανονικοποίηση) λύση του συστήματος

$$\pi_j = \sum_{i\in\mathbb{S}} \pi_i P_{ij}. \tag{7.10}$$

7.3 Αμοιβές που εξαρτώνται από μεταβάσεις

Εδώ θα εξετάσουμε την περίπτωση που οι αμοιβές εξαρτώνται από τις μεταβάσεις και όχι μονο από την εκάστοτε κατάσταση στην οποία βρίσκεται η αλυσίδα Markov. Θα θεωρήσουμε δηλαδή ότι υπάρχει μια συνάρτηση $\gamma : \mathbb{S}\times\mathbb{S} \mapsto \mathbb{R}$ που προσδιορίζει την αμοιβή $\gamma(i,j)$ για κάθε μετάβαση από την κατάσταση i στην κατάσταση j. Στην περίπτωση αυτή η παρούσα αξία της συνολικής μέσης αμοιβής ξεκινώντας από την κατάσταση i και με συντελεστή απόσβεσης α είναι

$$V(i) = \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}\gamma(i,j) + \alpha \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}V(j). \tag{7.11}$$

Παρατηρείστε ότι, αν θέσουμε

$$g(i) := \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}\gamma(i,j), \tag{7.12}$$

η (7.11) είναι ίδια με την (7.2).

Παρομοίως, το μέσο κόστος μακροπρόθεσμα δίδεται από την αντίστοιχη έκφραση της (7.7) δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} E_i \sum_{k=0}^{n-1} \gamma(X_k, X_{k+1}). \tag{7.13}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι

$$\begin{aligned}
E_i[\gamma(X_k,X_{k+1})] &= \sum_{(j,l)\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}} P(X_{k+1}=l, X_k=j|X_0=i)\gamma(j,l) \\
&= \sum_{(j,l)\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}} P^k_{ij}P_{jl}\gamma(j,l) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{S}} P^k_{ij} \sum_{l\in\mathbb{S}} P_{jl}\gamma(j,l) \\
&= \sum_{j\in\mathbb{S}} P^k_{ij} g(j)
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό (7.12). Συνεπώς η (7.13) γράφεται ως

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j\in\mathbb{S}} P^k_{ij} g(j) &= \sum_{j\in\mathbb{S}} g(j) \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} P^k_{ij} = \sum_{j\in\mathbb{S}} g(j)\pi_j \\
&= \sum_{(j,l)\in\mathbb{S}\times\mathbb{S}} \pi_j P_{jl}\gamma(j,l).
\end{aligned}$$

7.4 Μαρκοβιανές Διαδικασίες Αποφάσεων

Θεωρούμε δύο σύνολα, το σύνολο καταστάσεων, $\mathbb{S}$ που είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο και το οποίο συνήθως θα ταυτίζουμε με κάποιο υποσύνολο των φυσικών $\{0, 1, 2, \ldots, \}$ και το σύνολο αποφάσεων $A = \{a, b, c, \ldots\}$ το οποίο θεωρούμε πεπερασμένο. Θεωρούμε επίσης μια *οικογένεια* από πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης, $\{P_{ij}(a), a \in A\}$ καθώς και μια συνάρτηση κόστους $C : \mathbb{S} \times A \mapsto \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, $C(i, a)$ είναι το κόστος που πληρώνουμε όταν βρισκόμαστε στην κατάσταση i και επιλέξουμε την απόφαση a. Τέλος έστω α ο συντελεστής απόσβεσης βάσει του οποίου υπολογίζουμε την παρούσα αξία κάποιου μελλοντικού κόστους. Αν $X_k = i$ είναι η κατάσταση την χρονική στιγμή k και $Y_n = a$ η απόφαση που παίρνουμε την ίδια χρονική στιγμή, τότε η επόμενη κατάσταση είναι $X_{k+1} = j$ με πιθανότητα $P(X_{k+1} = j | X_k = i, Y_k = a) = P_{ij}(a)$. Η παρούσα αξία του συνολικού κόστους αυτής της διαδικασίας θα είναι τότε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k C(X_k, Y_k).$$

Σκοπός μας στο προκείμενο πρόβλημα είναι να βρούμε μια ακολουθία αποφάσεων Y_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$ τέτοια ώστε να ελαχιστοποιεί το μέσο συνολικό κόστος (ή να μεγιστοποιεί την μέση συνολική αμοιβή, στην περίπτωση που τα $C(i, a)$ αντιπροσωπεύουν αμοιβές).

Θα ονομάζουμε *πολιτική* κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{S} \mapsto A$ από τον χώρο καταστάσεων στον χώρο αποφάσεων. Μια πολιτική με άλλα λόγια είναι ένας κανόνας που υπαγορεύει μια απόφαση, έστω a, κάθε φορά που η αλυσίδα Markov βρίσκεται στην κατάσταση i. Έτσι έχουμε $f(i) = a$. Η υιοθέτηση μιας πολιτικής περιορίζει την ελευθερία που έχουμε να διαλέγουμε τις αποφάσεις μας. Μας αναγκάζει κάθε φορά που βρισκόμαστε σε μια συγκεκριμένη κατάσταση να διαλέγουμε την ίδια πάντα απόφαση. Αποδεικνύεται όμως ότι, λόγω της μαρκοβιανής φύσης της διαδικασίας, υπάρχει *βελτιστη πολιτική* η οποία εξασφαλίζει συνολικό μέσο κόστος εξίσου χαμηλό ή χαμηλότερο από οποιαδήποτε άλλη ακολουθία αποφάσεων που δεν προκύπτει από κάποια πολιτική. Συνεπώς είναι αρκετό να αναζητήσουμε την βέλτιστη πολιτική χωρίς να χρειάζεται να ασχοληθούμε όλες τις δυνατές ακολουθίες αποφάσεων. Παρατηρούμε πρώτα απ΄ όλα ότι, αν χρησιμοποιήσουμε μια οποιαδήποτε πολιτική, f, η διαδικασία που προκύπτει ειναι μαρκοβιανή με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης $P_{ij}(f(i))$.

Έστω $V_f(i)$ η παρούσα αξία του συνολικού κόστους όταν ξεκινάμε από την κατάσταση i και εφαρμόζουμε την πολιτική f. Τότε, από την (7.6) έχουμε ότι

$$V_f(i) = C(i, f(i)) + \alpha \sum_{j \in \mathbb{S}} P_{ij}(f(i)) V_f(j). \tag{7.14}$$

Η συνάρτηση V_f ονομάζεται και συνάρτηση αξίας (value function).

