Σημειώσεις Γραμμικού Προγραμματισμού

Μιχάλης Ζαζάνης
Τμήμα Στατιστικής
Οικονομικό Πανεπιστήμιο Αθηνών

5 Απριλίου 2017

Κεφάλαιο 1

Γραμμικός Προγραμματισμός

1.1 Δομή των προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Το γενικό πρόβλημα του γραμμικού προγραμματισμού είναι η βελτιστοποίηση (μεγιστοποίηση ή ελαχιστοποίηση) ενός γραμμικού κριτηρίου κάτω από γραμμικούς περιορισμούς. Για παράδειγμα, αν x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, είναι μεταβλητές με τιμές στους πραγματικούς αριθμούς, ζητείται να μεγιστοποιηθεί το κριτήριο

$$
\begin{array}{l}
\max \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array} \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
\tag{1.1}
$$

Η μορφή αυτή γραμμικού προγράμματος ονομάζεται πρόβλημα της παραγωγής και έχει την εξής σημασία. Έστω ότι έχουμε την δυνατότητα να παράγουμε n διαφορετικά προϊόντα, P_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, με την βοήθεια m πρώτων υλών, M_i, $i = 1, \ldots, m$, και έστω ότι το προϊόν P_j πωλείται με τελικό κέρδος c_j. Έστω επίσης ότι για την παραγωγή του προϊόντος P_j απαιτούνται a_{ij} μονάδες της πρώτης ύλης M_i και ότι συνολικά υπάρχουν διαθέσιμες b_i μονάδες της που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για όλα τα προϊόντα. Τότε το γραμμικό πρόγραμμα (1.1) περιγράφει το βέλτιστο μείγμα παραγωγής προκειμένου να μεγιστοποιηθεί το κέρδος. Παρατηρείστε τον περιορισμό μη αρνητικότητας για της μεταβλητές x_j οι οποίες περιγράφουν τον αριθμό των μονάδων κάθε προϊόντος που θα παραχθεί.

Μια διαφορετική μορφή γραμμικού προγράμματος είναι η ακόλουθη

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\min & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & \geq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & \cdots & + & a_{2n}x_n & \geq & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & \cdots & + & a_{in}x_n & \geq & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & \geq & b_m \\
\\
x_j \geq 0, & j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
\tag{1.2}
$$

Το παραπάνω πρόγραμμα ονομάζεται πρόγραμμα της δίαιτας και έχει την εξής σημασία. Αν έχουμε διαθέσιμα n διαφορετικά είδη τροφίμων (π.χ. ρύζι, μακαρόνια, κοτόπουλο, γάλα, πορτοκάλια κ.λπ.) με κόστος ανά μονάδα c_j, $j = 1, \ldots, n$ για το είδος τροφίμου j, και m διαφορετικά θρεπτικά συστατικά (π.χ. βιταμίνες A, B, C, θερμίδες, ιχνοστοιχεία κ.λπ.) για τα οποία υπάρχουν ελάχιστες ημερίσιες δόσεις τις οποίες πρέπει να παίρνει κανείς (b_i για το θρεπτικό συστατικό i), τότε το γραμμικό πρόγραμμα (1.2) περιγράφει την βέλτιστη ποσότητα από κάθε τρόφιμο έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το κόστος και ταυτόχρονα να πληρούνται οι διατροφικοί περιορισμοί. (Στην πράξη θα μπορούσε να θέση κανείς και ανισοτικούς περιορισμούς της αντίστροφης φοράς, π.χ. για τον αριθμό των θερμίδων.)

Οι παραπάνω μορφές γραμμικών προγραμμάτων αντικατοπτρίζουν διαφορετικές οπτικές γωνίες σε ότι αφορά τις εφαρμογές και όχι μαθηματικές διαφορές. Δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά μεταξύ της ελαχιστοποίησης και της μεγιστοποίησης ενός γραμμικού κριτηρίου αφού, για παράδειγμα, η μεγιστοποίηση του $x_1+3x_2-5x_3$ είναι ισοδύναμη με την ελαχιστοποίηση του $-x_1 - 3x_2 + 5x_3$ (που είναι το αρνητικό του αρχικού). Επίσης, δεν υπάρχει ουσιαστική διαφορά ανάμεσα στους περιορισμούς του (1.1) και σε εκείνους του (1.2) αφού π.χ. ο $x_1 + x + 2 + 6x_3 + x_4 \geq 12$ είναι ισοδύναμος με τον $-x_1 - x_2 - 6x_3 - x_4 \leq 12$. Κάτι που είναι λιγότερο προφανές είναι ότι οι ανισοτικοί περιορισμοί μπορούν επίσης να αντικατασταθούν από ισότητες. Για παράδειγμα το γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{array}{l}
\max \quad 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccc}
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & \leq & 25 \\
 & & 7x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & \leq & 45 \\
4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & \leq & 10
\end{array} \\
\\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0
\end{array}$$

μπορεί να γραφεί και με περιορισμούς ισότητας με την χρήση των λεγομένων μεταβλητών χαλαρότητας ως εξής

$$\begin{array}{l}
\max \quad 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccccccc}
2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & & & + & s_1 & & & & & = & 25 \\
 & & 7x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & & & + & s_2 & & & = & 45 \\
4x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & & & & & + & s_3 & = & 10
\end{array} \\
\\
x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ s_1 \geq 0,\ s_2 \geq 0,\ s_3 \geq 0.
\end{array}$$

Παρατηρείστε ότι οι ανισοτικοί περιορισμοί στο παραπάνω πρόβλημα παραγωγής έχουν μεταβληθεί σε ισοτικούς με την χρήση των μεταβλητών χαλαρότητας s_i οι οποίες είναι μη αρνητικές και περιγράφουν το ποσό της πρώτης ύλης i που μένει αχρησιμοποίητη.

Ένα οποιοδήποτε πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού λέγεται ότι έχει τεθεί σε *τυποποιημένη μορφή* αν έχει την μορφή

$$\begin{array}{l}
\min \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & \cdots & + & a_{in}x_n & = & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \\
\\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array} \tag{1.3}$$

Όπως είδαμε, οποιοδήποτε γραμμικό πρόγραμμα μπορεί να τεθεί σε τυποποιημένη μορφή Το γραμμικό προόβλημα (1.1) μπορεί να τεθεί σε τυποποιημένη μορφή με την βοήθεια των μεταβλητών χαλαρότητας και να πάρουμε το εξής πρόγραμμα

$$
\begin{array}{lllllllllll}
\max & c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n & & & & & & & & & \\
s.t. & & & & & & & & & & \\
a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & \cdots & +a_{1j}x_j & \cdots & +a_{1n}x_n & +x_{n+1} & & & & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & +a_{22}x_2 & \cdots & +a_{2j}x_j & \cdots & +a_{2n}x_n & & +x_{n+2} & & & \leq & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & +a_{i2}x_2 & \cdots & +a_{ij}x_j & \cdots & +a_{in}x_n & & & +x_{n+i} & & \leq & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & +a_{m2}x_2 & \cdots & +a_{mj}x_j & \cdots & +a_{mn}x_n & & & & +x_{n+m} & \leq & b_m \\
\end{array}
$$

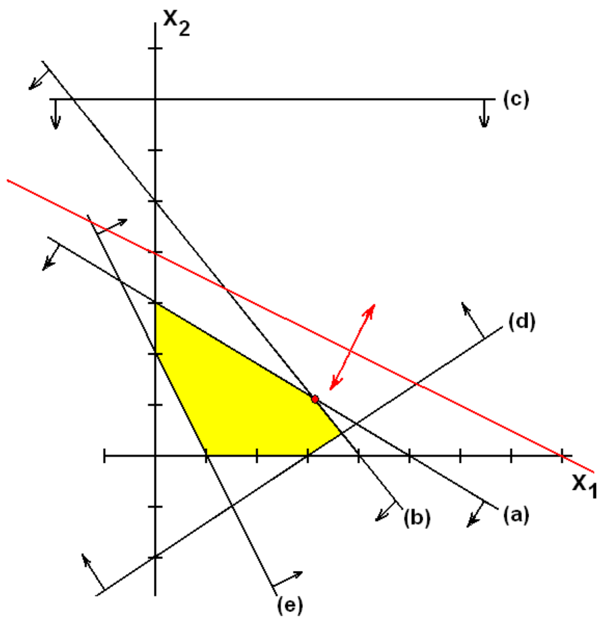
$$
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n+m. \tag{1.4}
$$

1.2 Γραφική επίλυση προβλημάτων γραμμικού προγραμματισμού

Έστω το πρόβλημα μεγιστοποίησης

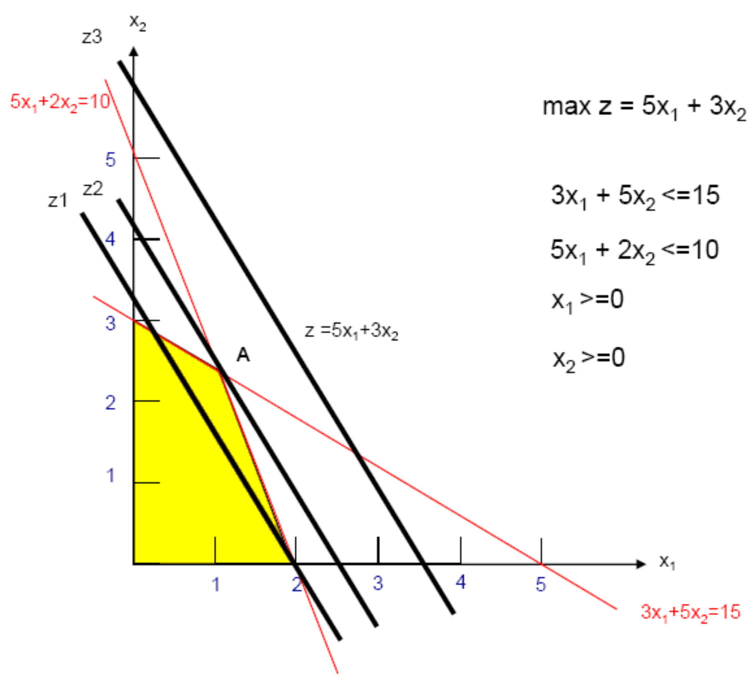
$$
\begin{array}{lllllll}
\max & x_1 + 2x_2 & & & & & \\
s.t. & & & & & & \\
3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 15 & & (a) \\
5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 20 & & (b) \\
 & & x_2 & \leq & 7 & & (c) \\
2x_1 & - & 3x_2 & \leq & 6 & & (d) \\
2x_1 & + & x_2 & \geq & 2 & & (e) \\
x_1 & & & \geq & 0 & & (f) \\
 & & x_2 & \geq & 0 & & (g)
\end{array} \tag{1.5}
$$

Όπως μπορεί να δει κανείς από την γραφική ανάλυση του σχήματος 1 η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου επιτυγχάνεται για $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, και είναι ίση με 6. Η εφικτή περιοχή στην οποία ικανοποιούνται όλοι οι περιορισμοί του προβλήματος φαίνεται σκιασμένη.

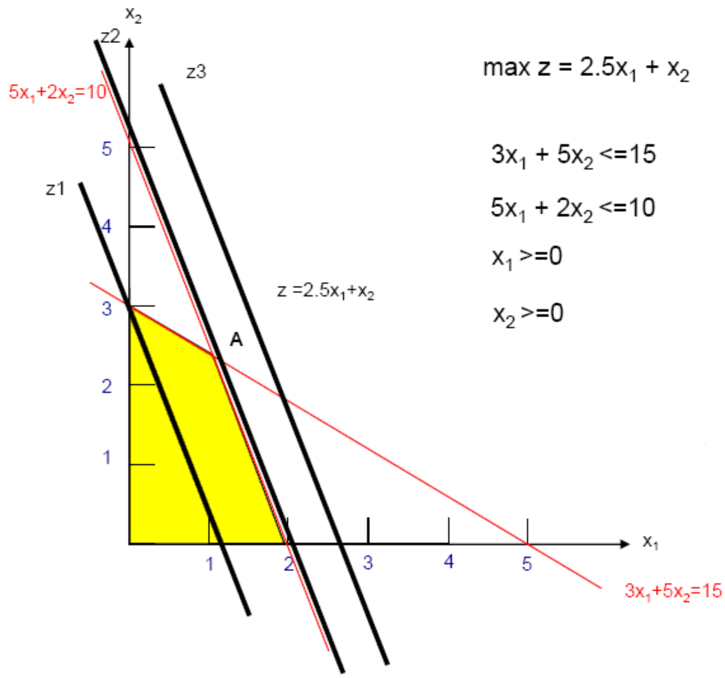


Σχήμα 1: Γραφική αναπαράσταση του προβλήματος μεγιστοποίησης (1.5)

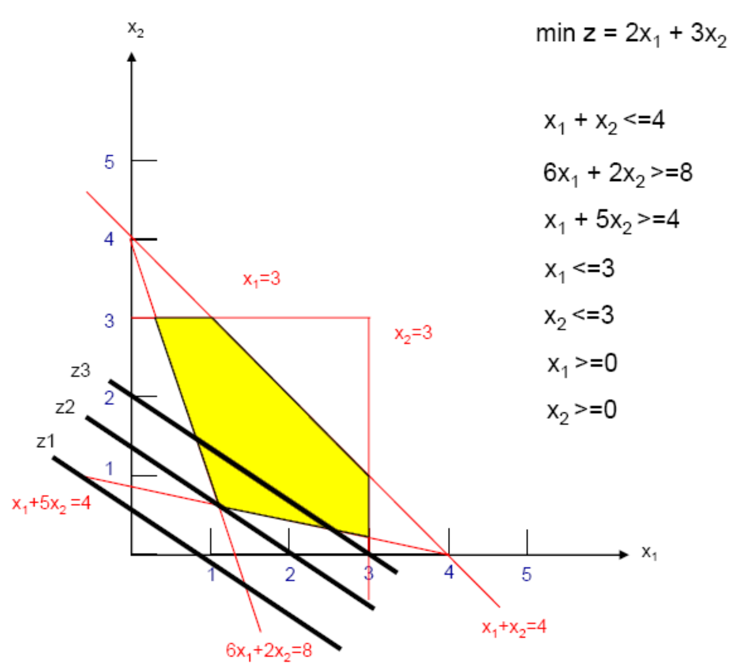
Στα ακόλουθα σχήματα παρουσιάζονται γραφικά όλες οι δυνατές περιπτώσεις



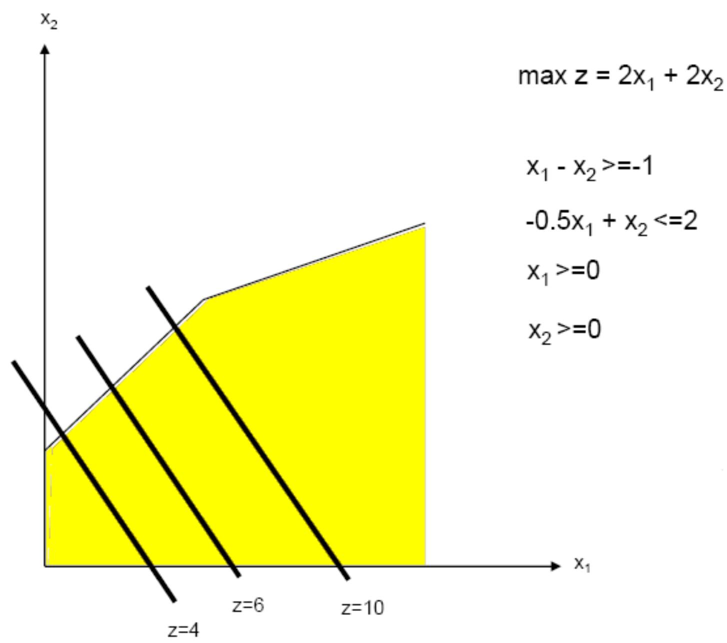
Σχήμα 2: Τυπική Περίπτωση Μεγιστοποίησης



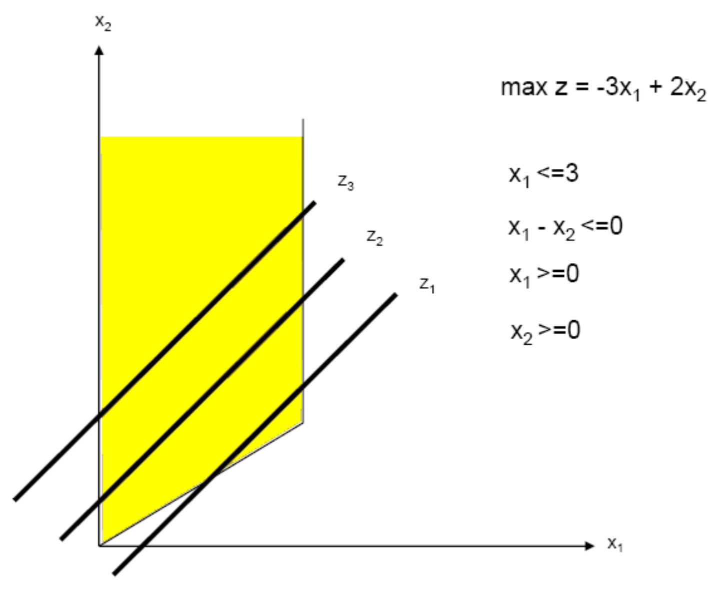
Σχήμα 3: Άπειρες Εναλλακτικές Βέλτιστες Λύσεις