7.4.1 Παράδειγμα: Ένα απλό πρόβλημα συντήρησης εξοπλισμού

Πριν προχωρήσουμε στην ανάλυσή μας ας δούμε ένα απλό παράδειγμα. Θεωρούμε μία μηχανή το οποίο μπορεί να βρίσκεται σε δύο καταστάσεις, την κατάσταση ομαλής λειτουργίας, έστω 1 και την κατάσταση κακής λειτουργίας, έστω 0. Εδώ λοιπόν ο χώρος καταστάσεων είναι $\mathbb{S} = \{0, 1\}$.

[0]Παραπέμπουμε τους ενδιαφερόμενους για αυτήν, και για όλες τις προτάσεις χωρίς απόδειξη που θα ακολουθήσουν, στον Sheldon Ross, (1970). *Applied Probability Models with Optimization Applications,* Εκδόσεις Dover.

Έστω ότι ο χώρος των αποφάσεων έχει επίσης δύο σημεία, επισκευή r, ή μή επισκευή, n. Συνεπώς $A = \{n, r\}$. Ας υποθέσουμε ακόμη ότι

$$P(n) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}, \qquad P(r) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{7.15}$$

Η έννοια των παραπάνω πινάκων πιθανοτήτων μετάβασης είναι ότι, χωρίς επισκευή μια μηχανή, αν μεν βρίσκεται σε κακή κατάσταση, τότε παραμένει σε κακή κατάσταση, αν δε βρίσκεται σε καλή κατάσταση, τότε με πιθανότητα $1/3$ την επόμενη χρονική στιγμή θα βρεθεί σε κακή κατάσταση. Αντίθετα με επισκευή, η μηχανή την επόμενη χρονική στιγμή βρίσκεται πάντα σε καλή κατάσταση. Τέλος θεωρούμε δεδομένα και τα κόστη $C(1, n) = 0$, $C(1, r) = c$, $C(0, n) = d$, και $C(0, r) = c + d$. Τα κόστη αυτά υπολογίζονται με την παραδοχή ότι κάθε επισκευή κοστίζει c ανεξαρτήτως της κατάστασης της μηχανής και κάθε χρονική περίοδος που η μηχανή βρίσκεται σε κακή κατάσταση κοστίζει d. Θα υποθέσουμε επιπλέον ότι $c < d$ άλλως το πρόβλημα είναι τετριμμένο: αν η επισκευή κοστίζει περισσότερο από την κακή λειτουργία τότε δεν επισκευάζουμε ποτέ.

Έστω f_1 η πολιτική σύμφωνα με την οποία $f_1(0) = r$, $f_1(1) = n$, δηλαδή επισκευάζουμε πάντα όταν η μηχανή είναι χαλασμένη και ποτέ όταν είναι σε καλή λειτουργία. Με αυτή την πολιτική η μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων γίνεται μια απλή αλυσίδα Markov με πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

Η παρούσα αξία του συνολικού μέσου κόστους στην περίπτωση αυτή δίνεται από το σύστημα

$$\begin{aligned} V_{f_1}(0) &= c + d + \alpha V_{f_1}(1) \\ V_{f_1}(1) &= \alpha \frac{V_{f_1}(0) + 2V_{f_1}(1)}{3} \end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} V_{f_1}(0) &= \frac{(3-2\alpha)}{(1-\alpha)(3+\alpha)}(c+d) \\ V_{f_1}(1) &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)(3+\alpha)}(c+d). \end{aligned} \tag{7.16}$$

Έστω τώρα f_2, f_3 οι πολικτικές $f_2(0) = f_2(1) = n$ και $f_3(0) = f_3(1) = r$ που αντιστοιχούν, η μεν πρώτη στην περίπτωση που δεν επισκευάζουμε ποτέ, η δε δεύτερη στην περίπτωση που επισκευάζουμε πάντα. Οι αντίστοιχοι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης είναι οι $P(n)$ και $P(r)$ της εξίσωσης (7.15). Στην πρώτη περίπτωση έχουμε το σύστημα

$$\begin{aligned} V_{f_2}(0) &= d + \alpha V_{f_2}(0) \\ V_{f_2}(1) &= \alpha \frac{V_{f_2}(0) + 2V_{f_2}(1)}{3} \end{aligned}$$

ενω στην δεύτερη το σύστημα

$$\begin{aligned} V_{f_3}(0) &= c + d + \alpha V_{f_3}(1) \\ V_{f_3}(1) &= c + \alpha V_{f_3}(1). \end{aligned}$$

Λύνοντας αυτά τα συστήματα έχουμε

$$\begin{aligned} V_{f_2}(0) &= \frac{1}{1-\alpha}d \\ V_{f_2}(1) &= \frac{\alpha}{(1-\alpha)(3-2\alpha)}d. \end{aligned} \tag{7.17}$$

και

$$\begin{aligned} V_{f_3}(0) &= d + c\frac{1}{1-\alpha} \\ V_{f_3}(1) &= \frac{1}{1-\alpha}c. \end{aligned} \tag{7.18}$$

Συγκρίνοντας ανάμεσα στις λύσεις αυτές μπορούμε στην προκείμενη περίπτωση να βρούμε την βέλτιστη πολιτική για δεδομενες τιμές των α, c, d. Στην γενική περίπτωση όμως, όταν ο αριθμός των διαθέσιμων αποφάσεων $|A|$, και ο αριθμός των καταστάσεων του συστήματος, $|\mathbb{S}|$ είναι πιό μεγάλος, ο αριθμός όλων των πολιτικών είναι $|\mathbb{S}|^{|A|}$ και συνεπώς η απαρίθμησή τους και ο υπολογισμός όλων των τιμών για κάθε πολιτική δέν είναι πρακτικά εφικτός. (Παρατηρείστε ότι στο παράδειγμα συντήρησης εξοπλισμού που είδαμε, εξετάσαμε μόνο τρείς πολιτικές. Η τέταρτη που είναι 'επισκευή όταν η μηχανή είναι σε καλή κατάσταση και μη επισκευή όταν είναι σε κακή' δεν εξετάσθηκε διότι θεωρήθηκε εκ προϊμίου μη βέλτιστη.)

7.4.2 Η εξίσωση της βέλτιστης πολιτικής

Έστω ότι η f είναι μια βέλτιστη πολιτική για την μαρκοβιανή διαδικασία αποφάσεων που περιγράψαμε και V_f η αντίστοιχη συνάρτηση αξίας όπως προκύπτει από την εξίσωση (7.14). Η V_f θα πρέπει τότε να ικανοποιεί την ακόλουθη εξίσωση

$$V_f(i) = \min_{b \in A} \left(C(i,b) + \alpha \sum_{j \in \mathbb{S}} P_{ij}(b) V_f(j) \right). \tag{7.19}$$

Η αιτιολόγηση για την παραπάνω εξίσωση είναι αρκετά απλή: Αν διαλέξουμε το b ως την πρώτη απόφαση και στη συνέχεια ακολουθήσουμε την βέλτιστη πολιτική η παρούσα αξία του συνολικού κόστους θα είναι $C(i,b) + \alpha \sum_{j \in \mathbb{S}} P_{ij}(b) V_f(j)$. Η καλύτερη δυνατή επιλογή για το b είναι η επιλογή του έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί αυτή την ποσότητα και αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει την βέλτιστη πολιτική.

7.5 Αλγόριθμος Βελτίωσης Πολιτικής (Policy Improvement)

Ο αλγόριθμος αυτός βασίζεται στην παρατήρηση ότι, αν με κάποιο τρόπο γνωρίζαμε την συνάρτηση αξίας για την βέλτιστη πολιτική, V_f, θα μπορούσαμε να προσδιορίσουμε και την βέλτιστη πολιτική.

Ορίζουμε μια αρχική πολιτική f_1 ως εξής

$$f_1(i) = \arg\min_{b\in A} \left(C(i, b)\right). \tag{7.20}$$

Το νόημα αυτής της σχέσης είναι ότι η $f_1(i)$ είναι ίση με την τιμή εκείνη του b που ελαχιστοποιεί την $C(i, b)$. (Σε περίπτωση που περισσότερες από μια αποφάσεις ελαχιστοποιούν την $C(i, \cdot)$ θεωρούμε ότι το σύνολο των αποφάσεων A είναι διατεταγμένο και διαλέγουμε την μικρότερη από αυτές.) Στην συνέχεια υπολογίζουμε την συνάρτηση αξίας V_1 που προκύπτει όταν χρησιμοποιούμε την πολιτική f_1 και που υπολογίζεται από το σύστημα

$$V_1(i) = C(f_1(i), i) + \alpha \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}(f_1(i))V_1(j). \tag{7.21}$$

Στην συνέχεια υπολογίζουμε μια καινούργια πολιτική f_2 από την σχέση

$$f_2(i) = \arg\min_{b\in A} \left(C(i, b) + \alpha \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}(f_1(i))V_1(j) \right) \tag{7.22}$$

και την καινούργια συνάρτηση αξίας με βάση την πολιτική f_2 που συμβολίζουμε με V_2 και που υπολογίζουμε από το σύστημα

$$V_2(i) = C(f_2(i), i) + \alpha \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}(f_2(i))V_2(j). \tag{7.23}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι $V_2(i) \leq V_1(i)$ για κάθε $i \in \mathbb{S}$ και συνεπώς η καινούργια πολιτική είναι καλύτερη από την προηγούμενη.

Φανταζόμαστε ότι έχουμε επαναλάβει αυτή την διαδικασία n φορές και μετά από αυτές τις n επαναλήψεις έχουμε καταλήξει σε μια πολιτική f_n και μια αντίστοιχη συνάρτηση αξίας V_n. Η πολιτική f_{n+1} ορίζεται τότε από την σχέση

$$f_{n+1}(i) = \arg\min_{b\in A} \left(C(i, b) + \alpha \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}(f_n(i))V_n(j) \right) \tag{7.24}$$

και η αντίστοιχη συνάρτηση αξίας V_{n+1} από το σύστημα

$$V_{n+1}(i) = C(f_{n+1}(i), i) + \alpha \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}(f_{n+1}(i))V_{n+1}(j). \tag{7.25}$$

Η συνάρτηση αξίας V_{n+1} είναι με τη σειρά της μικρότερη από την V_n και επομένως η πολική f_{n+1} καλύτερη από την f_n. Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι, μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων ο αλγόριθμος συγκλίνει, δηλαδή ότι υπάρχει N τέτοιο ώστε $f_{N+1} = f_N$ και συνεπώς $V_{N+1} = V_N$. Αυτό είναι φυσική συνέπεια του γεγονότος ότι ο χώρος των πολιτικών είναι ένα πεπερασμένο σύνολο και συνεπώς δεν είναι δυνατόν οι πολιτικές να βελτιώνονται επ' άπειρον. Ας συμβολίσουμε λοιπόν με f^* την πολιτική f_N στην οποία ο αλγόριθμος σταματά και με V^* την αντίστοιχη συνάρτηση αξίας. Δεδομένου ότι $f_N = f_{N+1} = f^*$, η σχέση (7.24) με $n = N$ δίνει

$$f^*(i) = \arg\min_{b\in A} \left(C(i, b) + \alpha \sum_{j\in\mathbb{S}} P_{ij}(f^*(i))V^*(j) \right). \tag{7.26}$$

Παρατηρείστε ότι η f^* ικανοποιεί την εξίσωση βέλτιστης πολιτικής (7.19).

7.6 Παράδειγμα: Πώληση ακινήτου

Υποθέτουμε ότι έχουμε ένα ακίνητο προς πώληση. Κάθε μέρα υποθέτουμε ότι έχουμε μια προσφορά ύψους $i = 0, 1, 2, \dots, N$ με πιθανότητα p_i για το ακίνητο αυτό. Οι προσφορές θεωρούνται ανεξάρτητες, ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. (Η υπόθεση αυτή είναι πιο ρεαλιστική απ' ότι φαίνεται αρχικά: Μέρες χωρίς καθόλου προσφορές αντιστοιχούν σε προσφορές ύψους 0 ενώ για τις μέρες που έχουμε περισσότερες από μία προσφορές παίρνουμε την μέγιστη.) Υποθέτουμε επίσης ότι κάθε μέρα που δεν πουλάμε το ακίνητο υποχρεούμεθα να πληρώσουμε κόστος συντήρησης c καθώς και ότι ο συντελεστής απόσβεσης είναι α.