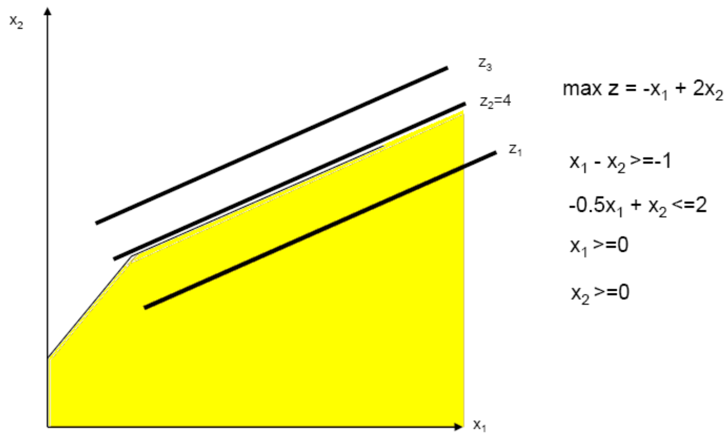
Σχήμα 4: Τυπική Περίπτωση Ελαχιστοποίησης



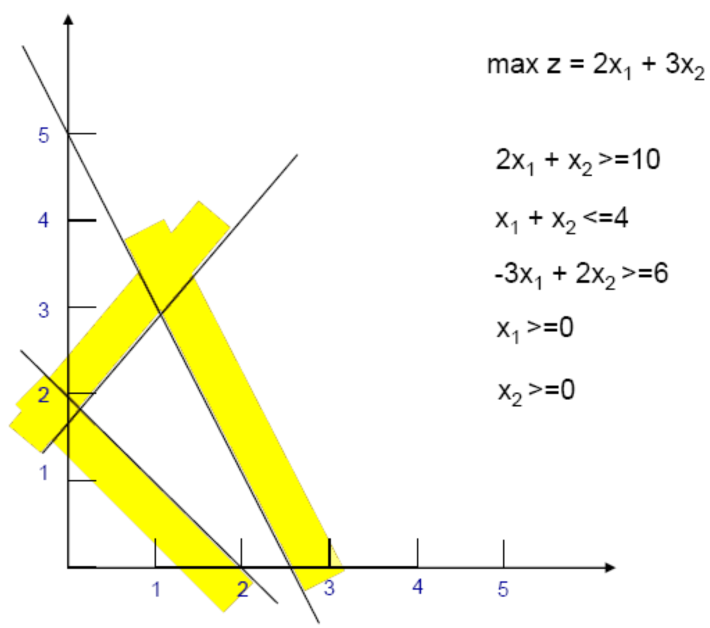
Σχήμα 5: Μη Πεπερασμένη Λύση



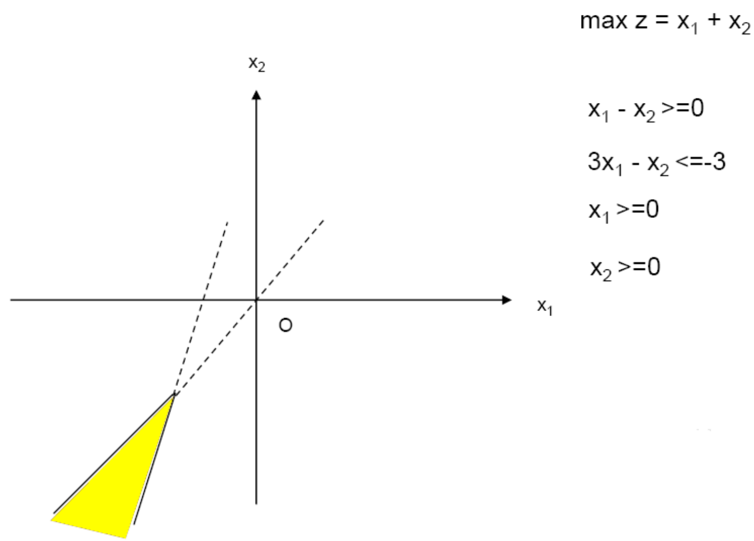
Σχήμα 6: Μη Πεπερασμένη Λύση με Πεπερασμένες Βέλτιστες Τιμές Ορισμένων Μεταβλητών



Σχήμα 7: Πεπερασμένη Βέλτιστη Τιμή Αντικειμενικής Συνάρτησης με Μη Πεπερασμένες Τιμές Μεταβλητών



Σχήμα 8: Καμία Λύση - Ασυμβίβαστοι Περιορισμοί



Σχήμα 9: Καμία Βέλτιστη Δυνατή Λύση

Κεφάλαιο 2

Η μέθοδος Simplex

2.1 Αλγοριθμική περιγραφή της μεθόδου Simplex

Θα ξεκινήσουμε την περιγραφή του αλγορίθμου αναλύοντας λεπτομερώς τρία παραδείγματα.

2.1.1 Κανονικό πρόβλημα μεγιστοποίησης

Έστω το κανονικό πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$\begin{array}{l} \max 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 3x_4 \\ s.t. \\ \begin{array}{rrrrcr} 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & \leq & 25 \\ & 7x_2 & +x_3 & +5x_4 & \leq & 45 \\ 4x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & \leq & 10 \end{array} \\ x_j \geq 0,\ j = 1, \ldots, 4. \end{array} \tag{2.1}$$

Εισάγουμε μια επιπλέον μεταβλητή, την z, (χωρίς περιορισμό προσήμου) και έναν επιπλέον περιορισμό, τον $z - 4x_1 - 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 0$ που περιγράφει το κριτήριο προς μεγιστοποίηση. Με την προσθήκη των μεταβλητών χαλαρότητας έχουμε το ακόλουθο ισοδύναμο πρόβλημα.

$$
\begin{array}{llllllll}
\max z \\
s.t. \\
\quad 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & & +x_5 & & & = 25 \\
 & 7x_2 & +x_3 & +5x_4 & & +x_6 & & = 45 \\
\quad 4x_1 & +x_2 & +x_3 & +2x_4 & & & +x_7 & = 10 \\
z \; -4x_1 & -5x_2 & -2x_3 & -3x_4 & & & & = 0 \\
x_j \geq 0, \; j = 1, \dots, 7.
\end{array}
\tag{2.2}
$$

Η μέθοδος Simplex αποσκοπεί στην εύρεση της βέλτιστης βασικής λύσης εκτελώντας με συστηματικό τρόπο απαλειφές στο γραμμικό σύστημα που ορίζεται από τους ισοτικούς περιορισμούς. Προς τούτο παραδοσιακά οι συντελεστές του συστήματος τίθενται σε μορφή πίνακα που ονομάζεται ταμπλώ. Στην περίπτωση του προγράμματος (2.2) το ταμπλώ είναι το ακόλουθο

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overset{*}{x_5}$	$\overset{*}{x_6}$	$\overset{*}{x_7}$	
x_5	2	3	1	0	1	0	0	25
x_6	0	$\boxed{7}$	1	5	0	1	0	45
x_7	4	1	1	2	0	0	1	10
Payoff	−4	−5	−2	−3	0	0	0	0

Ταμπλώ 1.1

Παρατηρείστε ότι η στήλη που περιέχει την μεταβλητή z δεν εμφανίζεται καθόλου (διότι δεν συμμετέχει στην διαδικασία απαλοιφής) η δε γραμμή που προέκυψε από το κριτήριο προς μεγιστοποίηση έχει ειδικό status. Επίσης τα δεξιά μέλη των περιορισμών χωρίζονται από τα στοιχεία του πίνακα και βρίσκονται στην τελευταία γραμμή. Στο ταμπλώ 1 οι μεταβλητές x_5, x_6, x_7, οι οποίες σημειώνονται με αστερίσκο, περιγράφουν την αρχική βάση. Η βασική λύση είναι $x_5 = 25$, $x_6 = 45$, $x_7 = 10$, (αυτές είναι οι «βασικές μεταβλητές») και όλες οι υπόλοιπες μεταβλητές 0, δηλαδή $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$ (οι «μη βασικές μεταβλητές»). Η αντίστοιχη τιμή του κριτηρίου είναι 0.

Το Ταμπλώ 1.1 είναι το λεγόμενο *αρχικό ταμπλώ*. Αυτό σημαίνει ότι α) μεταξύ των στηλών του πίνακα μπορούμε να διαλέξουμε κάποιες στήλες έτσι ώστε να φτιάξουμε ένα μοναδιαίο πίνακα (αυτές είναι οι στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές και εδώ είναι οι στήλες 5, 6 και 7), β) ότι η δεξιά στήλη είναι μη αρνητική (πράγματι είναι η 25, 45, 10) και γ) τα σχετικά κέρδη που είναι οι αριθμοί που βρίσκονται στην τελευταία γραμμή είναι μηδέν για τις στήλες που αντιστοιχούν στις βασικές μεταβλητές.

Στο παράδειγμα που είδαμε όλες οι παραπάνω προϋποθέσεις ισχύουν. Στο επόμενο τμήμα θα δούμε περιπτώσεις που οι προϋποθέσεις αυτές δεν ισχύουν καθώς και τους μετασχηματισμούς που απαιτούνται προκειμένου να κατασκευάσουμε το αρχικό ταμπλώ.

Όπως είδαμε ένα αρχικό ταμπλώ μας δίνει μια βασική εφικτή λύση. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε απαλοιφή έτσι ώστε να αντικαταστήσουμε στην βάση μία από τις βασικές μεταβλητές με μια μη βασική. Διαλέγουμε εκείνη που έχει τον πλέον αρνητικό συντελεστή σχετικού κέρδους. Εν προκειμένω είναι η x_2 με συντελεστή -5. Για να αποφασίσουμε ποια μεταβλητή βγαίνει από την βάση σχηματίζουμε τα πηλίκα των δεξιών μελών με τα στοιχεία του πίνακα της στήλης x_2. Για τον σχηματισμό των πηλίκων χρησιμοποιούμε *μόνο τα θετικά στοιχεία* της στήλης x_2. Τα πηλίκα είναι τα 25/3, 45/7 και 10/1. Το μικρότερο από τα τρία είναι το 45/7 κι΄ έτσι το αντίστοιχο στοιχείο του πίνακα, το 7, γίνεται ο οδηγός στην διαδικασία απαλοιφής. Κατά συνέπεια θα διαιρέσουμε όλα τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής με 7, και στη συνέχεια θα αφαιρέσουμε την δεύτερη γραμμή από την τρίτη, θα αφαιρέσουμε το τριπλάσιό της από την πρώτη γραμμή, και θα προσθέσουμε το πενταπλάσιό της στην τελευταία. Έτσι προκύπτει το επόμενο ταμπλώ:

	x_1	$\overset{*}{x_2}$	x_3	x_4	$\overset{*}{x_5}$	x_6	$\overset{*}{x_7}$	
x_5	2	0	$\frac{4}{7}$	$-\frac{15}{7}$	1	$-\frac{3}{7}$	0	$\frac{40}{7}$
x_2	0	1	$\frac{1}{7}$	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{45}{7}$
x_7	$\boxed{4}$	0	$\frac{6}{7}$	$\frac{9}{7}$	0	$-\frac{1}{7}$	1	$\frac{25}{7}$
Payoff	-4	0	$-\frac{9}{7}$	$\frac{4}{7}$	0	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{225}{7}$

Ταμπλώ 1.2

Όπως βλέπουμε, η καινούργια βασική λύση είναι $x_2 = 45/7$, $x_5 = 40/7$, $x_7 = 25/7$, $x_1 = x_3 = x_6 = 0$. Παρατηρείστε ότι η μεταβλητή x_2 είναι τώρα βασική ενώ η x_6 είναι μη βασική. (Όπως πριν οι αστερίσκοι υποδηλώνουν τις βασικές μεταβλητές.) Παρατηρείστε επίσης ότι τα σχετικά κόστη κάτω από τις βασικές μεταβλητές είναι πάντα 0. Εφόσον υπάρχουν αρνητικά σχετικά κόστη δεν έχουμε ακόμη βρει την βέλτιστη λύση. Διαλέγουμε συνεπώς την στήλη με το πλέον αρνητικό σχετικό κόστος, το -4 και σχηματίζουμε τα πηλίκα $(40/7)/2 = 20/7$ και $(25/7)/4 = 25/28$. Το μικρότερο από τα δύο είναι το 25/28 συνεπώς το 4 είναι ο νέος οδηγός: Η μεταβλητή x_7 θα βγει από την βάση και η μεταβλητή x_1 θα πάρει την θέση της. Το καινούργιο ταμπλώ γίνεται

	x_1 *	x_2 *	x_3	x_4	x_5 *	x_6	x_7	
x_5	0	0	$\frac{1}{7}$	$-\frac{39}{14}$	1	$-\frac{5}{14}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{55}{14}$
x_2	0	1	$\boxed{\frac{1}{7}}$	$\frac{5}{7}$	0	$\frac{1}{7}$	0	$\frac{45}{7}$
x_1	1	0	$\frac{3}{14}$	$\frac{9}{28}$	0	$-\frac{1}{28}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{25}{28}$
Payoff	0	0	$-\frac{3}{7}$	$\frac{13}{7}$	0	$\frac{4}{7}$	1	$\frac{250}{7}$

Ταμπλώ 1.3

Υπάρχει ακόμη ένα αρνητικό σχετικό κόστος, εκείνο που αντιστοιχεί στην μεταβλητή x_3 και επομένως η x_3 θα πρέπει να γίνει βασική μεταβλητή. Για να δούμε ποια μεταβλητή βγαίνει από την βάση σχηματίζουμε τους λόγους (55/14)/7 = 55/98, 45/7/7 = 45/49, (25/28)/(3/14) = 25/6. Αφού ο δεύτερος λόγος είναι ο μικρότερος, ο οδηγός είναι ο 1/7 (το δεύτερο στοιχείο της τρίτης στήλης). Έτσι η μεταβλητή x_3 γίνεται βασική ενώ η x_5 βγαίνει από την βάση. Το επόμενο ταμπλώ είναι το

	x_1	x_2 *	x_3 *	x_4	x_5 *	x_6	x_7	
x_5	$-\frac{2}{3}$	0	0	-3	1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{10}{3}$
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{6}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{35}{6}$
x_3	$\frac{14}{3}$	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{6}$	$\frac{25}{6}$
Payoff	2	0	0	$\frac{5}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{75}{2}$

Ταμπλώ 1.4

Το ταμπλώ 4 είναι το τελευταίο. Όλα τα σχετικά κόστη είναι θετικά συνεπώς η βασική λύση $x_2 = 35/6$, $x_3 = 25/6$, $x_5 = 10/3$, $x_1 = x_4 = x_6 = x_7 = 0$. Η βέλτιστη τιμή του κριτηρίου που αντιστοιχεί σ' αυτή τη λύση είναι $z = 75/2$. (Παρατηρείστε ότι η τιμή του κριτηρίου αυξανόταν σε κάθε βήμα του αλγορίθμου. Από 0 στο ταμπλώ 1.1 πηγαίνουμε στο $\frac{225}{7} = 32.14$ (ταμπλώ 1.2), $\frac{250}{7} = 35.71$ (ταμπλώ 1.3) και τέλος η βέλτιστη τιμή $\frac{75}{2} = 37.5$ (ταμλώ 1.4).

2.1.2 Κανονικό πρόβλημα μεγίστου με ενδιάμεση εκφυλισμένη λύση

Ένα δεύτερο πρόβλημα μεγιστοποίησης

$$
\begin{array}{lllll}
\max 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 4x_4 \\
s.t. \\
x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & \leq 100 \\
x_1 & & +3x_3 & +5x_4 & \leq 120 \\
x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & \leq 160 \\
x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 4.
\end{array} \tag{2.3}
$$

Εισάγουμε μια επιπλέον μεταβλητή, την z, (χωρίς περιορισμό προσήμου) και έναν επιπλέον περιορισμό, τον $z - 2x_1 - 4x_2 - 5x_3 - 4x_4 = 0$ που περιγράφει το κριτήριο προς μεγιστοποίηση. Με την προσθήκη των μεταβλητών χαλαρότητας έχουμε το ακόλουθο ισοδύναμο πρόβλημα.

$$
\begin{array}{llllllllll}
\max z \\
s.t. \\
 & x_1 & +2x_2 & +2x_3 & & +x_5 & & & = & 100 \\
 & x_1 & & +3x_3 & +5x_4 & & +x_6 & & = & 120 \\
 & x_1 & +3x_2 & +4x_3 & +3x_4 & & & +x_7 & = & 160 \\
z & -2x_1 & -4x_2 & -5x_3 & -4x_4 & & & & = & 0 \\
x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 7.
\end{array} \tag{2.4}
$$

Σε μορφή ταμπλώ το πρόβλημα παίρνει την ακόλουθη αρχική μορφή του ταμπλώ 2.1 με βασικές μεταβλητές τις μεταβλητές χαλαρότητας x_5, x_6, x_7.

	x_1	x_2	x_3	x_4	$\overset{*}{x_5}$	$\overset{*}{x_6}$	$\overset{*}{x_7}$	
x_5	1	2	2	0	1	0	0	100
x_6	1	0	3	5	0	1	0	120
x_7	1	3	$\boxed{4}$	3	0	0	1	160
Payoff	−2	−4	−5	−4	0	0	0	0

Ταμπλώ 2.1

Η εισερχόμενη μεταβλητή στην βάση είναι η x_3 μια και αυτή έχει το πλέον αρνητικό σχετικό κόστος. Η εξερχόμενη μεταβλητή προσδιορίζεται από τα πηλίκα $160/4 = 40$, $120/3 = 40$, και $100/2 = 5$. Άρα οδηγός θα μπορούσε να είναι είτε το 4 είτε το 3. Ας επιλέξουμε αυθαίρετα το 4. Συνεπώς η εξερχόμενη μεταβλητή είναι η x_7 και η απαλοιφή δίνει το επόμενο ταμπλώ.