Ξεκινάμε θέτωντας το πρόβλημα αυτό στο γενικό πλαίσιο των μαρκοβιανών διαδικασιών απόφασης. Ο χώρος αποφάσεων έχει δύο στοιχεία, $A = \{s, r\}$, όπου το s είναι πώληση και το r είναι απόρριψη της προσφοράς. Ο χώρος καταστάσεων είναι το μέγεθος της εκάστοτε προσφοράς μαζί με την κατάσταση -1 που είναι η κατάσταση στην οποία βρισκόμαστε μετά την πώληση του ακινήτου. Έτσι έχουμε $\mathbb{S} = \{-1, 0, 1, 2, \dots, N\}$. Τέλος η συνάρτηση κόστους είναι $C(i, r) = c$, $C(i, s) = -i$, για $i = 0, 1, 2, \dots, N$ και $C(-1, r) = C(-1, s) = 0$. Οι πίνακες πιθανοτήτων μετάβασης δίδονται από τους

$$P(r) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & p_{N-1} & p_N \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & p_{N-1} & p_N \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & p_{N-1} & p_N \\ 0 & p_0 & p_1 & \cdots & p_{N-1} & p_N \end{bmatrix}, \qquad P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(Παρατηρείστε ότι $p_0 + p_1 + \cdots + p_N = 1$.)

Θα συμβολίσουμε την βέλτιστη πολιτική με f^* και την αντίστοιχη συνάρτηση αξίας με V^*. Η συνάρτηση αξίας όταν χρησιμοποιούμε την βέλτιστη πολιτική πρέπει να ικανοποιεί την σχέση

$$V^*(i) = \min\{-i, c + \alpha \sum_{j=0}^{N} p_j V^*(j)\} \tag{7.27}$$

και η βέλτιστη πολιτική την

$$f^*(i) = \arg\min\{-i, c + \alpha \sum_{j=0}^{N} p_j V^*(j)\}. \tag{7.28}$$

(Η παραπάνω εξίσωση πρεπει να ερμηνευθεί ως εξής: αν το πρωτο από τα δύο ορισματα είναι το μικρότερο τότε $f^*(i) = s$, αν το δεύτερο είναι το μικρότερο, τότε $f^*(i) = r$.) Αν θέσουμε

$$i^* = \min\{i : -i < c + \alpha \sum_{j=0}^{N} p_j V^*(j)\} \tag{7.29}$$

βλέπουμε οτι η βέλτιστη πολιτική συνίσταται στην αποδοχή κάθε προσφοράς μεγαλύτερης ή ίσης με i^* και στην απόρριψη κάθε προσφοράς μικρότερης από i^*. Πράγματι, από την (7.27), αν

$i < i^*$ τότε $V^*(i) = c + \alpha \sum_{j=0}^{N} p_j V^*(j) < -i$. Συνεπώς, από την (7.28) έχουμε για αυτό το i οτι $\min\{-i, V^*(i)\} = V^*(i)$ και $f^*(i) = r$. Με ανάλογα επιχειρήματα βλέπουμε ότι αν $i \geq i^*$ τότε $f^*(i) = s$.

Μέχρι στιγμής έχουμε καταφέρει να βρούμε όχι την ίδια την βέλτιστη πολιτική αλλά την δομή της: υπάρχει ένας ακέραιος i^* τέτοιος ώστε αν μια προσφορά είναι μεγαλύτερη ή ίση από i^* να πρέπει να σταματήσουμε ενώ διαφορετικά να συνεχίσουμε. Από την στιγμή όμως που η δομή της βέλτιστης πολιτικής είναι γνωστή δεν είναι δύσκολο να την προσδιορίσουμε πλήρως. Πράγματι, έστω f_i η πολιτική που αποδέχεται κάθε προσφορά μεγαλύτερη ή ίση με i. Αν συμβολίσουμε σ' αυτή την περίπτωση με T τον αριθμό των προσφορών που απορρίπουμε μέχρι να αποδεχτούμε μια προσφορά είναι εύκολο να δουμε ότι

$$P(T = k) = P(X < i)^{k-1} P(X \geq i), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

όπου X μια τυχαία μεταβλητή με κατανομή $P(X = i) = p_i$. Η παρούσα αξία του μέσου κόστους στην συγκεκριμένη περίπτωση δίδεται από την σχέση

$$E\left[c + \alpha c + \cdots + \alpha^T c - \alpha^{T+1} E[X | X \geq i]\right] = c\frac{1 - E[\alpha^{T+1}]}{1 - \alpha} - E[\alpha^{T+1}] E[X | X \geq i]. \quad (7.30)$$

Δεδομένου ότι

$$E\alpha^T = \frac{P(X \geq i)}{1 - \alpha P(X < i)}$$

(πιθανογεννήτρια της γεωμετρικής κατανομής) το δεξί μέλος της (7.30) γίνεται

$$\begin{aligned} G(i) &= \frac{c}{1 - \alpha P(X < i)} - \alpha \frac{P(X \geq i)}{1 - \alpha P(X < i)} E[X | X \geq i] \\ &= \frac{c - \alpha E[X; X \geq i]}{1 - \alpha P(X < i)} \\ &= \frac{c - \alpha \sum_{j=i}^{N} j p_j}{1 - \alpha \sum_{j=0}^{i-1} p_j}. \end{aligned}$$

Το πρόβλημα πλέον ανάγεται στην ελαχιστοποίηση της συνάρτησης $G(i)$.

Κεφάλαιο 8

Διαδικασία Poisson

Μια σημειακή διαδικασία είναι ένα σύνολο από σημεία στην πραγματική ευθεία ή γενικότερα στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$. Ως επί το πλείστον θα θεωρούμε ότι τα σημεία στην πραγματική ευθεία αντιπροσωπεύουν τους χρόνους που συμβαίνει κάποιο γεγονός όπως η άφιξη ενός πελάτη σ' ένα σύστημα εξυπηρέτησης, η εμφάνιση βλάβης σε κάποια μηχανή κ.ο.κ. Η στοχαστική συμπεριφορά μιας σημειακής διαδικασίας στην πραγματική ευθεία μπορεί να περιγραφεί με διάφορους τρόπους. Οι δύο χρησιμότεροι είναι:

ι) μέσω της απαριθμήτριας συνάρτησης (ή γενικότερα μέσω του «μέτρου απαρίθμησης»)

ιι) μέσω των διαστημάτων μεταξύ των γεγονότων.

Εστω $\{T_n\}$ ένα σύνολο από σημεία στην πραγματική ευθεία. Η απαριθμήτρια συνάρτηση N ορίζεται (για θετικούς χρόνους) ως

$$N(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}(0 < t \le T_n) \ .$$

Ο αριθμός των σημείων σε κάποιο διάστημα $B = (a, b]$ δίνεται από την $N(B) := N(b) - N(a)$.

8.1 Η διαδικασία Poisson

Ορισμός 8.1. Μια σημειακή διαδικασία είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό λ αν η αντίστοιχη απαριθμήτρια διαδικασία N ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

α) $N(0) = 0$ και N έχει μόνο θετικά άλματα μοναδιαίου μεγέθους.

β) Η N έχει *ανεξάρτητες προσαυξήσεις* δηλαδή αν τα διαστήματα A, B, είναι ξένα μεταξύ τους οι $N(A)$ και $N(B)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ.

γ) Για κάθε δίαστημα $B = (t, t+s]$

$$P(N(B) = k) = \frac{1}{k!}(\lambda s)^k e^{-\lambda s} \tag{8.1}$$

Ένας εναλλακτικός χαρακτηρισμός της διαδικασίας Poisson δίνεται από το ακόλουθο

Θεώρημα 8.1. *Μια σημειακή διαδικασία είναι Poisson με ρυθμό λ αν η αντίστοιχη απαριθμήτρια διαδικασία ικανοποιεί τις συνθήκες:*

α) *$N(0) = 0$ και N έχει μόνο θετικά άλματα μοναδιαίου μεγέθους.*

β′) *Η N έχει* ανεξάρτητες προσαυξήσεις *δηλαδή αν τα διαστήματα A, B, είναι ξένα μεταξύ τους οι $N(A)$ και $N(B)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ. και επιπλέον, για κάθε διάστημα $(t, t+s]$, $N(t, t+s] \stackrel{\mathrm{d}}{=} N(0, t]$ (δηλαδή οι δύο τ.μ. έχουν την ίδια κατανομή).*

γ′) *$P(N(0, h] = 1) = \lambda h + o(h)$ και $P(N(0, h] \geq 2) = o(h)$ όταν $h \to 0$.*

Μ′ άλλα λόγια οι συνθήκες *β′)* και *γ′)* μαζί εξασφαλίζουν ότι οι προσαυξήσεις έχουν κατανομή Poisson.

Έστω $\phi_k(t)$ η πιθανότητα $P(N(0, t] = k)$. Τότε

$$\begin{aligned} \phi_0(t+h) &= P\{N(0, t+h] = 0\} = P(N(0, t] = 0, N(t, t+h] = 0) \\ &= P(N(0, t] = 0)P(N(t, t+h] = 0) = \phi_0(t)\phi_0(h), \end{aligned} \tag{8.2}$$

όπου η τρίτη εξίσωση ισχύει λόγω της ανεξαρτησίας των προσαυξήσεων και η τελευταία λόγω της στασιμότητας τους. Από την πιο πάνω εξίσωση συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{h}\left[\phi_0(t+h) - \phi_0(t)\right] = -\phi_0(t)\frac{1}{h}\left[1 - \phi_0(h)\right] = -\phi_0(t)\frac{1}{h}\left[\lambda h + o(h)\right],$$

όπου η τελευταία εξίσωση είναι συνέπεια της *γ′)*. Αφήνοντας το $h \to 0$ στην παραπάνω εξίσωση προκύπτει η διαφορική εξίσωση

$$\phi_0{\prime}(t) = -\lambda \phi_0(t)$$

η οποία έχει την μοναδική λύση

$$\phi_0(t) = ce^{-\lambda t}.$$

Από την αρχική συνθήκη $\phi_0(0) = P(N(0, 0] = 0) = 1$ προκύπτει ότι $c = 1$ και συνεπώς

$$P(N(0, t] = 0] = e^{-\lambda t},$$

η οποία, μαζί με την στασιμότητα των προσαυξήσεων αποδεικνύει την *γ)* για $k = 0$.

Με τον ίδιο τρόπο

$$\begin{aligned}\phi_k(t+h) &= P\{N(0,t+h]=k\} = \sum_{i=0}^{k} P(N(0,t]=k-i, N(t,t+h]=i) &(8.3)\\ &= \sum_{i=0}^{k} P(N(0,t]=k-i)P(N(t,t+h]=i) &(8.4)\\ &= \phi_k(t)\phi_0(h)+\phi_{k-1}(t)\phi_1(h)+o(h), &(8.5)\end{aligned}$$

όπου η (8.4) είναι συνέπεια της υπόθεσης των ανεξαρτήτων επαυξήσεων β′) και η (8.5) από την γ′). Επομένως

$$\begin{aligned}\frac{\phi_k(t+h)-\phi_k(t)}{h} &= -\frac{1-\phi_0(h)}{h}\phi_k(t)+\phi_{k-1}(t)\frac{\phi_1(h)}{h}+\frac{o(h)}{h} &(8.6)\\ &= -\lambda\phi_k(t)+\lambda\phi_{k-1}(t)+\frac{o(h)}{h} &(8.7)\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε μια ακόμη φορά την γ′) και το γεγονός ότι $a\cdot o(h)+b\cdot o(h)=o(h)$. Έτσι προκύπτει το σύστημα διαφορικών εξισώσεων

$$\phi_k'(t) = -\lambda\phi_k(t)+\lambda\phi_{k-1}(t), \quad k=1,2,\ldots. \tag{8.8}$$

Ορίζουμε τώρα τις συναρτήσεις $f_k(t) := e^{\lambda t}\phi_k(t)$, $k=0,1,2,\ldots$. Τότε $f_k'(t)=\lambda e^{\lambda t}\phi_k(t)+e^{\lambda t}\phi'(t)$ και η (8.8) μπορεί να γραφτεί σαν

$$\begin{aligned}f_k'(t) &= \lambda f_{k-1}(t), \quad k=1,2\ldots, &(8.9)\\ f_0'(t) &= 1 \quad \text{για κάθε } t. &(8.10)\end{aligned}$$

Όταν $k=1$ η (8.9) ολοκληρώνεται και δίνει

$$f_1(t)=\lambda t+c$$

όπου η σταθερά ολοκλήρωσης c ισούται με το μηδέν εφ′ όσον $\lim_{t\to 0} P(N(0,t]=1)=0=f_1(0)$. Παρόμοια, από την (8.9)

$$f_2(t)=\frac{(\lambda t)}{2}+c$$

όπου η σταθερά της ολοκλήρωσης ισούται επίσης με το μηδέν για τον ίδιο λόγο. Επομένως έχουμε αναδρομικά

$$f_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

και $\phi_k(t)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t}$. ∎

8.1.1 Η σχέση ανάμεσα στην εκθετική, την ομοιόμορφη και την κατανομή Poisson

Οι τρεις αυτές κατανομές συνδέονται, όπως θα δούμε, μέσω της διαδικασίας Poisson. Όπως ήδη είδαμε ο αριθμός των σημείων της διαδικασίας Poisson μέσα σ' ένα διάστημα ακολουθεί την *κατανομή Poisson* (με μέση τιμή το γινόμενο του μήκους του διαστήματος επί τον ρυθμό της διαδικασίας Poisson, λ.)