			*		*	*		
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	20
x_6	$\boxed{\frac{1}{4}}$	$-\frac{9}{4}$	0	$\frac{11}{4}$	0	1	$-\frac{3}{4}$	0
x_3	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{1}{4}$	40
Payoff	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	0	0	$\frac{5}{4}$	200

Ταμπλώ 2.2

Η βασική λύση του ταμπλώ 2.2 είναι $x_5 = 20$, $x_6 = 0$, $x_3 = 40$, και $x_1 = x_2 = x_4 = 0$. Παρατηρείστε ότι εδώ μια βασική μεταβλητή, η x_6 έχει την τιμή 0. Οσάκις συμβαίνει αυτό η βασική λύση ονομάζεται εκφυλισμένη. Η καινούργια μεταβλητή που θα εισέλθει στη βάση είναι η x_1 (μια και το $-3/4$ είναι το πλέον αρνητικό σχετικό κόστος). Τα πηλίκα της πρώτης στήλης με την στήλη του δεξιού μέλους είναι $20/(1/2) = 40$, $0/(1/4) = 0$, και $40/(1/4) = 160$. Συνεπώς η μικρότερη τιμή είναι το 0 και ο αντίστοιχος οδηγός το 1/4. Η απαλοιφή δίνει το επόμενο ταμπλώ 2.3.

	*		*		*			
	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	$\boxed{5}$	0	-7	1	-2	1	20
x_1	1	-9	0	11	0	4	-3	0
x_3	0	3	1	-2	0	-1	1	40
Payoff	0	-7	0	8	0	3	-1	200

Ταμπλώ 2.3

Η καινούργια βασική λύση είναι$x_1 = 0$, $x_3 = 40$, $x_5 = 20$ και $x_2 = x_4 = x_6 = 0$. Η βασική λύση εξακολουθεί να είναι εκφυλισμένη (αφού η βασική μεταβλητή x_1 είναι μηδέν). Επιπλέον, παρατηρείστε ότι η τιμή του κριτηρίου δεν αυξήθηκε σε σχέση με το προηγούμενο ταμπλώ. Παρέμεινε ίση με 200. Συνεχίζοντας την διαδικασία, η καινούργια μεταβλητή που θα εισέλθει στη βάση είναι η x_2 μια και το -7 είναι το πλέον αρνητικό κόστος και σχηματίζοντας τα πηλίκα βλέπουμε ότι μεταξύ των $20/5 = 4$ και $40/3 = 13.33$ το πρώτο είναι το μικρότερο άρα το 5 είναι ο νέος οδηγός. (Παρατηρείστε ότι αφού το -9 είναι αρνητικό δεν σχηματίζουμε το αντίστοιχο πηλίκο.

Έτσι ξεφεύγουμε από τις εκφυλισμένες λύσεις.) Το επόμενο ταμπλώ είναι το

	* x_1	* x_2	* x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	0	$-\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$-\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$	4
x_1	1	0	0	$-\frac{8}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{2}{5}$	$-\frac{6}{5}$	36
x_3	0	0	1	$\boxed{\frac{11}{5}}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	28
Payoff	0	0	0	$-\frac{9}{5}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	228

Ταμπλώ 2.4

Η βασική λύση είναι τώρα $x_1 = 36$, $x_2 = 4$, $x_3 = 28$, $x_4 = x_5 = x_6$. Η λύση αυτή δεν είναι πλέον εκφυλισμένη και η τιμή του κριτηρίου έχει αρχίσει πάλι να αυξάνει. Περαιτέρω βελτίωση είναι δυνατή, μια και υπάρχει αρνητικός συντελεστής σχετικού κέρδους. Ο νέος οδηγός είναι ο 11/5. (Εδώ δεν χρειάζονται πηλίκα μια και είναι ο μόνος θετικός.) Η απαλοιφή δίνει το τελικό ταμπλώ 2.5 με βασική λύση $x_1 = \frac{620}{11}$, $x_2 = \frac{240}{11}$, $x_4 = \frac{140}{11}$ και $x_3 = x_5 = x_6 = 0$. Η τιμή του αντικειμενικού κριτηρίου είναι $\frac{2760}{11} = 250.9$.

	* x_1	* x_2	x_3	* x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	0	1	$\frac{7}{11}$	0	$-\frac{2}{11}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{240}{11}$
x_1	1	0	$\frac{8}{11}$	0	$\frac{15}{11}$	$\frac{6}{11}$	$-\frac{10}{11}$	$\frac{620}{11}$
x_4	0	0	$\frac{5}{11}$	1	$-\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{140}{11}$
Payoff	0	0	$\frac{9}{11}$	0	$\frac{10}{11}$	$\frac{4}{11}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{2760}{11}$

Ταμπλώ 2.5

2.2 Ένα πρόβλημα με μη μοναδική λύση

Έστω το γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{aligned}
&\max 3x_1 + 2x_2 \\
&s.t. \\
&3x_1 + 2x_2 \leq 120 \\
&x_1 + x_2 \leq 50 \\
&x_1,\ x_2 \geq 0.
\end{aligned}$$

Σε μορφή ταμπλώ με μεταβλητές χαλαρότητας x_3, x_4, για τους δύο ανισοτικούς περιορισμούς έχουμε

	x_1	x_2	$\overset{*}{x_3}$	$\overset{*}{x_4}$	
x_3	3	2	1	0	120
x_4	1	1	0	1	50
Payoff	−3	−2	0	0	0

Βάζοντας στη βάση τη μεταβλητή x_1 παίρνουμε

	$\overset{*}{x_1}$	x_2	x_3	$\overset{*}{x_4}$	
x_1	1	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	40
x_4	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	10
Payoff	0	0	1	0	120

Στο σημείο αυτό θα μπορούσαμε να σταματήσουμε, μια και δεν υπάρχει αρνητικός αριθμός στην τελευταία γραμμή. Όμως, παρατηρήστε ότι η μεταβλητή x_2 δεν είναι στη βάση και παρ΄ όλα αυτά έχει *μηδενικό ανηγμένο κόστος*, συνεπώς αν μπει στην βάση δεν πρόκειται να αλλάξει το συνολικό κέρδος. Πράγματι, αν την βάλουμε στην βάση η καινούργια λύση που παίρνουμε είναι η $x_1 = 20$, $x_2 = 30$, με την ίδια τιμή του κριτηρίου, 120.

	$\overset{*}{x_1}$	$\overset{*}{x_2}$	x_3	x_4	
x_1	1	0	1	−2	20
x_2	0	1	−1	3	30
Payoff	0	0	1	0	120

2.3 Πώς και γιατί δουλεύει η μέθοδος Simplex

Ξεκινάμε με ένα πρόβλημα παραγωγής με m ανισωτικούς περιορισμούς και $n - m$ μεταβλητές (όπου βεβαίως $n > m$). Μετά την χρήση των μεταβλητών χαλαρότητας παίρνουμε ένα σύστημα με m εξισώσεις και n αγνώστους το οποίο μπορουμε να γράψουμε ως εξής:

$$
\begin{array}{cccccccccccc|c}
\mathbf{a_1} & \mathbf{a_2} & & \mathbf{a_p} & & \mathbf{a_m} & \mathbf{a_{m+1}} & & \mathbf{a_q} & & \mathbf{a_n} & & \mathbf{b} \\
\hline
1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_{1,m+1} & \cdots & y_{1q} & \cdots & y_{1n} & & y_{10} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & y_{2,m+1} & \cdots & y_{2q} & \cdots & y_{2n} & & y_{20} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 & y_{p,m+1} & \cdots & y_{pq} & \cdots & y_{pn} & & y_{p0} \\
\vdots & & & & & & & & & & & & \vdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 & y_{m,m+1} & \cdots & y_{mq} & \cdots & y_{mn} & & y_{m0}
\end{array}
\tag{2.5}
$$

Ο ανωτέρω πίνακας αποτελεί συντομογραφία για το γραμμικό σύστημα εξισώσεων

$$
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & & & +y_{1,m+1}x_{m+1}+ & \cdots & +y_{1n}x_n & = & y_{10} \\
& x_2 & & +y_{2,m+1}x_{m+1}+ & \cdots & +y_{2n}x_n & = & y_{20} \\
& & & & & & \vdots & \\
& & x_m & +y_{m,m+1}x_{m+1}+ & \cdots & +y_{mn}x_n & = & y_{m0}
\end{array}
\tag{2.6}
$$

Το κόστος της συγκεκριμένης βασικής εφικτής λύσης είναι $z_0 = \sum_{j=1}^{m} c_j y_{j0}$. Έστω τώρα ότι εξετάζουμε το ενδεχόμενο να αυξήσουμε το επίπεδο μιας από τις μη βασικές μεταβλητές, έστω της x_j, $j = m+1, \ldots, n$, από το 0 στο $\epsilon > 0$. Η καινούργια λύση, που δεν είναι βασική, γίνεται $x_i = y_{i0} - \epsilon y_{ij}$ και είναι εφικτή υπό την προϋπόθεση ότι $y_{i0} - \epsilon y_{ij} \geq 0$ ή ισοδύναμα ότι

$$\epsilon \leq \frac{y_{i0}}{y_{ij}} \qquad \text{για όλα τα } i \text{ για τα οποία } y_{ij} > 0 \tag{2.7}$$

2.4 Ο αλγόριθμος Simplex με την μορφή πίνακα

Περιγράφουμε το γραμμικό πρόγραμμα σε τυποποιημένη μορφή ως

$$
\begin{aligned}
&\max \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\
&s.t. \\
&A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \\
&\mathbf{x} \geq 0
\end{aligned}
$$

Ας υποθέσουμε ότι οι πρώτες m μεταβλητές είναι βασικές. Τότε μπορούμε να γράψουμε τον πίνακα A ως $A = [B, N]$ όπου B είναι ένας πίνακας $m \times m$ και N ένας πίνακας $m \times (n-m)$. Συνεπώς αν χωρίσουμε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ σε δύο τμήματα $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix}$, διάστασης m και $n-m$ αντίστοιχα, έχουμε ότι $A\mathbf{x} = B\mathbf{x}_B + N\mathbf{x}_N = \mathbf{b}$ και άρα, αντιστρέφοντας τον πίνακα B, ο οποίος θεωρείται ομαλός,

$$\mathbf{x}_B = B^{-1}\mathbf{b} - B^{-1}N\mathbf{x}_N. \tag{2.8}$$

Όταν $\mathbf{x}_N = 0$ έχουμε μια βασική λύση η οποία είναι επίσης εφικτή υπό την προϋπόθεση ότι $B^{-1}\mathbf{b} \geq 0$. Η τιμή του κριτηρίου που ανστιστοιχεί στην λύση $\mathbf{x}$ είναι η $\mathbf{c}^T\mathbf{x}$. Χωρίζοντας το διάνυσμα $\mathbf{c}$ επίσης σε δύο τμήματα, $\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_B \\ \mathbf{c}_N \end{bmatrix}$, όταν έχουμε την βασική λύση $\begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ 0 \end{bmatrix}$ η τιμή του κριτηρίου είναι $z_0 = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B$. Στην γενική περίπτωση η τιμή του κριτηρίου είναι

$$[\mathbf{c}_B^T, \mathbf{c}_N^T] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_B \\ \mathbf{x}_N \end{bmatrix} = \mathbf{c}_B^T\mathbf{x}_B + \mathbf{c}_N^T\mathbf{x}_N$$

και αντικαθιστώντας την τιμή του $\mathbf{x}_B$ από το (2.8) έχουμε

$$\mathbf{c}_B^T B^{-1}\mathbf{b} + \left(\mathbf{c}_N^T - \mathbf{c}_B^T B^{-1} N\right)\mathbf{x}_N. \tag{2.9}$$

Αν θεωρήσουμε έναν διευρυνμένο πίνακα

$$\begin{array}{ccc} B & N & \mathbf{b} \\ \mathbf{c}_B & \mathbf{c}_N & 0 \end{array}$$

2.5 Ανάλυση Ευαισθησίας

Οι τιμές των δυϊκών μεταβλητών αποκαλύπτουν την οριακή αλλαγή στην βέλτιστη τιμή του αντικειμενικού κριτηρίου όταν το δεξί μέλος του περιορισμού, b_i μεταβληθεί κατά μια μονάδα. Όταν ο περιορισμός i είναι χαλαρός στην βέλτιστη λύση η αντίστοιχη δυϊκή μεταβλητή είναι 0 (από τις συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας) και συνεπώς η μεταβολή είναι 0.

2.6 Παραδείγματα

Παράδειγμα 1. Μία καφετέρια λειτουργεί σε 24-ωρη βάση και, ανάλογα με την ώρα της ημέρας, χρειάζεται το εξής προσωπικό.

Χρονική Περίοδος	Ελάχιστο Προσωπικό	Κόστος ανά 8ωρο ανά υπάλληλο
02 – 06	4	100
06 – 10	8	80
10 – 14	10	75
14 – 18	7	85
18 – 22	12	90
22 – 02	4	95

Κάθε υπάλληλος εργάζεται 8 συνεχείς ώρες. Αν το κόστος ανά υπάλληλο ανάλογα με το χρόνο που ξεκινάει τη βάρδια του δίνεται από τον παραπάνω πίνακα να βρεθεί το πρόγραμμα που ελαχιστοποιεί το συνολικό κόστος κάτω από τους περιορισμούς για το ελάχιστο προσωπικό που δίδονται στον πίνακα.

$$
\begin{array}{llllllll}
\min & 100x_1 + 80x_2 + 75x_3 + 85x_4 + 90x_5 + 95x_6 & & & & & & \\
& s.t. & & & & & & \\
& x_1 & & & & +x_6 & \geq & 4 \\
& x_1 & +x_2 & & & & \geq & 8 \\
& & x_2 & +x_3 & & & \geq & 10 \\
& & & x_3 & +x_4 & & \geq & 7 \\
& & & & x_4 \quad +x_5 & & \geq & 12 \\
& & & & x_5 & +x_6 & \geq & 4 \\
& x_j \geq 0 \quad j = 1, \ldots, 6. & & & & & &
\end{array}
$$

Παράδειγμα 2. Μία επιχείρηση πρόκειται να εισάγει ένα νέο προϊόν στην αγορά. Για τη διαφήμιση του προϊόντος επιλέγει να χρησιμοποιήσει ως διαφημιστικά μέσα τηλεόραση, ραδιόφωνο, εφημερίδα, περιοδικά και τέλος προβολή σε κάποια web sites. Το κόστος διαφήμισης ανά παρουσίαση στα πέντε αυτά διαφημιστικά μέσα και οι δείκτες ακροαματικότητας παρουσιάζονται στον ακόλουθο πίνακα.

	Τηλ.	Ραδ.	Εφημ.	Περιοδ.	Internet
Κόστος	1000	100	550	650	600
Δείκτες Ακροαματικότητας	120	25	60	82	40

Πίνακας 1. Κόστος διαφημίσεων και δείκτες ακροαματικότητας

Η διοίκηση της επιχείρησης δεν μπορεί να διαθέσει για τη διαφήμιση πάνω από 40.000 Ευρώ. Ακολουθείται η εξής πολιτική. Ο αριθμός των διαφημίσεων που γίνονται στα έντυπα μέσα δεν πρέπει να υπερβαίνει το 30% αυτών που γίνονται στην τηλεόραση και το ραδιόφωνο. Έχει παρατηρηθεί ότι για να αποδώσει μία διαφήμιση απαιτούνται τουλάχιστον 15 επαναλήψεις στο ραδιόφωνο και 10 επαναλήψεις στην τηλεόραση. Επίσης οι διαφημίσεις στο Internet επειδή βρίσκονται σε πειραματικό στάδιο δεν πρέπει να ξεπερνούν τις 15. Να προσδιοριστεί ο αριθμός των διαφημίσεων στα τέσσερα αυτά διαφημιστικά μέσα έτσι ώστε να μεγιστοποιείται η συνολική ακροαματικότητα.

Λύση. Οι μεταβλητές απόφασης του προβλήματος ορίζονται ως εξής

x_1: αριθμός διαφημίσεων στην τηλεόραση
x_2: αριθμός διαφημίσεων στο ραδιόφωνο
x_3: αριθμός διαφημίσεων στις εφημερίδες
x_4: αριθμός διαφημίσεων στα περιοδικά
x_5: αριθμός διαφημίσεων στο Ιντερνετ.