Ας δούμε τώρα τον ρόλο της εκθετικής κατανομής: Έστω $X_i := T_i - T_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots$, τα διαστήματα μεταξύ των σημείων της διαδικασίας Poisson.

Θεώρημα 8.2. *$\{X_i\}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες εκθετικά κατανεμημένες τ.μ. με ρυθμό λ.*

Έστω Y_i, $i = 1, 2, \dots, n$ μια ακολουθία από τ.μ. και $Y_{(i)}$ $i = 1, 2, \dots, n$ η αντίστοιχη *διατεταγμένη ακολουθία* που λαμβάνεται θέτοντας τις τιμές $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ σε αύξουσα τάξη. Θα αναφερόμαστε στη διατεταγμένη ακολουθία ως το *διατεταγμένο δείγμα*. Συγκεκριμένα, όταν οι Y_i είναι ανεξάρτητες με την ίδια κατανομή και πυκνότητα πιθανότητας $f(y)$ τότε η από κοινού πυκνότητα πιθανότητας της διατεταγμένης ακολουθίας είναι

$$f(y_1, y_2, \dots, y_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f(y_i) & \text{αν } y_1 < y_2 < \cdots < y_n \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} .$$

Θεώρημα 8.3. *Δεδομένου ότι το διάστημα $(0, t]$ (ή οποιοδήποτε άλλο διάστημα, ή ένωση διαστημάτων, συνολικού μήκους t) περιέχει n σημεία μιας διαδικασίας Poisson, οι θέσεις των n αυτών σημείων $T_1, T_2, \dots, T_n$ έχουν την ίδια από κοινού κατανομή όπως το διατεταγμένο δείγμα n ανεξαρτήτων τ.μ. ομοιόμορφα κατανεμημένων στο διάστημα $(0, t]$.*

Απόδειξη: Έστω $t_1 < t_2 < \cdots < t_n < t$. Τότε

$$\begin{aligned} &P(T_1 \in dt_1, T_2 \in dt_2, \dots, T_n \in dt_n | N(t) = n) = \\ &\qquad \frac{P(T_1 \in dt_1, T_2 \in dt_2, \dots, T_n \in dt_n, T_{n+1} > t)}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}}, \end{aligned} \tag{8.11}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό της δεσμευμένης πιθανότητας, το γεγονός ότι $\{N(t) = n\} = \{T_n \leq t < T_n\}$ και τον συμβολισμό $T_i \in dt_i$ που σημαίνει $T_i \in (t_i, t_i + h_i)$. Λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $X_1 = T_1$, $X_i = T_i - T_{i-1}$, $i = 2, 3, \dots, n$, μπορούμε να γράψουμε το δεξί μέλος της τελευταίας εξίσωσης ως

$$\frac{P(X_1 \in dx_1, X_2 \in dx_2, \dots, X_n \in dx_n, X_{n+1} > t - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} \tag{8.12}$$

όπου $x_i = t_i - t_{i-1}$ και το dx_i είναι το διάστημα $(x_i, x_i + h_i)$ με $x_i = t_i - t_{i-1}$. Δεδομένου ότι οι X_i είναι ανεξάρτητες, εκθετικές τ.μ. μπορούμε να γράψουμε την (8.12) ως

$$\frac{\lambda e^{-\lambda x_1} h_1 \cdot \lambda e^{-\lambda x_2} h_2 \cdots \lambda e^{-\lambda x_n} h_n \cdot e^{-\lambda(t - x_1 - x_2 - \cdots - x_n)}}{\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}} = \frac{t^n}{n!} h_1 \cdot h_2 \cdots h_n.$$

∎

8.1.2 Αποφίλωση κατά Bernoulli μιας διαδικασίας Poisson

Έστω S_i, $i = 1, 2, \dots$ τα σημεία μιας διαδικασίας Poisson με ρυθμό λ. Αντιστοιχούμε σε κάθε σημείο S_i μια τ.μ. ξ_i όπου τα ξ_i είναι ανεξάρτητες τ.μ. Bernoulli που παίρνουν μόνο τις τιμές 1 και 2. Έστω $N(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 1(S_i \leq t)$ ο αριθμός των σημείων της αρχικής διαδικασίας Poisson στο διάστημα $(0, t]$ και $N_j(t) = \sum_{i=0}^{\infty} 1(S_i \leq t, \xi_i = j)$, με $j \in \{1, 2\}$, ο αριθμός των σημείων των δύο «θυγατρικών» σημειακών διαδικασιών που προκύπτουν μετά την αποφίλωση. Θα δείξουμε ότι οι $N_1(t)$, $N_2(t)$ είναι επίσης διαδικασίες Poisson και επιπλέον ότι είναι *ανεξάρτητες*.

Η από κοινού πιθανογεννήτρια συνάρτηση $Ez_1^{N_1(t)} z_2^{N_2(t)}$ μπορεί να γραφτεί, δεσμεύοντας στον συνολικό αριθμό των σημείων της αρχικής διαδικασίας $N(t)$, ως

$$E[z_1^{N_1} z_2^{N_2} | N(t) = n] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_1^k p_2^{n-k} z_1^k z_2^{n-k} = (p_1 z_1 + p_2 z_2)^n$$

και επομένως

$$E[z_1^{N_1(t)} z_2^{N_2(t)}] = \sum_{n=0}^{\infty} (p_1 z_1 + p_2 z_2)^n \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t} e^{\lambda t (p_1 z_1 + p_2 z_2)} = e^{-p_1 \lambda t (1 - z_1)} e^{-p_2 \lambda t (1 - z_2)}.$$

8.1.3 Αλλαγή χρονικής κλίμακας στη διαδικασία Poisson και χρονικά μεταβλητές διαδικασίες Poisson

Ορισμός 8.2. Μια σημειακή διαδικασία είναι χρονικά μεταβλητή διαδικασία Poisson με ρυθμό $\lambda \geq 0$ αν η αντίστοιχη απαριθμήτρια διαδικασία N ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

α') $N(0) = 0$ και η N έχει μόνο θετικά άλματα μοναδιαίου μεγέθους.