Από τα στοιχεία του πίνακα 1 προκύπτει ότι η αντικειμενική συνάρτηση που πρόκειται να μεγιστοποιηθεί είναι η $120x_1 + 25x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 40x_5$. Εκτός από τους περιορισμούς μη αρνητικότητας υπάρχει ο περιορισμός των χρημάτων, ο οποίος προκύπτει εύκολα από τον πίνακα 1 ότι είναι

$$1000x_1 + 100x_2 + 550x_3 + 650x_4 + 600x_5 \leq 40000.$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη του περιορισμού με 50 προκύπτει ο ισοδύναμος και πιο απλός περιορισμός

$$20x_1 + 2x_2 + 11x_3 + 13x_4 + 12x_5 \leq 800.$$

Ο αριθμός των διαφημίσεων στον τύπο δεν ξεπερνά το 30% των διαφημίσεων της τηλεόρασης και του ραδιοφώνου. Άρα, πρέπει να ισχύει η ανισότητα

$$x_3 + x_4 \leq 0.3(x_1 + x_2).$$

Ο περιορισμός αυτός γράφεται ισοδύναμα ως εξής

$$-0.3x_1 - 0.3x_2 + x_3 + x_4 \leq 0.$$

Τέλος, υπάρχουν και οι περιορισμοί των ελάχιστων αριθμών διαφημίσεων στο ραδιόφωνο την τηλεόραση και το internet οι οποίοι αναλυτικά γράφονται σαν

$$x_1 \geq 10, \qquad x_2 \geq 15, \qquad x_5 \leq 15.$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το πρόβλημα που πρέπει να επιλυθεί έχει την μορφή

$$\begin{array}{l}
\max 120x_1 + 25x_2 + 60x_3 + 82x_4 + 40x_5 \\
s.t. \\
\begin{array}{rcrcrcrcrcr}
20x_1 & + & 2x_2 & + & 11x_3 & + & 13x_4 & + & 12x_5 & \leq & 800 \\
-0.3x_1 & - & 0.3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & & & \leq & 0 \\
x_1 & & & & & & & & & \geq & 10 \\
 & & x_2 & & & & & & & \geq & 15 \\
 & & & & & & & & x_5 & \leq & 15
\end{array} \\
x_j \geq 0, \ j = 1, \ldots, 5.
\end{array}$$

Παράδειγμα 4. Μια τράπεζα επιχειρεί να καθορίσει που θα πρέπει να επενδυθούν τα κεφάλαια της κατά την διάρκεια του τρέχοντος έτους. Στο παρόν \$ 500.000 είναι διαθέσιμα για επένδυση σε γραμμάτια, δάνεια αγοράς κατοικίας δάνεια αγοράς αυτοκινήτου και προσωπικά δάνεια. Ο ετήσιος τόκος σε κάθε τύπο δανείου είναι: γραμμάτια

10%, δάνεια αγοράς κατοικίας 16%, δάνεια αγοράς αυτοκινήτου 13%, προσωπικά δάνεια 20%. Για να εγγυηθεί ο μάνατζερ επενδύσεων της τράπεζας ότι το χαρτοφυλάκιο της τράπεζας δεν είναι τόσο ριψοκίνδυνο, έχει θέσει τρεις περιορισμούς για το χαρτοφυλάκιο της τράπεζας:

α) Το ποσό που θα επενδυθεί σε προσωπικά δάνεια δεν μπορεί να ξεπεράσει το ποσό που θα επενδυθεί σε γραμμάτια.

β) Το ποσό που θα επενδυθεί σε δάνεια αγοράς κατοικίας δεν μπορεί να ξεπεράσει το ποσό που θα επενδυθεί σε δάνεια αγοράς αυτοκινήτου.

γ) Το μέγιστο ποσό που μπορεί να επενδυθεί σε προσωπικά δάνεια μπορεί να είναι το 25% του συνολικού ποσού των επενδύσεων.

Στόχος της τράπεζας είναι να μεγιστοποιήσει τον ετήσιο τόκο στο χαρτοφυλάκιο των επενδύσεων της. Διατυπώστε ένα γραμμικό πρόβλημα, που θα επιτρέψει στην τράπεζα να επιτύχει το στόχο της.

Παράδειγμα 5. Έστω ότι δίδονται τα ακόλουθα δεδομένα ανάμεσα σε δύο μεγέθη, x και y τα οποία υποθέτουμε ότι συνδέονται με την συναρτησιακή σχέση $y = ax^2 + bx + c$.

x	1	2	3	4	5
y	9.94	18.55	33.02	48.19	71.54

Ζητείται να προσδιορισθούν τα a, b, c έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η μέγιστη απόκλιση, $\max_{1\le i\le 5} \left|-y_i + ax_i^2 + bx_i + c\right|$

2.7 Το πρόβλημα της μεταφοράς

Θεωρούμε ότι έχουμε m εργοστάσια τα οποία παράγουν ποσότητες a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ ενός προϊόντος κάθε μήνα και n πόλεις οι οποίες έχουν ζήτηση b_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ για το προϊόν αυτό κάθε μήνα. Το κόστος μεταφοράς μιας μονάδας του προϊόντος από την πόλη i στο εργοστάσιο j είναι c_{ij}. Επίσης θα θεωρήσουμε αρχικά ότι το πρόβλημα είναι ισοσταθμισμένο, δηλαδή ότι $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Συνεπώς, με την υπόθεση αυτή, η συνολική παραγωγή ισούται με την συνολική ζήτηση.

Έστω ότι x_{ij} συμβολίζει την ποσότητα του προϊόντος που στέλνουμε από το εργοστάσιο i στην πόλη j. (Η ποσότητα αυτή είναι βεβαίως μη αρνητική.) Το πρόβλημα είναι επομένως η ελαχιστοποίηση του γραμμικού κριτηρίου

$$\min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{2.10}$$

υπό τους περιορισμούς

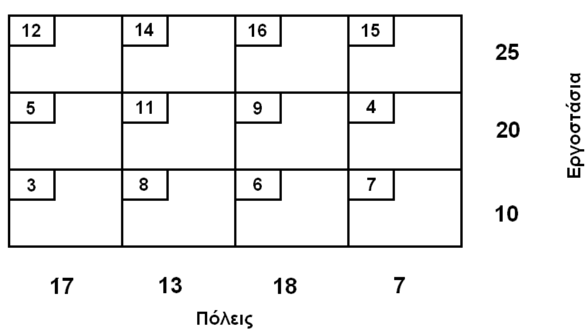
$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i \qquad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{2.11}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{2.12}$$

$$x_{ij} \geq 0. \tag{2.13}$$

όπου οι περιορισμοί (2.11) αναφέρονται στα εργοστάσια ενώ οι περιορισμοί (2.12) αναφέρονται στις πόλεις.

Ένα συγκεκριμένο παράδειγμα φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Έχουμε τρία εργοστάσια που παράγουν 25, 20 και 10 μονάδες αντίστοιχα, και τέσσερεις πόλεις που ζητούν 17, 13, 18 και 7 μονάδες. Η συνολική ζήτηση ισούται με την συνολική προσφορά και συνεπώς πρόκειται για ισοσταθμισμένο πρόβλημα μεταφοράς. Τα μικρά τετράγωνα δείχνουν τα αντίστοιχα κόστη μεταφοράς ανά μονάδα. Για παράδειγμα το κόστος μεταφοράς από το εργοστάσιο 2 στην πόλη 2 είναι σύμφωνα με τον πίνακα $c_{22} = 11$. Το πρόβλημα ελαχιστοποίησης γίνεται συνεπώς

$$\min 12x_{11} + 14x_{12} + 16x_{13} + 15x_{14} + 5x_{21} + 11x_{22} + 9x_{23} + 4x_{24} + 3x_{31} + 8x_{32} + 6x_{33} + 7x_{34}$$

$$\begin{array}{lllllllllllllll}
s.t. & & & & & & & & & & & & & & \\
x_{11} & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & & & & & & = & 25 \\
& & & & x_{21} & +x_{22} & +x_{23} & +x_{24} & & & & & = & 20 \\
& & & & & & & & x_{31} & +x_{32} & +x_{33} & +x_{34} & = & 10 \\
x_{11} & & & & +x_{21} & & & & +x_{31} & & & & = & 17 \\
& x_{12} & & & & +x_{22} & & & & +x_{32} & & & = & 13 \\
& & x_{13} & & & & +x_{23} & & & & +x_{33} & & = & 18 \\
& & & x_{14} & & & & +x_{24} & & & & +x_{34} & = & 7
\end{array}$$

$x_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j.$

Σε περίπτωση που το πρόβλημα μεταφοράς δεν είναι ισοσταθμισμένο μπορεί εύκολα να μετατραπεί σε ισοσταθμισμένο με την προσθήκη μιας πηγής («εργοστασίου») σε περίπτωση που η προσφορά είναι μικρότερη από την ζήτηση ή ενός επιπλέον προορισμού («πόλης») σε περίπτωση που η προσφορά είναι μεγαλύτερη από την ζήτηση. Οι εικονικές πηγές και οι εικονικοί προορισμοί παράγουν και ζητούν αντίστοιχα ακριβώς όσο από το προϊόν απαιτείται προκειμένου το πρόβλημα να γίνει ισοσταθμισμένο. Φυσικά, μεταφορά προιόντος από ένα εικονικό εργοστάσιο σε μια πόλη στην πραγματικότητα σημαίνει ότι η ζήτηση δεν ικανοποιείται και σ′ αυτή την περίπτωση το κόστος μεταφοράς είναι το κόστος μη ικανοποίησης της ζήτησης.

Κεφάλαιο 3

Το Λήμμα του Farkas και η Θεωρία της Δυικότητας

3.1 Κυρτότητα στον $\mathbb{R}^n$ και το Λήμμα του Farkas

3.2 Κλειστά Σύνολα

Ξεκινάμε με κάποιες έννοιες, γνωστές από την μαθηματική ανάλυση. Ένα σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ ονομάζεται *κλειστό* αν περιέχει κάθε οριακό σημείο του. Το σύνολο ονομάζεται *συμπαγές* αν κάθε ακολουθία στοιχείων του περιέχει υπακολουθία συγκλίνουσα σε σημείο του συνόλου. Στον Ευκλείδιο χώρο $\mathbb{R}^n$ ένα σύνολο είναι συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό και φραγμένο.

Θεώρημα 1. *Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}^m$ συνεχής συνάρτηση τότε το $f(A)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$.*

Απόδειξη Έστω $\{f(a_k)\}$ μια ακολουθία σημείων του $f(A)$ και $\{a_k\}$ μια από τις ακολουθίες σημείων του A από τις οποίες θα μπορούσε να προέρχεται. (Η συνάρτηση f δεν είναι υποχρεωτικά 1–1.) Αφού το A είναι συμπαγές υπάρχει υπακολουθία $\{a_{i_k}\}$ τέτοια ώστε $a_{i_k} \to a \in A$. Συνεπώς, αφού η f είναι συνεχής, $f(a_{i_k}) \to f(a)$ και $f(a) \in f(A)$. Αυτό σημαίνει ότι το $f(A)$ είναι συμπαγές. ∎

Πόρισμα 1. *Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $f : A \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση τότε υπάρχουν $a, b \in A$ τέτοια ώστε $f(a) = \inf\{f(x) : x \in A\}$ και $f(b) = \sup\{f(x) : x \in A\}$.*

Απόδειξη Το θεώρημα δείχνει ότι το σύνολο $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$ είναι συμπαγές και συνεπώς κλειστό και φραγμένο. Επομένως έχει πεπερασμένο infimum και supremum. Επιπλέον τόσο το infimum όσο και το supremum ανήκουν στο $f(A)$ μια και το $f(A)$ είναι κλειστό σύνολο. Συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $a, b \in A$ τέτοια ώστε $f(a) = \inf f(A)$ και $f(b) = \sup f(A)$. ∎

Ορισμός 1. *Η απόσταση του σημείου x από το σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως* $d_A(x) = \inf\{\|x - y\| : y \in A\}$.

Πρόταση 1. *Η συνάρτηση απόστασης ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz*

$$| d_A(y) - d_A(x) | \leq \|x - y\|. \tag{3.1}$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται φυσικά ότι η $d_A(\cdot)$ είναι συνεχής συνάρτηση.

Απόδειξη Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$. Για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει $a \in A$ τέτοιο ώστε $\|x-a\| < d_A(x)+\epsilon$. Επίσης

$$d_A(y) \leq \|y - a\| \leq \|y - x\| + \|x - a\| < \|y - x\| + d_A(x) + \epsilon.$$

Αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\epsilon > 0$ θα ισχύει επίσης ότι $d_A(y) \leq \|y - x\| + d_A(x)$ ή

$$d_A(y) - d_A(x) \leq \|y - x\|.$$

Εναλλάσσοντας τον ρόλο των x και y θα έχουμε επίσης ότι

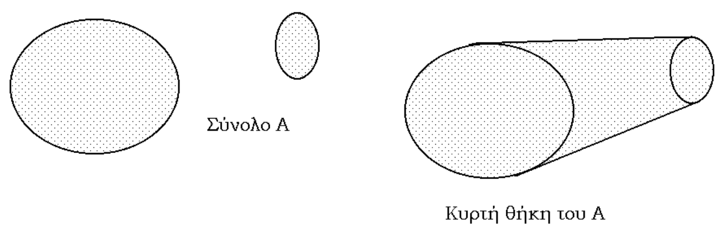
$$d_A(x) - d_A(y) \leq \|y - x\|.$$

Από τις δύο σχέσεις προκύπτει η (3.1). ∎

Πρόταση 2. *Έστω A ένα μη κενό, κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $d_A(x) = \|x - a_0\|$.*

Απόδειξη. Υπάρχει ακολουθία $\{a_k\}$ σημείων του A τέτοια ώστε $\|x - a_k\| \to d_A(x)$. Οι συγκλίνουσες ακολουθίες στο $\mathbb{R}$ είναι φραγμένες και συνεπώς υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $\|x - a_k\| \leq r$ για κάθε $k \in \mathbf{N}$. Συνεπώς, από την τριγωνική ιδιότητα ισχύει ότι $\|a_k\| \leq \|a_k - x\| + \|x\| \leq r + \|x\|$. Αυτό σημαίνει ότι η ακολουθία $\{a_k\}$ είναι φραγμένη και επομένως υπάρχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{a_{i_k}\}$ τέτοια ώστε $a_{i_k} \to a_0 \in \mathbb{R}^n$. Επειδή το A είναι κλειστό σύνολο, $a_0 \in A$. Έχουμε λοιπόν ότι $\|x - a_{i_k}\| \to \|x - a_0\|$ όταν $k \to \infty$. Επίσης, $\|x - a_{i_k}\| \to d_A(x)$ αφού $\{a_{i_k}\}$ είναι υπακολουθία της αρχικής ακολουθίας. Από την μοναδικότητα του ορίου προκύπτει επίσης ότι $d_A(x) = \|x - a_0\|$. □

Θεώρημα 2. *Έστω A, B, μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε το A κλειστό και το B συμπαγές. Τότε υπάρχει $a_0 \in A$, $b_0 \in B$ τέτοια ώστε* $\|a_0 - b_0\| = \inf\{\|a - b\| : a \in A, b \in B\}$.



Σχήμα 3.1: Η κυρτή θήκη

Απόδειξη. Η συνάρτηση $d_A(\cdot)$ είναι συνεχής. Αν περιορίσουμε το πεδίο ορισμού της στο συμπαγές σύνολο B τότε $d_A(b_0) = \inf\{d_A(b) : b \in B\}$ για κάποιο $b_0 \in B$. Αφού το A είναι κλειστό υπάρχει $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $d_A(b_0) = ||a_0 - b_0||$. Για κάθε $a \in A$, $b \in B$, $||a-b|| \geq d_A(b) \geq d_A(b_0) = ||a_0 - b_0||$. Συνεπώς, $||a_0 - b_0|| = \inf\{||a-b|| : a \in A, b \in B\}$ αφου $a_0 \in A$, $b_0 \in B$. □

3.3 Κυρτά Σύνολα

Ένα υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ ονομάζεται *κυρτό* αν, για κάθε $x, y \in C$ και κάθε $\lambda \in [0,1]$, $\alpha x + (1-\alpha)y \in C$.

Αν a_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ είναι διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, το διάνυσμα $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$ ονομάζεται *κυρτός συνδυασμός* των a_i αν $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^m \lambda_i = 1$.

Αν $\{A_i; i \in I\}$ είναι μια οικογένεια από κυρτά σύνολα, τότε $\bigcap_{i\in I} A_i$ είναι επίσης κυρτό σύνολο. Αυτό είναι εύκολο να το διαπιστώσει κανείς αφού για $x, y \in \bigcap_{i\in I} A_i$ θα έχουμε $x, y \in A_i$ για κάθε $i \in I$ και αφού τα A_i είναι κυρτά $\lambda x + (1-\lambda)y \in A_i$ για κάθε i άρα $\lambda x + (1-\lambda)y \in \bigcap_{i\in I} A_i$.

Η *κυρτή θήκη* του συνόλου $A \in \mathbb{R}^n$ την οποία συμβολίζουμε ως conv$A$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A δηλαδή η τομή όλων των κυρτών συνόλων που περιέχουν το A. (Η τομή αυτή είναι κυρτή με βάση την προηγούμενη παρατήρηση.)

Κάθε κυρτός συνδυασμός στοιχείων ενός κυρτού συνόλου A ανήκει στο σύνολο A. Αυτό μπορούμε να το διατυπώσουμε ως εξής:

Θεώρημα 3. *Έστω $a_1, \ldots, a_m$ σημεία ενός κυρτού συνόλου $A \in \mathbb{R}^n$. Έστω επίσης $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \geq 0$ με $\lambda_1 + \cdots + \lambda_m = 1$. Τότε $\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i \in A$.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς m. Το θεώρημα ισχύει τετριμένα για $m = 1$ και από τον ορισμό της κυρτότητας για $m = 2$. Υποθέτουμε ότι ισχύει για $m = k \geq 2$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $m = k + 1$, δηλαδή ότι $x = \sum_{j=1}^{k+1} \lambda_j a_j \in A$. Αν $\mu := \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 0$ τότε ασφαλώς $x = a_{k+1} \in A$. Έστω λοιπόν $\mu > 0$. Ορίζουμε $y = \frac{\lambda_1}{\mu} a_1 + \cdots + \frac{\lambda_k}{\mu} a_k$. Θα ισχύει ότι $y \in A$ από την επαγωγική υπόθεση. Αλλά $x = \mu y + (1 - \mu) a_{k+1} \in A$ από την κυρτότητα του A. □

Θεώρημα 4. *Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Τότε conv A είναι το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων του A.*

Απόδειξη. Έστω B το σύνολο όλων των κυρτών συνδυασμών των σημείων του A δηλαδή $B = \{\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i ; m \in \mathbf{N}, a_i \in A, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$. Είναι πολύ εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι το σύνολο B είναι κυρτό. Πράγματι, αν $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$, $y = \sum_{i=1}^{m'} \lambda'_i a'_i$ είναι δύο κυρτοί συνδυασμοί στοιχείων του A και $\mu \in [0, 1]$, $\mu' := 1 - \mu$, τότε $\mu x + \mu' y = \mu \lambda_1 a_1 + \cdots + \mu \lambda_m a_m + \mu' \lambda'_1 a'_1 + \cdots + \mu' \lambda'_{m'} a'_{m'}$ είναι επίσης κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A και επομένως ανήκει στο B. Επίσης ισχύει προφανώς ότι $A \subset B$. Συνεπώς αφού conv$A$ είναι το μικρότερο κυρτό σύνολο που περιέχει το A ισχύει ότι conv$A \subset B$. Αντίστροφα, κάθε στοιχείο του B είναι κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A και επομένως ανήκει σε κάθε κυρτό σύνολο που περιέχει το A, επομένως και στην τομή τους, δηλαδή το conv$A$. □

Από το παραπάνω έχουμε και τα εξής προφανή πορίσματα:

Πόρισμα 2. *Αν ένα σημείο x ανήκει στην κυρτή θήκη του A τότε υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ και σημεία $a_1, \ldots, a_m$ του A τέτοια ώστε $x = \sum_{i=1}^m \lambda_i a_i$, δηλαδή το x μπορεί να γραφεί ως κυρτός συνδυασμός στοιχείων του A.*

Πόρισμα 3. *Η κυρτή θήκη του συνόλου $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ είναι το σύνολο $\{\sum_{i=1}^m \lambda_i a_i, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^m \lambda_i = 1\}$.*

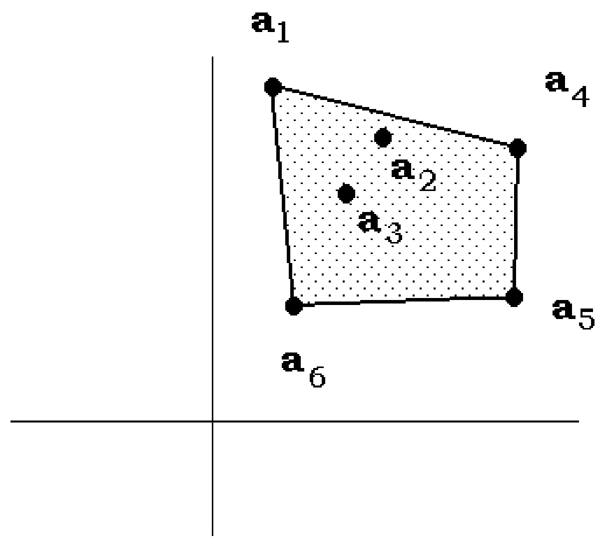
3.4 Το θεώρημα του διαχωρίζοντος υπερεπιπέδου

Λήμμα 1. *Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$. Αν για κάποιο $\alpha > 0$, $\|x + \lambda y\| \geq \|x\|$ για κάθε $0 < \lambda < \alpha$, τότε $x^T y \geq 0$.*

Απόδειξη. Ισχύει ότι

$$\|x\|^2 \leq \|x + \lambda y\|^2 = \|x\|^2 + 2\lambda x^T y + \lambda^2 \|y\|^2$$

και συνεπώς, αφού $\lambda > 0$, $x^T y + \frac{1}{2}\lambda \|y\|^2 \geq 0$. Αφήνοντας το $\lambda \to 0$ συμπεραίνουμε ότι $x^T y \geq 0$. □



Σχήμα 3.2: Η κυρτή θήκη του συνόλου $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$

Θεώρημα 5. *Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ μη κενό, κυρτό, κλειστό σύνολο και x σημείο του $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει ένα μοναδικό σημείο $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\|x-a_0\| = \inf\{\|x-z\| : z \in A\}$. Επιπλέον, $(x-a_0)^T(a-a_0) \leq 0$ για κάθε $a \in A$.*

Απόδειξη. Από προηγούμενα αποτελέσματα για κλειστά σύνολα ξέρουμε ότι υπάρχει $a_0 \in A$ τέτοιο ώστε $\|x-a_0\| = \inf\{\|x-z\| : z \in A\}$. Έστω $a \in A$ και $0 \leq \lambda \leq 1$. Η κυρτότης του A έχει ως συνέπεια ότι $(1-\lambda)a_0 + \lambda a \in A$. Ισχύει ότι

$$\|x - ((1-\lambda)a_0 + \lambda a)\| = \|(x-a_0) + \lambda(a_0 - a)\|^2 \geq \|x - a_0\|,$$

όπου, η τελευταία ανισότητα οφείλεται στον ορισμό του a_0 ως του εγγύτερου σημείου του A στο x. Από το προηγούμενο λήμμα συμπεραίνουμε ότι $(x-a_0)^T(a-a_0) \leq 0$. Για να αποδείξουμε την μοναδικότητα του a_0 έστω $a_1 \in A$ ένα άλλο σημείο τέτοιο ώστε $\|x-a_1\| = \inf\{\|x-z\| : z \in A\}$. Εφαρμόζοντας τον ίδιο συλλογισμό έχουμε $(x-a_1)^T(a-a_1) \leq 0$. Δεδομένου ότι το a είναι οποιοδήποτε σημείο του A, θέτοντας $a = a_0$ παίρνουμε

$$(x-a_1)^T(a_0-a_1) \leq 0. \tag{3.2}$$

Από την συμμετρία, εναλλάσσοντας τον ρόλο των a_0 και a_1 έχουμε

$$(x-a_0)^T(a_1-a_0) \leq 0. \tag{3.3}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις ανισότητες (3.2), (3.3), παίρνουμε $(a_1-a_0)^T(a_1-a_0) = \|a_1-a_0\|^2 \leq 0$ απ' όπου προκύπτει ότι $a_1 = a_0$. □

Ένα υπερεπίπεδο $\alpha^T z + \beta = 0$ στον $\mathbb{R}^n$ *διαχωρίζει* δύο υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ αν $\alpha^T z + \beta \geq 0$ για κάθε $z \in A$ και $\alpha^T z + \beta \leq 0$ για κάθε $z \in B$. Αν οι παραπάνω ανισότητες είναι αυστηρές τότε το υπερεπίπεδο *διαχωρίζει αυστηρά* τα δύο σύνολα.

Θεώρημα 6. *Έστω A, B, ξένα, μη κενά, κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ όπου A κλειστό και B συμπαγές. Τότε τα A και B διαχωρίζονται αυστηρά από ένα υπερεπίπεδο στο $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Έστω $a \in A$, $b \in B$ τέτοια ώστε το a να είναι το εγγύτερο σημείο του A στο B και το b το εγγύτερο σημείο του B στο A. Αυτό είναι συνέπεια των προηγουμένων θεωρημάτων. Αφού $A \cap B = \emptyset$, $a \neq b$. Αν $x \in A$, $y \in B$, τότε από το προηγούμενο θεώρημα $(b-a)^T(x-a) \leq 0$ και $(a-b)^T(y-b) \leq 0$. Συνεπώς

$$\begin{aligned}(a-b)^T x &\geq (a-b)^T a = \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 - \|b\|^2 + \|a-b\|^2\right) > \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 - \|b\|^2\right) \\ &> \frac{1}{2}\left(\|a\|^2 - \|b\|^2 - \|a-b\|^2\right) = (a-b)^T b \geq (a-b)^T y.\end{aligned}$$

Θέτουμε $\theta = a - b$ και $\gamma = -\frac{1}{2}(\|a\|^2 - \|b\|^2)$. Τότε η παραπάνω σχέσεις μας δίνουν

$$\theta^T x + \gamma > 0 > \theta^T y + \gamma.$$

Συνεπώς το διαχωρίζον υπερεπίπεδο είναι το $\theta^T z + \gamma = 0$. □

3.5 Το Λήμμα του Farkas

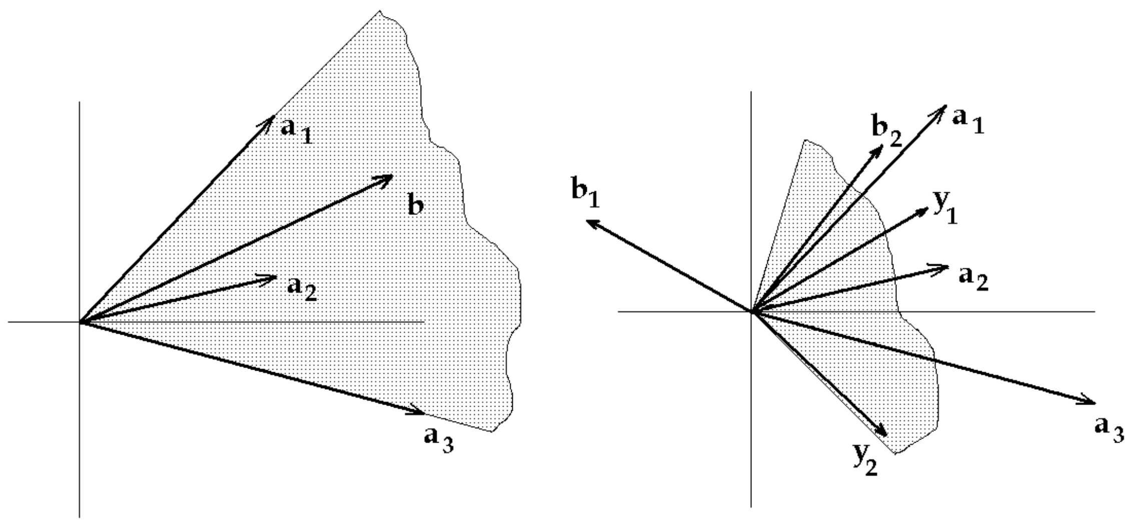
Θεώρημα 7 (Λήμμα του Farkas). *Αν A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και b ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$ τότε ακριβώς μία από τις ακόλουθες δύο εναλλακτικές προτάσεις ισχύει*

(*i*) *Υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $Ax = b$.*

(*ii*) *Υπάρχει $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0$ και $y^T b < 0$.*

Απόδειξη. Πρώτα απ' όλα διαπιστώνουμε ότι δεν μπορουν αν ισχύσουν τα (*i*) και (*ii*) ταυτόχρονα. Πράγματι, σ' αυτή την περίπτωση, για κάποιο $x \geq 0$ $Ax = b$ ενώ ταυτόχρονα υπάρχει y που να ικανοποιεί την (*ii*). Γι' αυτό το y έχουμε $y^T Ax = y^T b$. Το δεξί μέλος αυτής της τελευταίας σχέσης είναι από την (*ii*) αυστηρά αρνητικό ενώ το αριστερό είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο μη αρνητικών διανυσμάτων, του $A^T y$ και του x.

Για να αποδείξουμε το θεώρημα αρκεί να δείξουμε ότι αν δεν ισχύει η (*i*) τότε θα ισχύει υποχρεωτικά η (*ii*). Αν δεν ισχύει η (*i*) τότε το b βρίσκεται έξω από τον κυρτό



Σχήμα 3.3: Στο αριστερό σχήμα βλέπουμε την πρώτη περίπτωση του λήμματος του Farkas. Το διάνυσμα b ανήκει στον κώνο που σχηματίζουν τα a_1, a_2, a_3. Στο δεξιό σχήμα βλέπουμε την δεύτερη περίπτωση του λήμματος. Τα b_1, b_2 δεν ανήκουν στον κώνο των a_1, a_2, a_3 και επομένως υπάρχουν y_1, y_2 τέτοια ώστε $y^T a_i \geq 0$ και $y^T b < 0$.

κλειστό κώνο $C := \{Ax : x \geq 0\}$. Συνεπώς υπάρχει διαχωρίζον υπερεπίπεδο δηλαδή ένα υπερεπίπεδο $\gamma^T z + \beta = 0$ όπου $\gamma \in \mathbb{R}^m$ και $\beta \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε

$$\gamma^T z + \beta > 0 \qquad \forall z \in C, \tag{3.4}$$

$$\gamma^T b + \beta < 0. \tag{3.5}$$

Αν $z \in C$ και $r > 0$ τότε και $rz \in C$, συνεπώς από την (3.4) $r\gamma^T z + \beta > 0$ για κάθε $z \in C$ και $r > 0$ ή $\gamma^T z + \beta/r > 0$. Αφήνοντας $r \to \infty$ βλέπουμε ότι $\gamma^T z \geq 0$ για όλα τα $z \in C$. Αυτό ισχύει εν προκειμένω και για τις στήλες $a_1, \ldots, a_n$ του πίνακα A. Συνεπώς $\gamma^T a_i \geq$ και μπορούμε να διαλέξουμε το διάνυσμα y που πρέπει να βρούμε για να ικανοποιήσουμε την (ii) ίσο με το γ. Ακόμη, θέτωντας $z = 0$ στην (3.4) βλέπουμε ότι $\beta > 0$. Συνεπώς από την (3.5) έχουμε $y^T b = -\beta < 0$. □

Υπάρχουν πολλές εναλλακτικές διατυπώσεις του λήμματος του του Farkas. Αναφέρουμε ενδεικτικά τις ακόλουθες δύο:

Θεώρημα 8 (Farkas, 1η Εναλλακτική διατύπωση). *Αν A είναι ένας πίνακας $m \times n$ και b ένα διάνυσμα στον $\mathbb{R}^m$ τότε ακριβώς μία από τις ακόλουθες δύο εναλλακτικές προτάσεις ισχύει*

(i) *Υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $Ax \geq b$.*

(*ii*) *Υπάρχει* $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$ *τέτοιο ώστε* $y^T A \leq 0$ *και* $y^T b > 0$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι η διατύπωση αυτή είναι ισοδύναμη με την αρχική διατύπωση του λήμματος του Farkas. Για το σκοπό αυτό πρώτα θα δείξουμε ότι η αρχική διατύπωση συνεπάγεται την παρούσα. Αν ισχύει το *ι)* της παρούσας τότε ισχύει και ότι υπάρχει $x \geq 0$, $s \geq 0$ τέτοια ώστε $[A, I]\begin{bmatrix} x \\ s \end{bmatrix} = b$. Είναι σαφές τώρα που η συνθήκη είναι γραμμένη στη λογικη της αρχικής διατύπωσης ότι η εναλλακτική πρόταση είναι ότι υπάρχει y τέτοιο ώστε $y^T[A, I] \geq 0$ και $y^T b < 0$. Αλλά η πρώτη σχέση γράφεται και ως $y^T A \geq 0$ και $y^T \geq 0$. Άρα η δεύτερη διατύπωση είναι συνέπεια της πρώτης.

Θα δείξουμε τώρα και το αντίστροφο. Αν η δεύτερη διατύπωση είναι αληθής και γράψουμε την $Ax = b$ ως $Ax \leq b$ και $-Ax \leq -b$ ή ισοδύναμα $\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} x \leq \begin{bmatrix} b \\ -b \end{bmatrix}$ τότε η εναλλακτική πρόταση σύμφωνα με την δεύτερη διατύπωση είναι ότι υπάρχει διάνυσμα $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ τέτοιο ώστε $u \geq 0$, $v \geq 0$, και $\left[u^T, v^T\right]\begin{bmatrix} A \\ -A \end{bmatrix} \geq 0$, $[u^T, v^T]b > 0$. Οι σχέσεις αυτές ξαναγράφονται ως $(u - v)^T A \geq 0$, και $(u - v)^T b < 0$. Αν θέσουμε $y = u - v$ βλέπουμε ότι η πρόταση αυτή είναι η δεύτερη εναλλακτική πρόταση της πρώτης διατύπωσης μια και το y δεν είναι πλέον υποχρεωτικά θετικό. □

Μια ακόμη ισοδύναμη διατύπωση των δύο εναλλακτικών προτάσεων, την οποία αναφέρουμε χωρίς απόδειξη μια και είναι ίδια ουσιαστικά με την απόδειξη που ήδη δώσαμε είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 9 (2η Εναλλακτική διατύπωση). *Με τον ίδιο συμβολισμό μία από τις ακόλουθες δύο εναλλακτικές προτάσεις ισχύει*

(*i*) *Υπάρχει* $x \in \mathbb{R}^n$, $x \geq 0$ *τέτοιο ώστε* $Ax \leq b$.

(*ii*) *Υπάρχει* $y \in \mathbb{R}^m$, $y \geq 0$ *τέτοιο ώστε* $y^T A \geq 0$ *και* $y^T b < 0$.

Οι εφαρμογές του λήμματος του Farkas είναι πάρα πολλές. Θα δώσουμε μερικές άμεσα ενώ άλλες θα δούμε στην συνέχεια.

Θεώρημα 10 (Θεώρημα εναλλακτικών του Fredholm). *Αν* A *είναι ένας πίνακας* $m \times n$ *και* $b \in \mathbb{R}^m$ *τότε ακριβώς μία από τις δύο εναλλακτικές προτάσεις ισχύει*

(*i*) *Υπάρχει* $x \in \mathbb{R}^n$ *τέτοιο ώστε* $Ax = b$.

(*ii*) *Υπάρχει* $y \in \mathbb{R}^m$ *τέτοιο ώστε* $y^T A = 0$ *και* $y^T b \neq 0$.