β') Η N έχει *ανεξάρτητες προσαυξήσεις* δηλαδή αν τα A, B είναι διαστήματα ξένα μεταξύ τους, τότε οι $N(A)$ και $N(B)$ είναι ανεξάρτητες τ.μ.

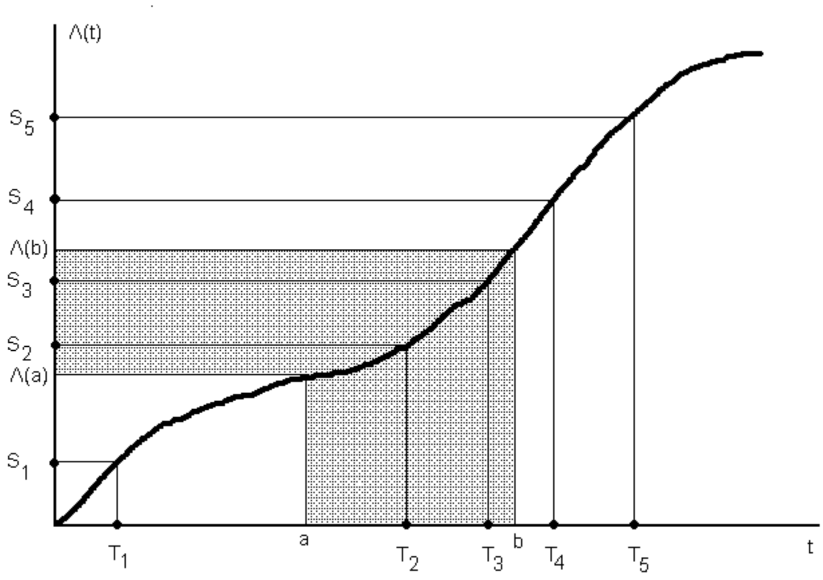
ς') Για κάθε t $P(N(t, t+h] = 1) = \lambda(t)h + o(h)$ και $P(N(t, t+h] \geq 2) = o(h)$ όταν $h \to 0$.

Μπορούμε να δείξουμε, όπως κάναμε και προηγουμένως ότι η $\phi_k(t, s) := P(N(s, t] = k)$ ικανοποιεί το σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t} \phi_k(s, t) &= -\lambda(t) \phi_k(s, t) + \lambda(t) \phi_{k-1}(s, t) \qquad k = 1, 2, \dots \\
\frac{\partial}{\partial t} \phi_0(s, t) &= -\lambda(t) \phi_0(s, t).
\end{aligned}$$

το οποίο έχει την λύση

$$\phi_k(s, t) = \frac{1}{k!} \Big(\textstyle\int_s^t \lambda(u) du \Big)^k e^{-\int_s^t \lambda(u) du}. \tag{8.13}$$



Σχήμα 8.1: Κατασκευή μιας χρονικά μεταβλητής διαδικασίας Poisson

Μια εναλλακτική προσέγγιση στις χρονικά μεταβλητές διαδικασίες Poisson βασίζεται στην ιδέα της αλλαγής χρονικής κλίμακας. Αρχίζουμε με την παρατήρηση ότι, αν η $N_1(t)$ είναι διαδικασία Poisson με ρυθμό 1 και η $N_\lambda(t)$ διαδικασία Poisson με ρυθμό λ τότε $N_1(\lambda t) \overset{\mathrm{d}}{=} N_\lambda(t)$. Με τον ίδιο τρόπο ορίζουμε την συνάρτηση $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(u)du$ η οποία είναι μη φθίνουσα αφού η συνάρτηση $\lambda(u)$ είναι μη αρνητική. Ορίζουμε τώρα μια σημειακή διαδικασία $\tilde{N}(t)$ μέσω της σχέσης

$$\tilde{N}(t) = N_1(\Lambda(t)).$$

Παρατηρούμε ότι η αντίστροφη συνάρτηση Λ^{-1} υπάρχει, εφόσον η Λ είναι μη φθίνουσα[1]. Επομένως αν τα διαστήματα $(a_1, b_1], (a_2, b_2], \ldots, (a_m, b_m]$, είναι *ξένα μεταξύ τους* και οι $k_1, \ldots, k_m$, είναι μη αρνητικοί ακέραιοι

$$\begin{aligned} &P\left(\tilde{N}(a_1, b_1] = k_1, \ldots, \tilde{N}(a_m, b_m] = k_m\right) \\ &\qquad = P\left(N_1(\Lambda(a_1), \Lambda(b_1)] = k_1, \ldots, N_1(\Lambda(a_m), \Lambda(b_m)] = k_m\right). \end{aligned} \tag{8.14}$$

Το σχήμα 1.1 αναπαριστά αυτή την ιδέα για ένα διάστημα. Είναι σαφές από τις ιδιότητες της απλής διαδικασίας Poisson με ρυθμό 1 ότι το δεξί μέλος της (8.14) είναι ίσο με

$$\prod_{i=1}^{m} P\left(N_1(\Lambda(a_i), \Lambda(b_i)] = k_i\right) \;\; = \;\; \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{k_i!}\left(\Lambda(b_i) - \Lambda(a_i)\right)^{k_i} e^{-[\Lambda(b_i) - \Lambda(a_i)]}.$$

[1] Γενικά η συνάρτηση αυτή ορίζεται ως $\Lambda^{-1}(t) = \inf\{s : \Lambda(s) > t\}$.