Απόδειξη. Στην πρώτη εναλλακτική πρόταση το x μπορεί να παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές. Για να εφαρμόσουμε το Λήμμα του Farkas πρέπει να μετατρέψουμε το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα αναζήτησης θετικών λύσεων. Αυτό γίνεται εύκολα θέτοντας $x = u - v$ όπου $u, v \geq 0$. (Αυτό το τέχνασμα έχει ευρύτατη εφαρμογή όπως θα γίνει σαφές στη συνέχεια.) Η πρώτη εναλλακτική πρόταση γίνεται τότε $[A \mid -A][\substack{u \\ v}] = b$ με $u, v \geq 0$ και είναι στη μορφή του Λήμματος του Farkas. Η εναλλακτική πρόταση του Λήμματος του Farkas είναι ότι υπάρχει $y \in \mathbb{R}^m$ τέτοιο ώστε $y^T[A \mid -A] \geq 0$ και $y^T b < 0$. Αλλά αυτό σημαίνει $y^T A \geq 0$ και $y^T A \leq 0$ ή $y^T A = 0$. Η δεύτερη συνθήκη, μπορεί απλά να γραφεί $y^T b \neq 0$. (Παρατηρείστε ότι αν για κάποιο y, $y^T A = 0$, τότε και $(-y)^T A = 0$ και συνεπώς το πρόσημο δεν παίζει ρόλο.) □

Το ακόλουθο θεώρημα εξασφαλίζει την ύπαρξη στάσιμης κατανομής σε μια αλυσίδα Markov με πεπερασμένο αριθμό καταστάσεων. Υπενθυμίζουμε ότι ο πίνακας $n \times n$, P, ονομάζεται *στοχαστικός* αν $P_{ij} \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

Θεώρημα 11. *Αν P είναι στοχαστικός πίνακας υπάρχει διάνυσμα γραμμής $\pi = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ τέτοιο ώστε $\pi_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$ το οποίο να ικανοποιεί τις εξισώσεις ισορροπίας*

$$\pi_j = \sum_{i=1}^{n} \pi_i P_{ij}, \qquad j = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$ με $x \geq 0$ τέτοιο ώστε $P^T x = x$ και $u^T x = 1$ όπου $u^T = [1, 1, \ldots, 1]$. Ισοδύναμα αρκει να δείξουμε ότι η $Ax = b$ έχει λύση $x \geq 0$ με

$$A = \begin{bmatrix} P^T - I \\ u^T \end{bmatrix}, \qquad \text{και} \qquad b = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Πράγματι αν υπάρχει τέτοια λύση τότε έχουμε απλώς $x^T = \pi$. Αν δεν υπάρχει τέτοια λύση τότε θα πρέπει να ισχύει η δεύτερη εναλλακτική προταση του Farkas η οποία στην περίπτωσή μας λέει ότι θα πρέπει να υπάρχει $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ τέτοιο ώστε $y^T A \geq 0$ και $y^T b < 0$. Αρχίζοντας από την δεύτερη σχέση γράφουμε $y^T = [z_1, \ldots, z_n, -\lambda]$ και παρατηρούμε ότι $y^T b = -\lambda < 0$, συνεπώς $\lambda > 0$. (Αυτό δικαιολογεί και την περίεργη επιλογή μας για τον συμβολισμό των συνιστωσών του διανύσματος y.) Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στην $y^T A \geq 0$ η οποία σημαίνει ότι

$$y^T \begin{bmatrix} P^T - I \\ u^T \end{bmatrix} \geq 0.$$

Η παραπάνω σχέση γράφεται και ως

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij} z_j - z_i - \lambda > 0, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.7}$$

Έστω m εκείνος ο δείκτης για τον οποίο $z_m = \max_{j=1,\dots,n} z_j$. Εφόσον $z_m \geq z_j$ για κάθε j θα ισχύει και ότι

$$z_m \geq \sum_{j=1}^{n} P_{mj} z_j. \tag{3.8}$$

Εφαρμόζοντας την (3.7) για $i = m$ παίρνουμε την

$$\sum_{j=1}^{n} P_{mj} z_j > z_m + \lambda > z_m. \tag{3.9}$$

Η αντίφαση μεταξύ των (3.8) και (3.9) δείχνει ότι η δεύτερη εναλλακτική πρόταση του Farkas δεν μπορεί να ισχύει και συνεπώς αναγκαστικά ισχύει η πρώτη. □

Τέλος θα δώσουμε μια εναλλακτική διατύπωση του Λήμματος του Farkas.

Θεώρημα 12 (Λήμμα Farkas–Δεύτερη διατύπωση). *Έστω $A = (a_{ij})$ $m \times n$ πίνακας. Τότε είτε το i) είτε το ii) αλλά όχι και τα δύο ισχύουν*

i) Το σημείο $0 \in \mathbb{R}^m$ περιέχεται στην κυρτή θήκη των $m + n$ σημείων

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, a_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_m = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

(όπου e_i το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση i στον $\mathbb{R}^m$).

ii) Υπάρχουν αριθμοί $x_1, \dots, x_m$ τέτοιοι ώστε $x_i > 0$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ και $\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} > 0$ για $j = 1, 2, \dots, n$.

Απόδειξη Το 0 ανήκει στην κυρτή θήκη των διανυσμάτων της (i) αν υπάρχουν $s_j \geq 0$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{n} s_j a_j + \sum_{i=1}^{m} s_{m+i} e_i = 0$ και $\sum_{j=1}^{m+n} s_j = 1$. Αν $A = [a_1 \mid \cdots \mid a_n]$, η πρώτη πρόταση γράφεται επίσης ως

$$\begin{bmatrix} A \;,\; I_m \\ e^T \end{bmatrix} s = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} =: b, \qquad s \geq 0. \tag{3.10}$$

I_m είναι ο $m \times m$ μοναδιαίος πίνακας και $e^T = (1, 1, \dots, 1)$ είναι διάνυσμα με $m + n$ στοιχεία ίσα με την μονάδα. Ακόμη, $s := (s_1, s_2, \dots, s_{m+n})^T$ ενώ το δεξί μέλος της παραπάνω εξίσωσης είναι ένα διάνυσμα με $m + 1$ στοιχεία, τα πρώτα m από τα οποία είναι 0. Παρατηρείστε ότι η συνθήκη $\sum_{j=1}^{n+m} s_j = 1$ εξασφαλίζεται απο την τελευταία γραμμή του πίνακα της (3.10). Αν δεν ισχύει η πρώτη πρόταση τότε από το λήμμα του Farkas υπάρχει $y \in \mathbb{R}^{m+1}$ τέτοιο ώστε

$$y^T \begin{bmatrix} A \ , \ I_m \\ e^T \end{bmatrix} \geq 0 \tag{3.11}$$

και $y^T b < 0$. Θέτουμε $y^T := (y_1, \ldots, y_m, -\lambda)$. Δεδομένης της μορφής του b η σχέση $y^T b < 0$ συνεπάγεται ότι $\lambda > 0$. Συνεπώς, η (3.11) συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - \lambda \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.12}$$

$$y_i - \lambda \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.13}$$

Αλλά αυτή η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι $\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} \geq \lambda > 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, και $y_i \geq \lambda > 0$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$. Μπορούμε συνεπώς να θέσουμε

$$x_i = \frac{y_i}{\sum_{k=1}^{m} y_k}, \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Συνεπώς, αν δεν ισχύει η πρόταση (i) τότε υποχρεωτικά ισχύει η πρόταση (ii). ∎

3.6 Το Θεώρημα Arbitrage

Έχουμε διαθέσιμες n δυνατές επενδύσεις και υπάρχει το ενδεχόμενο m διαφορετικών σεναρίων (states of nature). Αν επιλέξουμε να επενδύσουμε 1 ευρώ στην επένδυση j και συμβεί το σενάριο i τότε η απόδοση είναι r_{ij}. Ένα επενδυτικό χαρτοφυλάκιο είναι ένα διάνυσμα $x \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)^T$. Το άθροισμα $\sum_{j=1}^{n} r_{ij} x_j$ περιγράφει την απόδοση του χαρτοφυλακίου x όταν το σενάριο που συμβαίνει είναι το i. Έστω επίσης $p = (p_1, \ldots, p_n)^T$ ένα διάνυσμα τιμών των διαφόρων επενδύσεων. Οι τιμές αυτές δεν είναι όλες υποχρεωτικά θετικές. Τότε το κόστος ενός χαρτοφυλακίου είναι $p^T x$ ενώ η απόδοσή του είναι το διάνυσμα Rx στον $\mathbb{R}^m$.

Θεώρημα 13. *Ακριβώς ένα από τα ακόλουθα δύο συμβαίνουν:*

ι) *Υπάρχει χαρτοφυλάκιο x για το οποίο $p^T x < 0$ και $Rx \geq 0$. Αυτή είναι η περίπτωση του arbitrage.*

ιι) *Υπάρχει διάνυσμα πιθανοτήτων $q \in \mathbb{R}^m$, $q \geq 0$, $\sum_{i=1}^{m} q_i = 1$, τέτοιο ώστε $q^T R = cp^T$, όπου $c > 0$ δηλαδή οι τιμές των αποδόσεων είναι ανάλογες προς τις μέσες τιμές ως προς μια κατανομή πιθανοτήτων πάνω στα διάφορα σενάρια.*

Απόδειξη. Έφαρμόζουμε το Λήμμα του Farkas στον πίνακα R^T. Η μία εναλλακτική δυνατότητα είναι να υπάρχει λύση στο σύστημα $R^T v = p$ με $v \geq 0$. Ισχύει αναγκαστικά ότι $\sum_{i=1}^m v_i > 0$ εκτός από την τετριμμένη περίπτωση που $p = 0$. Συνεπώς, θέτωντας $c^{-1} = \sum_{i=1}^m v_i$, και $q = c^{-1}v$ έχουμε $q^T R = cp^T$. Αυτή είναι η περίπτωση (ii) του θεωρήματος.

Αν δεν ισχύει η πρώτη εναλλακτική δυνατότητα τότε υποχρεωτικά θα υπάρχει x τέτοιο ώστε $x^T R^T \geq 0$ και $x^T p < 0$, δηλαδή υπάρχει χαρτοφυλάκιο του οποίου το κόστος είναι αρνητικό (αφού $x^T p < 0$) αλλά η απόδοσεις είναι μη αρνητικές σε κάθε σενάριο (αφού $Rx \geq 0$). □

3.7 Το δυϊκό πρόβλημα

3.7.1 Το δυϊκό πρόβλημα ενός προβλήματος παραγωγής και η οικονομική σημασία του

Ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα παραγωγής. Ένας κατασκευαστής μπορεί να παράγει n διαφορετικά προϊόντα, $P_1, \ldots, P_n$ χρησιμοποιώντας m πρώτες ύλες, $Y_1, \ldots Y_m$. Για την παραγωγή μιας μονάδας του προϊόντος P_j απαιτούνται a_{ij} μονάδες της πρώτης ύλης Y_i και η συνολική διαθέσιμη ποσότητα της Y_i έστω ότι είναι b_i. Έστω επίσης ότι η πώληση μιας μονάδας του P_j αποφέρει κέρδος c_j στον κατασκευαστή. Συνεπώς ο κατασκευαστής, προκειμένου να μεγιστοποιήσει το κέρδος του θα κατασκευάσει x_j μονάδες του προϊόντος P_j έτσι ώστε

$$
\begin{array}{l}
\max\ c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2j}x_j & \cdots & + & a_{2n}x_n & \leq & b_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{i1}x_1 & + & a_{i2}x_2 & + & \cdots & + & a_{ij}x_j & \cdots & + & a_{in}x_n & \leq & b_i \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & \leq & b_m
\end{array} \\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n.
\end{array}
\tag{3.14}
$$

Έστω τώρα ότι ένας επιχειρηματίας εμφανίζεται και προτίθεται να αγοράσει τις πρώτες ύλες του κατασκευαστή. Αν προτείνει τις τιμές y_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ αυτές θα πρέπει να είναι αρκετά υψηλές ώστε να συμφέρει τον κατασκευαστή να του πωλήσει τις πρώτες ύλες αντί να κατασκευάσει οποιοδήποτε από τα n προϊόντα. Θα πρέπει συνεπώς να ισχύει ότι $y_1a_{1j} + y_2a_{2j} + \cdots + y_ma_{mj} \geq c_j$ δηλαδή το κέρδος του κατασκευαστή από την πώληση των πρώτων υλών που απαιτούνται για την κατασκευή μιας μονάδας του προϊόντος P_j να είναι μεγαλύτερο ή ίσο με το κέρδος που αποφέρει η κατασκευή και πώληση μιας μονάδας του P_j. Αυτό βεβαίως θα πρέπει να ισχύει για όλα τα j. Δεδομένων αυτών των περιορισμών ο επιχειρηματίας που προτίθεται να αγοράσει τις πρώτες ύλες θα προσπαθήσει να ελαχιστοποιήσει το ποσό που θα δώσει για την αγορά τους που είναι $y_1 b_1 + \cdots + y_m b_m$. Συνεπώς ο επιχειρηματίας θέλει να έχει

$$
\begin{array}{l}
\min \; b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_m y_m \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccc}
y_1 a_{11} & + & y_2 a_{21} & + & \cdots & + & y_i a_{i1} & \cdots & + & y_m a_{m1} & \geq & c_1 \\
y_1 a_{12} & + & y_2 a_{22} & + & \cdots & + & y_i a_{i2} & \cdots & + & y_m a_{m2} & \geq & c_2 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
y_1 a_{1j} & + & y_2 a_{2j} & + & \cdots & + & y_i a_{ij} & \cdots & + & y_m a_{mj} & \geq & c_j \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
y_1 a_{1n} & + & y_2 a_{2n} & + & \cdots & + & y_i a_{in} & \cdots & + & y_m a_{mn} & \geq & c_n
\end{array} \\
\\
y_i \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m.
\end{array}
\tag{3.15}
$$

Το γραμμικό πρόβλημα (3.14) θα ονομάζεται αρχικό ενώ το (3.15) θα ονομάζεται δυϊκό. Παρατηρείστε ότι στο δυϊκό πρόβλημα έχουμε μια μεταβλητή για κάθε περιορισμό του αρχικού και έναν περιορισμό για κάθε μεταβλητή του αρχικού.

Έστω μια εφικτή λύση του αρχικού προβλήματος $x_j \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n$. Αφού είναι εφικτή θα ικανοποιεί τους περιορισμούς

$$b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.16}$$

Έστω επίσης μια εφικτή λύση του δυϊκού, $y_i \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m$ η οποία ικανοποιεί τους

$$\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - c_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.17}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες (3.16) με $y_i \geq 0$ και προσθέτωντας για όλα τα i έχουμε

$$\sum_{i=1}^{m} y_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right) \geq 0 \tag{3.18}$$

ή

$$\sum_{i=1}^{m} y_i b_i \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} y_i a_{ij} x_j. \tag{3.19}$$

Παρόμοια, πολλαπλασιάζοντας τις ανισότητες (3.17) με $x_j \geq 0$ και προσθέτωντας για όλα τα j έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \left(\sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} - c_j \right) \geq 0 \tag{3.20}$$

ή

$$\sum_{j=1}^{n} x_j c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j. \tag{3.21}$$

Από τις (3.19) και (3.21) συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} x_j c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i a_{ij} x_j \leq \sum_{i=1}^{m} y_i b_i. \tag{3.22}$$

Συνεπώς η τιμή του κριτηρίου κάθε εφικτής λύσης του αρχικού προβλήματος είναι μικρότερη ή ίση από την τιμή του κριτηρίου κάθε εφικτής λύσης του δυϊκού προβλήματος. Μπορεί να αποδειχθεί ότι αν x_j^* είναι η *βέλτιστη λύση* του αρχικού και y_i^* η *βέλτιστη λύση* του δυϊκού τότε η (3.22) ισχύει ως ισότητα, δηλαδή

$$\sum_{j=1}^{n} x_j^* c_j \leq \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} x_j^* \leq \sum_{i=1}^{m} y_i^* b_i. \tag{3.23}$$

Άμεση συνέπεια των ανωτέρω είναι ότι για την βέλτιστη λύση του αρχικού προβλήματος και για την βέλτιστη λύση του δυϊκού ισχύουν οι συνθήκες συμπληρωματικής χαλαρότητας.

$$\text{Για κάθε } i = 1, \ldots, m \quad y_i^* > 0 \iff \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^* = b_i, \tag{3.24}$$

$$\text{Για κάθε } j = 1, \ldots, n \quad x_j^* > 0 \iff \sum_{i=1}^{m} y_i^* a_{ij} = c_j. \tag{3.25}$$

3.8 Βρίσκοντας το δυϊκό πρόβλημα από το αρχικό

Στην γενική περίπτωση, προκειμένου να μετασχηματίσουμε το αρχικό πρόβλημα στο αντίστοιχο δυϊκό εφαρμόζουμε τους ακόλουθους κανόνες. Θεωρούμε ότι το αρχικό πρόβλημα έχει την ακόλουθη μορφή

$$
\begin{array}{l}
\begin{Bmatrix} \max \\ \min \end{Bmatrix} \quad c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccccc}
a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1j}x_j & \cdots & + & a_{1n}x_n & \leq & b_1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{k1}x_1 & + & a_{k2}x_2 & + & \cdots & + & a_{kj}x_j & \cdots & + & a_{kn}x_n & \leq & b_k \\
a_{k+1,1}x_1 & + & a_{k+1,2}x_2 & + & \cdots & + & a_{k+1,j}x_j & \cdots & + & a_{k+1,n}x_n & = & b_{k+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mj}x_j & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m
\end{array} \\
\\
x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, l, \quad x_j \text{ ελεύθερο } \; j = l + 1, \ldots, n.
\end{array}
\tag{3.26}
$$

Παρατηρείστε ότι το ανωτέρω πρόβλημα έχει k ανισοτικούς και $m-k$ ισοτικούς περιορισμούς. Οποιοδήποτε πρόβλημα, πολλαπλασιάζοντας εν ανάγκη με -1 τους ανισοτικούς περιορισμούς του που έχουν την αντίθετη φορά μπορεί να τεθεί στην μορφή αυτή. Παρατηρείστε επίσης ότι το αρχικό έχει $l \leq n$ μεταβλητές με περιορισμό μη αρνητικότητας και $n - l$ ελεύθερες μεταβλητές.

1. Η μεγιστοποίηση γίνεται ελαχιστοποίηση και αντίστροφα.

2. Σε κάθε περιορισμό του αρχικού αντιστοιχεί μια μεταβλητή του δυϊκού και σε κάθε μεταβλητή του αρχικού αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού. (Στους περιορισμούς αυτούς *δεν περιλαμβάνονται* οι περιορισμοί μη αρνητικότητας.)

3. Οι συντελεστές του κριτηρίου προς βελιστοποίηση του δυϊκού είναι το δεξί μέλος των περιορισμών του αρχικού. Το δεξί μέλος των περιορισμών του δυϊκού είναι οι συντελεστές του κριτηρίου του αρχικού.

4. Σε κάθε στήλη του αρχικού αντιστοιχεί ένας περιορισμός του δυϊκού. Ο περιορισμός αυτός είναι ανισοτικός ($\geq$) αν η αντίστοιχη μεταβλητή του δυϊκού είναι μη αρνητική και είναι ισοτικός αν η αντίστοιχη μεταβλητή του αρχικού είναι ελεύθερη.

Με βάση τους παραπάνω κανόνες το δυϊκό του (3.26) γίνεται

$$
\begin{array}{l}
\left\{ \begin{array}{c} \min \\ \max \end{array} \right\} \quad b_1y_1 + b_2y_2 + \cdots + b_my_m \\
s.t. \\
\begin{array}{ccccccccccccc}
y_1a_{11} & + & y_2a_{21} & + & \cdots & + & y_ia_{i1} & \cdots & + & y_ma_{m1} & \geq & c_1 \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
y_1a_{1l} & + & y_2a_{2l} & + & \cdots & + & y_ia_{il} & \cdots & + & y_ma_{ml} & \geq & c_l \\
y_1a_{1,l+1} & + & y_2a_{2,l+1} & + & \cdots & + & y_ia_{i,l+1} & \cdots & + & y_ma_{m,l+1} & = & c_{l+1} \\
\vdots & & & & & & & & & & & \vdots \\
y_1a_{1m} & + & y_2a_{2m} & + & \cdots & + & y_ia_{im} & \cdots & + & y_ma_{mn} & = & c_m
\end{array} \\
\\
y_i \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k, \quad y_i \text{ ελεύθερο } \; i = k+1, \ldots, m.
\end{array}
\tag{3.27}
$$

Για να γίνουν σαφέστερα τα παραπάνω ας δούμε μερικά παραδείγματα:

1. Το δυϊκό του

$$
\begin{array}{l}
\max \quad x_1 + 4x_2 - 3x_3 \\
s.t. \\
\begin{array}{cccccccc}
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 10 \\
x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & \leq & 100
\end{array} \\
\\
x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0.
\end{array}
$$

είναι το

$$
\begin{array}{l}
\min \quad 10y_1 + 100y_2 \\
s.t. \\
\begin{array}{cccccc}
y_1 & + & y_2 & \geq & 1 \\
y_1 & + & 2y_2 & \geq & 4 \\
y_1 & + & 4y_3 & \geq & -3
\end{array} \\
\\
y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0.
\end{array}
$$

2. Το δυϊκό του

$$
\begin{array}{l}
\min \quad 2x_1 - 5x_2 - 8x_3 + x_4 \\
s.t. \\
\begin{array}{cccccccccc}
2x_1 & - & 3x_2 & + & 11x_3 & - & 14x_4 & \leq & 13 \\
5x_1 & + & 7x_2 & + & 12x_3 & & & \geq & 17 \\
8x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & 19
\end{array} \\
\\
x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_3 \geq 0, \quad x_4 \text{ ελεύθερο.}
\end{array}
$$

είναι το

$$
\begin{array}{lrcrcrcr}
\max & \multicolumn{7}{l}{13y_1 - 17y_2 + 19y_3} \\
s.t. \\
& 2y_1 & - & 5y_2 & + & 8y_3 & \geq & 2 \\
& -3y_1 & - & 7y_2 & + & 4y_3 & \geq & -5 \\
& 11y_1 & - & 12y_2 & + & y_3 & \geq & -8 \\
& -14y_1 & & & + & 5y_3 & = & 1 \\
\\
\multicolumn{8}{l}{y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_3 \text{ ελεύθερο.}}
\end{array}
$$

3. Το δυϊκό του παραδείγματος 1 είναι το ακόλουθο

$$
\begin{array}{llllllll}
\multicolumn{8}{l}{\max\ 4y_1 + 8y_2 + 10y_3 + 7y_4 + 12y_5 + 4y_6} \\
s.t. \\
y_1 & +y_2 & & & & & \leq & 95 \\
& y_2 & +y_3 & & & & \leq & 80 \\
& & y_3 & +y_4 & & & \leq & 75 \\
& & & y_4 & +y_5 & & \leq & 85 \\
& & & & y_5 & +y_6 & \leq & 90 \\
y_1 & & & & & +y_6 & \leq & 100 \\
\multicolumn{8}{l}{y_i \geq 0 \ \ i = 1, \ldots, 6.}
\end{array}
$$

4. Έστω το πρόβλημα μεταφοράς με 2 εργοστάσια και 3 πόλεις. Το εργοστάσιο $i = 1, 2$, έχει δυναμικότητα a_i το οποίο σημαίνει ότι μπορεί να παράγει *το πολύ έως* a_i *μονάδες του προϊόντος*. Η πόλη j απαιτεί *κατ¨ ελάχιστον* b_j *μονάδες του προϊόντος*. Συνεπώς αυτό είναι ένα μη ισοσταθμισμένο πρόβλημα και έχει εφικτές λύσεις υπό την προϋπόθεση ότι $a_1 + a_2 \geq b_1 + b_2 + b3$. Το κόστος μεταφοράς ενός προϊόντος από το εργοστάσιο i στην πόλη j έστω ότι είναι c_{ij}. Το γραμμικό πρόγραμμα που το περιγράφει είναι το

$$
\begin{array}{lcccccccccccc}
\max & \multicolumn{12}{l}{c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{11}x_{21} + c_{12}x_{22} + c_{13}x_{23}} \\
s.t. \\
x_{11} & + & x_{12} & + & x_{13} & & & & & & & \leq & a_1 \\
& & & & & & x_{21} & + & x_{22} & + & x_{23} & \leq & a_2 \\
x_{11} & & & & & + & x_{21} & & & & & \geq & b_1 \\
& & x_{12} & & & & & + & x_{22} & & & \geq & b_2 \\
& & & & x_{13} & & & & & + & x_{23} & \geq & b_3 \\
\\
\multicolumn{13}{l}{x_{ij} \geq 0, i = 1, 2, \quad j = 1, 2, 3.}
\end{array}
$$

Για να βρούμε το δυϊκό πρόβλημα ονομάζουμε u_1, u_2, τις δυϊκές μεταβλητές που αντιστοιχούν στους δύο πρώτους περιορισμούς που αποτελούν το άνω όριο της δυναμικότητας των δύο εργοστασίων και v_1, v_2, v_3 τις μεταβλητές που αντιστοιχούν στην ελάχιστη κατανάλωση της κάθε μίας από τις τρεις πόλεις. Έχουμε

$$\begin{array}{lcccccccccccl}
\min & \multicolumn{12}{l}{-a_1u_1 - a_2u_2 + v_1b_1 + v_2b_2 + v_3b_3} \\
s.t. & & & & & & & & & & & & \\
- & u_1 & & & + & v_1 & & & & & \geq & c_{11} \\
- & u_1 & & & & & + & v_2 & & & \geq & c_{12} \\
- & u_1 & & & & & & & + & v_3 & \geq & c_{13} \\
 & & - & u_2 & + & v_1 & & & & & \geq & c_{21} \\
 & & - & u_2 & & & + & v_2 & & & \geq & c_{22} \\
 & & - & u_2 & & & & & + & v_3 & \geq & c_{23}
\end{array}$$

$$u_i \geq 0, \quad i = 1,2, \quad v_j \geq 0, \quad j = 1,2,3.$$

Το δυϊκό του δυϊκού ενός γραμμικού προγράμματος είναι το αρχικό. Αυτό μπορεί να αποδειχθεί γενικά αλλά είναι εξίσου αποτελεσματικό να καταδειχθεί με δύο απλά παραδείγματα

4α. Έστω το γραμμικό πρόγραμμα

$$\begin{array}{lrrrcl}
\max & \multicolumn{5}{l}{3x_1 + 4x_2 - 5x_3} \\
s.t. & & & & & \\
 & x_1 & -10x_2 & +7x_3 & \leq & 30 \\
 & & 15x_2 & -8x_3 & \leq & 40 \\
 & 3x_1 & & +4x_3 & \leq & 20 \\
 & 5x_1 & +8x_2 & & \leq & 25
\end{array} \tag{3.28}$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0.$$

Το δυϊκό του προβλήματος αυτού είναι το

$$\begin{array}{lrrrrcr}
\min & \multicolumn{6}{l}{30y_1 + 40y_2 + 20y_3 + 25y_4} \\
s.t. & & & & & & \\
 & y_1 & & +3y_3 & +5y_4 & \geq & 3 \\
 & -10y_1 & +15y_2 & & +8y_4 & \geq & 4 \\
 & 7y_1 & -8y_2 & +4y_3 & & \geq & -5
\end{array}$$

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \geq 0.$$

Το παραπάνω πρόγραμμα γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{array}{lrrrrcr}
\max & \multicolumn{6}{l}{-30y_1 - 40y_2 - 20y_3 - 25y_4} \\
s.t. & & & & & & \\
 & -y_1 & & -3y_3 & -5y_4 & \leq & -3 \\
 & 10y_1 & -15y_2 & & -8y_4 & \leq & -4 \\
 & -7y_1 & 8y_2 & -4y_3 & & \leq & 5
\end{array}$$

$$y_1 \geq 0, \; y_2 \geq 0, \; y_3 \geq 0.$$

και το δυϊκό αυτού του τελευταίου είναι το αρχικό πρόγραμμα (3.28).

4β. Έστω το αρχικό πρόβλημα

$$\begin{array}{lllcr}
\max & 3x_1 - 2x_2 - 7x_3 & & & \\
s.t. & & & & \\
x_1 & +x_2 & +x_3 & = & 10 \\
x_1 & +2x_2 & +8x_3 & \leq & 100 \\
 & & 2x_3 & \geq & 5
\end{array} \tag{3.29}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \text{ ελεύθερη},\ x_3 \geq 0.$$

Για την εύρεση του δυϊκού γράφουμε την τρίτη ανισότητα σε κανονική μορφή ως $-2x_3 \leq -5$ και, λαμβάνοντας υπ΄ όψιν ότι η x_2 είναι ελεύθερη μεταβλητή, πράγμα που σημαίνει ότι ο δεύτερος περιορισμός του δυϊκού προγράμματος θα είναι ισοτικός, έχουμε

$$\begin{array}{lllcr}
\min & 10y_1 + 100y_2 - 5y_3 & & & \\
s.t. & & & & \\
y_1 & +y_2 & & \geq & 3 \\
y_1 & +2y_2 & & = & -2 \\
y_1 & +8y_2 & -2y_3 & \geq & -7
\end{array}$$

$$y_1 \text{ ελεύθερη},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

Το πρόβλημα αυτό γράφεται ισοδύναμα ως

$$\begin{array}{lllcr}
\max & -10y_1 - 100y_2 + 5y_3 & & & \\
s.t. & & & & \\
-y_1 & -y_2 & & \leq & -3 \\
y_1 & +2y_2 & & = & -2 \\
-y_1 & -8y_2 & +2y_3 & \leq & 7
\end{array} \tag{3.30}$$

$$y_1 \text{ ελεύθερη},\ y_2 \geq 0,\ y_3 \geq 0.$$

Το δυϊκό του (3.30) είναι το

$$\begin{array}{lllcr}
\min & -3x_1 - 2x_2 + 7x_3 & & & \\
s.t. & & & & \\
-x_1 & +x_2 & -x_3 & = & -10 \\
-x_1 & +2x_2 & -8x_3 & \geq & -100 \\
 & & 2x_3 & \geq & 5
\end{array}$$

$$x_1 \geq 0\ ,\, x_2 \text{ ελεύθερη},\ x_3 \geq 0.$$

Το παραπάνω πρόγραμμα γράφεται ισοδύναμα ως

$$
\begin{array}{lrrcr}
\max & \multicolumn{4}{l}{3x_1 + 2x_2 - 7x_3} \\
s.t. & & & & \\
x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 10 \\
x_1 & -2x_2 & +8x_3 & \leq & 100 \\
 & & 2x_3 & \geq & 5 \\
 & & & & \\
\multicolumn{5}{l}{x_1 \geq 0\ ,\, x_2 \text{ ελεύθερη},\ x_3 \geq 0.}
\end{array}
\tag{3.31}
$$

Συγκρίνοντας το (3.31) με το (3.28) βλέπουμε ότι ταυτίζονται απόλυτα με την εξαίρεση ότι όπου στο (3.28) υπάρχει η μεταβλητή x_2, στο (3.31) υπάρχει η $-x_2$. Αν ορίσουμε την $x_2' = -x_2$ και εκφράσουμε το (3.31) ως προς τις μεταβλητές x_1, x_2' και x_3 τότε βλέπουμε ότι τα (3.28) και (3.31) ταυτίζονται. Αυτό είναι δυνατό επειδή η x_2 είναι *ελεύθερη μεταβλητή.* Αν υπόκειτο σε περιορισμό μη αρνητικότητας τότε ο μετασχηματισμός αυτός δεν θα οδηγούσε σε ισοδύναμο πρόγραμμα.

Κεφάλαιο 4

Γραμμικός Ακέραιος Προγραμματισμός

Τα προβλήματα γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού είναι προβλήματα γραμμικού προγραμματισμού με τον επιπλέον περιορισμό ότι οι μεταβλητές πρέπει να παίρνουν αποκλειστικά ακέραιες τιμές. Εν γένει τα προβλήματα αυτά είναι πιο δύσκολα μια και η μέθοδος Simplex δεν είναι εγγυημένο ότι θα καταλήξει στην βέλτιστη λύση ή ακόμα και σε μια προσεγγιστικά ικανοποιητική λύση. Εμείς θα εξετάσουμε δύο απλά προβλήματα γραμμικού ακέραιου προγραμματισμού, το «πρόβλημα του σακκιδίου» και το πρόβλημα της αντιστοίχησης.

4.1 Το πρόβλημα του σακκιδίου (knapsack problem)

Έστω ότι έχουμε n διαφορετικούς τύπους αντικειμένων. Τα αντικείμενα τύπου j έχουν αξία v_j και βάρος w_j, $j = 1, 2, \ldots, n$. Έστω ότι έχουμε επίσης ένα σακίδιο συνολικής χωρητικότητας W το οποίο θέλουμε να γεμίσουμε με αντικείμενα έτσι ώστε να μεγιστοποιήσουμε την συνολική αξία των αντικειμένων στο σακίδιο χωρίς το συνολικό τους βάρος να υπερβαίνει το W. Αν συμβολίσουμε με x_j τον αριθμό των αντικειμένων τύπου i που τοποθετούμε στο σακίδιο έχουμε το πρόβλημα μεγιστοποίησης υπό περιορισμούς

$$\max \sum_{j=1}^{n} x_j v_j \tag{4.1}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_j w_j \leq W, \tag{4.2}$$

$$x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad x_j \text{ ακέραιοι.}$$

Αν δεν υπήρχε ο επιπλέον περιορισμός της ακεραιότητας των x_j το πρόβλημα αυτό θα ήταν ένα απλό πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού. Έστω ότι έχουμε αριθμήσει τους τύπους των αντικειμένων έτσι ώστε

$$\mu := \frac{v_1}{w_1} \geq \frac{v_2}{w_2} \geq \cdots \geq \frac{v_n}{w_n}. \tag{4.3}$$

Συνεπώς ο τύπος 1 αντικειμένων έχει τον καλύτερο λόγο αξίας προς βάρος. Αν θέσουμε $x_1^* = W/w_1$, $x_j^* = 0$ για $j = 2, 3, \ldots, n$ δηλαδή να γεμίσουμε το σακκίδιο αποκλειστικά με αντικείμενα τύπου 1 η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης γίνεται $v_1 x_1 = W \frac{v_1}{w_1} = W\mu$. Αντίθετα, για οποιαδήποτε άλλη εφικτή λύση x_j, εφ¨ όσον ισχύει η $\mu w_j \geq v_j$ σαν συνέπεια της (4.3), αντικαθιστώντας στην (4.2) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} x_j v_j \leq \mu W$$

δηλαδή η τιμή της αντικειμενικής συνάρτησης είναι μικρότερη από εκείνη που επιτυγχάνεται από την λύση x^*.

Η παραπάνω λύση είναι εφικτή μόνο αν ο λόγος W/w_1 είναι ακέραιος αριθμός ή αν μπορούμε να βάλουμε στο σακκίδιο κλασματικό αριθμό αντικειμένων. Γενικά ο περιορισμός της ακεραιότητας αλλάζει ουσιαστικά την φύση του προβλήματος. Σε πολλές περιπτώσεις η βέλτιστη λύση του ακεραίου προβλήματος είναι ριζικά διαφορετική. Ας εξετάσουμε ένα παράδειγμα με τρεις τύπους αντικειμένων, $W = 100$, και

$w_1 = 49$	$v_1 = 20$	$v_1/w_1 = 0.408$
$w_2 = 50$	$v_2 = 75$	$v_2/w_2 = 1.5$
$w_3 = 51$	$v_3 = 102$	$v_3/w_3 = 2$

Βλέπουμε από τα παραπάνω δεδομένα ότι τα αντικείμενα του τύπου 3 είναι τα πλέον πολύτιμα. Συνεπώς, χωρίς τον περιορισμό ακεραιότητας θα βάζαμε $W/w_3 = 100/51 = 1.96$ μονάδες του τύπου 3 στο σακκίδιο και η συνολική αξία των αντικειμένων θα ήταν $v_3 \times (W/w_3) = 200$. Με τους περιορισμούς ακεραιότητας, θα σκεπτόταν κανείς να επιλέξει την πλησιέστερη δυνατή ακέραια λύση στην βέλτιστη μη ακέραια. Αφού δεν είναι δυνατόν να βάλουμε 2 αντικείμενα τύπου 3 στο σακκίδιο θα μπορούσαμε να στρογγυλέψουμε προς τα κάτω το 1.96 και να βάλουμε ένα, συμπληρώνοντας με ένα επιπλέον αντικείμενο του τύπου 1. Η συνολική αξία σ′ αυτή την περίπτωση θα ήταν $102 + 20 = 122$. Όμως, όπως μπορεί εύκολα να δει κανείς, με τον ακέραιο περιορισμό, η βέλτιστη λύση είναι να βάλει κανείς δύο αντικείμενα τύπου 2 στο σακκίδιο με συνολικό βάρος 100 και συνολική αξία 150.