8.2 Σύνθετες Διαδικασίες Poisson

Αυτή είναι μια αύξουσα διαδικασία αλμάτων που μπορεί να τεθεί στην μορφή

$$Y_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

όπου $\{X_i\}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητες, ισόνομες τ.μ., ανεξάρτητες από την διαδικασία Poisson. Οι στατιστικές ιδιότητες της διαδικασίας αυτής μπορούν να υπολογιστούν εύκολα με βάση τις αντίστοιχες ιδιότητες της διαδικασίας Poisson. Για παράδειγμα

$$\begin{aligned} EY_t &= E\textstyle\sum_{i=1}^{N_t} X_i = \sum_{n=1}^{\infty} E\left[\sum_{i=1}^{n} X_i \middle| N_t = n\right] P(N_t = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} nE[X_1]P(N_t = n) = E[X_1]\sum_{n=1}^{\infty} nP(N_t = n) = \lambda t E X_1. \end{aligned}$$

Η δεύτερη ροπή της Y_t μπορεί να υπολογισθεί για παράδειγμα ως εξής:

$$\begin{aligned} EY_t^2 &= E\left(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} X_i \mathbf{1}(N_t \geq i)\right)\left(\sum_{j=1}^{\infty} X_j \mathbf{1}(N_t \geq j)\right) \\ &= E\left(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} X_i^2 \mathbf{1}(N_t \geq i)\right) + E\left(2\sum_{i<j} X_i X_j \mathbf{1}(N_t \geq i)\mathbf{1}(N_t \geq j)\right) \\ &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{\infty} E[X_i^2] P(N_t \geq i)\right) + \left(2\sum_{i<j} EX_i EX_j P(N_t \geq j)\right) \\ &= E[X_1^2]\lambda t + 2(EX_1)^2 \textstyle\sum_{j=2}^{\infty}(j-1)P(N_t \geq j). \end{aligned}$$

Για παράδειγμα, για κάθε τ.μ. N με ακέραιες τιμές,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} jP(N_t > j) &= \sum_{j=1}^{\infty} j \sum_{i=j+1}^{\infty} P(N = i) = \sum_{i=2}^{\infty} P(N = i)\sum_{j=2}^{i} j \\ &= \sum_{i=2}^{\infty} P(N = i)\frac{i(i-1)}{2} = \frac{1}{2}\left[E(N^2) - EN\right]. \end{aligned}$$

Λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι $EN_t^2 = (\lambda t)^2 + \lambda t$,

$$EY_t^2 = E[X_1^2]\lambda t + (EX_1)^2(\lambda t)^2.$$

Γενικότερα, ο μετασχηματισμός Λαπλασε της Y_t υπολογίζεται εύκολα χρησιμοποιώντας δεσμευμένες μέσες τιμές:

$$\begin{aligned} E[e^{-sY_t}] &= E[e^{-s\sum_{i=1}^{N_t} X_i}] = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} E\left[e^{-s\sum_{i=1}^{n} X_i}\middle| N_t = n\right] P(N_t = n) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (\tilde{F}(s))^n \frac{1}{n!}(\lambda t)^n e^{-\lambda t} = e^{-\lambda t\left(1-\tilde{F}(s)\right)}. \end{aligned}$$

8.3 Ρυθμός Κινδύνου

Ορισμός 8.3. Έστω X μη αρνητική, απολύτως συνεχής τ.μ. με συνάρτηση κατανομής F και συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας f. Η *συνάρτηση κινδύνου* που αντιστοιχεί σ' αυτή την τ.μ. ορίζεται ως

$$h(t) := \frac{f(t)}{1-F(t)} \qquad\qquad t \geq 0.$$

Ο ρυθμός κινδύνου προσδιορίζει πλήρως την κατανομή. Πράγματι, έστω h μια δεδομένη συνάρτηση ρυθμού κινδύνου. Τότε

$$h(t) = \frac{\frac{d}{dt}F(t)}{1-F(t)} = -\frac{d}{dt}\log(1-F(t)).$$

Συνεπώς, $\log(1-F(t)) = -\int h(t)dt + c$ ή

$$F(t) = 1 - ce^{-\int_0^t h(\xi)d\xi}.$$

Υποθέτουμε ότι η F είναι απολύτως συνεχής και ότι $F(0)=0$ το οποίο συνεπάγεται ότι $c=1$ ή

$$F(t) = 1 - e^{-\int_0^t h(\xi)d\xi}$$

<u>Διαισθητικό νόημα:</u> Παρατηρούμε ότι $P(X \leq t+h | X > t) = \frac{P(X \leq t+h, X>t)}{P(X>t)} = \frac{F(t+h)-F(t)}{1-F(t)}$. Επομένως

$$h(t) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}P(X \leq t+h|X>t)\ .$$

Παραδείγματα: Ας υποθέσουμε ότι $F(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{i!}(\lambda t)^j e^{-\lambda t}$. Τότε

$$h(t) = \lambda\frac{\frac{1}{(k-1)!}(\lambda t)^{k-1}}{\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{i!}(\lambda t)^j}.$$

Συγκεκριμένα, για την κατανομή Erlang-2

$$h(t) = \lambda\frac{\lambda t}{1+\lambda t}.$$

Η υπερεκθετική κατανομή δίνεται από τον τύπο $F(t) = 1 - p_1e^{-\lambda_1 t} - p_2e^{-\lambda_2 t}$ (με $p_1+p_2=1$) και ο αντίστοιχος ρυθμός κινδύνου είναι

$$h(t) = \frac{\lambda_1 p_1 e^{-\lambda_1 t} + \lambda_2 p_2 e^{-\lambda_2 t}}{p_1 e^{-\lambda_1 t} + p_2 e^{-\lambda_2 t}}$$

Τέλος η κατανομή Pareto δίνεται από τον τύπο $F(x) = 1 - \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha}$ ($x \geq c$, $\alpha > 0$) με συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f(x) = \frac{\alpha}{x}\left(\frac{c}{x}\right)^{-\alpha}$ και ρυθμό κινδύνου

$$h(t) = \frac{\alpha}{x}, \qquad x > c.$$

8.4 Ασκήσεις

Άσκηση 8.1. Έστω $N(t)$ μια διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και Y_i, $i = 1, 2, \cdots$, μια α.ι. ακολουθία ακέραιων τυχαίων μεταβλητών με κατανομή $P(Y_1 = k) = p_k$, $k = 1, 2, \cdots$. Θεωρούμε την σύνθετη διαδικασία Poisson

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i \ .$$

α) Υπολογίστε τον μέσο $EX(t)$ και την συνδιακύμανση $\mathrm{Cov}(X(s), X(t))$.

β) Ας υποθέσουμε ότι $P(Y = k) = 1/6$, $k = 1, 2, \ldots, 6$. Συμβολίζουμε με T τον πρώτο χρόνο που ένα Y ίσο με 6 εμφανίζεται. Υπολογίστε τις μέσες τιμές ET και $EX(T)$.

Άσκηση 8.2. Εστω σημειακή διαδικασία Poisson με ρυθμό λ και $N(a, b]$ ο αριθμός των σημείων της στο διάστημα $(a, b]$. Να υπολογίσετε την δεσμευμένη πιθανότητα $P(N(0, 2] = 2|N(0, 3] = 3)$ και την δεσμευμένη μέση τιμή $E[N(0, 2]|N(0, 3]]$.