4.2 Το πρόβλημα της αντιστοίχησης

Το πρόβλημα της αντιστοίχησης είναι ειδική περίπτωση του προβλήματος της μεταφοράς. Έστω ότι έχουμε n εργασίες τις οποίες θέλουμε να αντιστοιχίσουμε (ή να αναθέσουμε) σε n μηχανές. Το κόστος της ανάθεσης της εργασίας i στη μηχανή j είναι c_{ij} και ο σκοπός μας είναι να αναθέσουμε κάθε εργασία σε μια διαφορετική μηχανή με τέτοιο τρόπο ώστε να ελαχιστοποιηθεί το συνολικό (αθροιστικό) κόστος. Γενικά θα πρέπει να εξετάσουμε τις $n!$ διαφορετικές μεταθέσεις που αντιστοιχούν στις δυνατές αναθέσεις και επομένως ακόμη και για σχετικά μικρά προβλήματα (π.χ. 10 εργασίες και 10 μηχανές) η απλή εξέταση όλων των δυνατοτήτων είναι υπολογιστικά επίπονη. Το πρόβλημα της αντιστοίχησης είναι πρόβλημα γραμμικού προγραμματισμού δεδομένου ότι μπορεί να γραφεί ως

$$\min \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{4.4}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{4.5}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1, 2, \ldots, n \tag{4.6}$$

Στο παραπάνω γραμμικό πρόγραμμα η μεταβλητή x_{ij} είναι 1 αν η εργασία i αντιστοιχίζεται στην μηχανή j και 0 διαφορετικά. Συνεπώς εδώ έχουμε το επιπλέον χαρακτηριστικό ότι οι μεταβλητές x_{ij} εκτός από μη αρνητικές πρέπει να είναι και ακέραιες. Μπορεί να δείξει κανείς ότι αν χρησιμοποιήσει την μέθοδο Simplex αγνοώντας τον τελευταίο αυτό περιορισμό η λύση θα είναι πάντα ακέραια. Υπάρχει πάντως απλούστερος και αποτελεσματικότερος αλγόριθμος σ΄ αυτή την περίπτωση, η λεγόμενη Ουγγρική μέθοδος.

Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι, αν αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα από όλα τα στοιχεία μιας γραμμής το κόστος της βέλτιστης ανάθεσης μπορεί να αλλάξει αλλά *η ίδια η βέλτιστη ανάθεση δεν αλλάζει.* Για τον ίδιο λόγο, αν αφαιρέσουμε την ίδια ποσότητα από όλα τα στοιχεία μιας στήλης η βέλτιστη ανάθεση δεν αλλάζει. Γενικά, αν εξετάσουμε το πρόβλημα αντιστοίχισης με κόστος $c'_{ij} = c_{ij} - p_i - p_j$ για κάποια συγκεκριμένη ανάθεση x_{ij} έχουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c'_{ij} x_{ij} &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} p_j \sum_{i=1}^{m} x_{ij} + \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \\
&= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} p_j + \sum_{i=1}^{m} p_i .
\end{aligned}$$

Είναι σαφές από την παραπάνω εξίσωση ότι η αντιστοίχιση που ελαχιστοποιεί το $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$ ελαχιστοποιεί και το $\sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} c'_{ij} x_{ij}$ αφού οι δύο ποσότητες διαφέρουν κατά μια σταθερά που δεν εξαρτάται από τα x_{ij}.

Συνεπώς μπορούμε να επιλύσουμε ένα πρόβλημα αντιστοίχησης αφαιρώντας από κάθε γραμμή το μικρότερο κόστος της γραμμής (δημιουργώντας έτσι n μηδενικά στον πίνακα) και στην συνέχεια αν είναι αναγκαίο το ελάχιστο στοιχείο κάθε στήλης από όλα τα στοιχεία της στήλης. Για παράδειγμα, αν έχουμε τον πίνακα με κόστη

5	7	9
14	10	12
15	13	16

αφαιρώντας από κάθε γραμμή το ελάχιστο κόστος της γραμμής έχουμε

0	2	4
4	0	2
2	0	3

.

Αφαιρώντας από κάθε στήλη το ελάχιστο της στήλης παίρνουμε τον πίνακα

0	2	2
4	0	0
2	0	1

.

Στον παραπάνω πίνακα μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τις εργασίες σε μηχανές έτσι ώστε να έχουμε μηδενικό κόστος

$\boxed{0}$	2	2
4	0	$\boxed{0}$
2	$\boxed{0}$	1

.

Το πραγματικό κόστος αυτής της αντιστοίχησης είναι βεβαίως $5 + 13 + 12 = 30$.

Η παραπάνω διαδικασία δεν είναι βέβαια υποχρεωτικό να οδηγήσει σε πίνακα κοστών που να επιδέχεται αντιστοίχιση με μηδενικό κόστος. Για παράδειγμα ας θεωρήσουμε το ακόλουθο πρόβλημα με 4 εργασίες και 4 μηχανές.

1	4	6	3
9	7	10	9
4	5	11	7
8	7	8	5

.

Αφαιρώντας τα ελάχιστα των γραμμών έχουμε

0	3	5	2
2	0	3	2
0	1	7	3
3	2	3	0

.

Επαναλαμβάνοντας με τις στήλες έχουμε

0	3	2	2
2	0	0	2
0	1	4	3
3	2	0	0

.

Παρ΄ ότι ο τελευταίος πίνακας έχει έξι μηδενικά δεν είναι δυνατόν να βρούμε αντιστοίχηση με μηδενικό κόστος. Ο κανόνας σ¨ αυτή την περίπτωση είναι ο εξής:

1. Διαγράφουμε όλα τα μηδενικά με τον ελάχιστο δυνατό αριθμό οριζοντίων και καθέτων γραμμών.

2. Αφαιρούμε τον ελάχιστο μη διαγεγραμμενο αριθμό από όλους τους μή διαγεγραμμένους αριθμούς και τον προσθέτουμε στις διασταυρώσεις των οριζοντίων και καθέτων γραμμών.

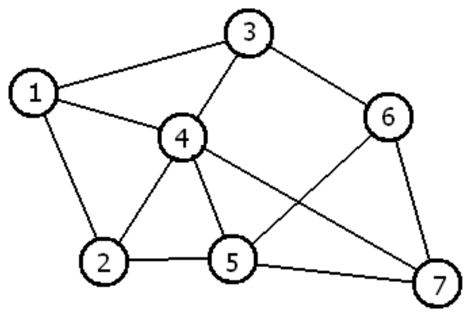
3. Επιχειρούμε να βρούμε αντιστοίχηση με μηδενικό κόστος στον καινούργιο πίνακα. Αν η προσπάθεια είναι επιτυχής έχουμε βρει αντιστοίχιση με ελάχιστο κόστος. Άλλως διαγράφουμε πάλι όλα τα μηδενικά με τον ελάχιστο αριθμό οριζοντίων και καθέτων γραμμών και επαναλαμβάνουμε την όλη διαδικασία.

Κεφάλαιο 5

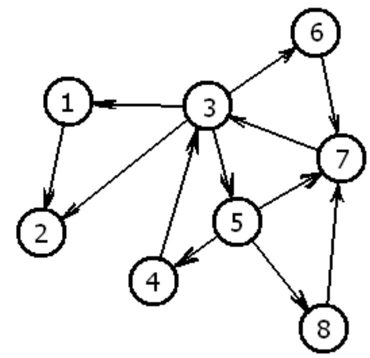
Προβλήματα Δικτύων

5.1 Γράφοι

Ένας γράφος είναι ένα απλό μαθηματικό αντικείμενο που περιγράφει ένα δίκτυο. Ο γράφος αποτελείται από ένα σύνολο κορυφών, V, και ένα σύνολο ακμών $\mathscr{E}$ που αποτελείται από ζεύγη κορυφών του V. Ανάλογα με το αν τα ζεύγη αυτά είναι διατεταγμένα ή όχι έχουμε προσανατολισμένους γράφους ή μη. Στο παρακάτω σχήμα βλέπουμε δύο γράφους. Ο ένας είναι μη προσανατολισμένος με σύνολο κορυφών $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ και σύνολο ακμών $\mathscr{E} = \{\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{4, 7\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}\}$ οι οποίες παριστάνονται ως γραμμές που ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές. Ο δεύτερος είναι προσανατολισμένος, με σύνολο κορυφών $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ και σύνολο ακμών $\mathscr{E} = \{(1, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 5), (3, 6), (4, 3), (5, 4), (5, 7), (5, 8), (6, 7), (7, 3), (8, 7)\}$. Εδώ οι ακμές παριστάνονται ως βέλη που ενώνουν τις αντίστοιχες κορυφές για να υποδηλώσουν την φορά (ή τον *προσανατολισμό*) της κάθε ακμής. Από μαθηματική άποψη στη μία περίπτωση έχουμε δυσύνολα (ή *απλά ζεύγη* $\{i, j\}$) και στη δεύτερη *διατεταγμένα ζεύγη* (i, j).



Μη προσανατολισμένος γράφος



Προσανατολισμένος γράφος

Έστω $(V, \mathscr{E})$ ένας μη προσανατολισμένος γράφος. Μια αλληλουχία από κορυφές του γράφου $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{k-1}, v_k$ ονομάζεται μονοπάτι αν $\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \ldots, \{v_{k-1}, v_k\} \in \mathscr{E}$, αν δηλαδή οι διαδοχικές κορυφές συνδέονται μεταξύ τους με ακμές. Το μονοπάτι ονομάζεται απλό αν $v_i \neq v_j$ για $i \neq j$, αν δηλαδή καμμία κορυφή δεν επαναλαμβάνεται (δηλαδή κάθε κορυφή είναι διαφορετική από κάθε άλλη). Ένας γράφος ονομάζεται *συνεκτικός* αν κάθε ζεύγος κορυφών του γράφου συνδέεται με κάποιο απλό μονοπάτι. Ένα μονοπάτι ονομάζεται *κύκλος* αν κάθε κορυφή του είναι διαφορετική από κάθε άλλη εκτός από την πρώτη και την τελευταία. Ένας γράφος ονομάζεται *δένδρο* αν είναι συνεκτικός και δεν περιλαμβάνει κανένα κύκλο. Μπορεί να δει κανείς ότι ένα δένδρο χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι αν του αφαιρέσουμε μια οποιαδήποτε ακμή τότε παύει να είναι συνεκτικός γράφος, χωρίζεται δηλαδή σε δύο τμήματα.

Ένας υπογράφος ενός γράφου είναι ένας γράφος που έχει όλες τις κορυφές του αρχικού γράφου και ένα υποσύνολο των ακμών του. *Δένδρο επικάλυψης* (spanning tree) ενός γράφου είναι ένας υπογράφος του γράφου που είναι ταυτόχρονα και δένδρο.

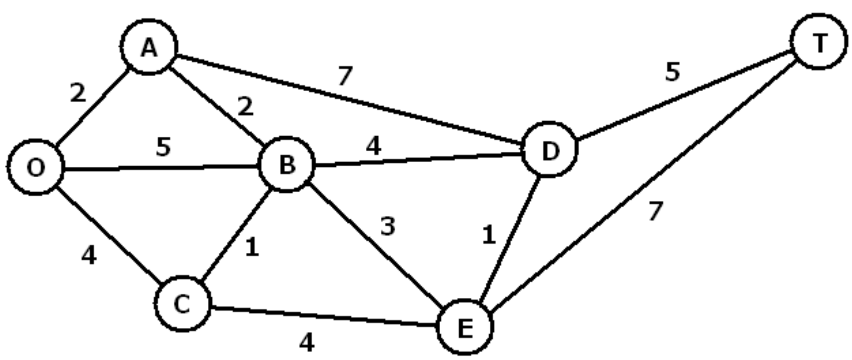
5.2 Ελάχιστα δένδρα επικάλυψης

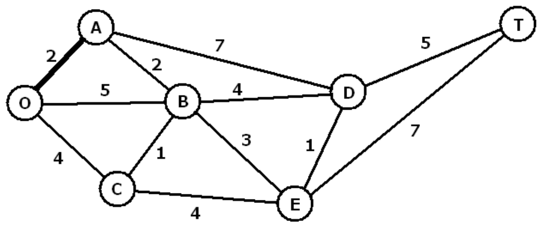
Έστω ότι έχουμε ένα γράφο $(V, \mathscr{E})$ του οποίου οι ακμές χαρακτηρίζονται από αριθμούς. Για παράδειγμα οι κορυφές του γράφου θα μπορούσαν να είναι κτίρια μέσα σε ένα πάρκο, οι ακμές δρόμοι που ενώνουν τα κτίρια μεταξύ τους, και οι αριθμοί που χαρακτηρίζουν τις ακμές τα μήκη των δρόμων. Έτσι, στο παρακάτω σχήμα, w_{ij} είναι το μήκος του δρόμου που ενώνει το κτίριο i και το κτίριο j. Έστω ότι θέλουμε να ενώσουμε όλα τα κτίρια με οπτικές ίνες (τοποθετώντας τις υπογείως και σκάβοντας κατά μήκος του δρόμου). Τότε μας ενδιαφέρει να βρούμε ένα δένδρο επικάλυψης το οποίο να έχει ελάχιστο συνολικό μήκος. Αυτό μπορεί να γίνει χρησιμοποιώντας ένα *άπληστο* αλγόριθμο (greedy algorithm) ως εξής.

Έστω S το σύνολο των κορυφών τις οποίες έχω συνδέσει μεταξύ τους (αρχικά $S = \emptyset$). Σε κάθε βήμα διαλέγω από το $V \setminus S$ (δηλαδή από το σύνολο των κορυφών του γράφου που δεν ανήκει στο S) την κορυφή εκείνη που απέχει ελάχιστη απόσταση από το S. Την προσθέτω στο S και επιλέγω και την ακμή εκείνη που εξασφαλίζει την ελάχιστη απόσταση. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται μέχρις ότου το S να περιλάβει όλες τις κορυφές του γράφου. Για να ξεκινήσει ο αλγόριθμος αρκεί να διαλέξουμε μια οποιαδήποτε κορυφή και να την τοποθετήσουμε στο S το οποίο αρχικά είναι κενό.

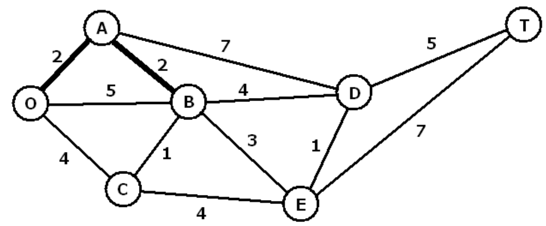
Ο αλγόριθμος αυτός (γνωστός και ως αλγόριθμος του Prim) είναι ένα κλασσικό δείγμα άπληστου αλγορίθμου ο οποίος συμπεριφέρεται μυωπικά (δηλαδή επιλέγει ανά πάσα στιγμή το βραχυπρόθεσμο βέλτιστο) αλλά βρίσκει την συνολικά βέλτιστη λύση.

Το ακόλουθο παράδειγμα αποσαφηνίζει την εφαρμογή του αλγορίθμου. Επτά κτίρια (O, A, B, C, D, E, T,) βρίσκονται διεσπαρμένα σε ένα πάρκο και συνδέονται με δρόμους όπως φαίνεται στο ακόλουθο σχήμα. Οι ακμές του γράφου απεικονίζουν τους δρόμους και οι αριθμοί δίπλα στις ακμές τις αντίστοιχες αποστάσεις. Στο επόμενο σχήμα βλέπουμε την εφαρμογή του αλγορίθμου του Prim. Αρχικά $S = \emptyset$ και τοποθετώντας την κορυφή O έχουμε $S = \{O\}$. Στο πρώτο βήμα βλέπουμε ότι από τις ακμές που συνδέονται με στοιχεία του S και που είναι οι OA, OB, OC, εκείνη που έχει το μικρότερο μήκος είναι η OA. Άρα $S = \{O, A\}$ και η ακμή OA προστίθεται στο ελάχιστο δένδρο επικάλυψης. Στο δεύτερο βήμα παρατηρούμε ότι οι ακμές που συνδέουν στοιχεία που δεν ανήκουν στο S με στοιχεία που ανήκουν στο S είναι οι OB, OC, AB και AD. Από αυτές η AB έχει ελάχιστο μήκος και επομένως το S γίνεται $S = \{O, A, B\}$ και η AB προστίθεται στο ελάχιστο δένδρο επικάλυψης. Στο βήμα 3 παρατηρούμε ότι οι ακμές που συνδέουν στοιχεία που δεν ανήκουν στο S με στοιχεία που ανήκουν στο S είναι οι OC, BC, BE, BD και AD. Από αυτές το ελάχιστο μήκος το έχει η BC. Έτσι η κορυφή C προστίθεται στο S το οποίο γίνεται $S = \{O, A, B, C\}$ και η ακμή BC στο ελάχιστο δένδρο επικάλυψης. Στα βήματα 4, 5 και 6 προσθέτουμε διαδοχικά την κορυφή E και την ακμή BE, την κορυφή D και την ακμή ED, και την κορυφή T και την ακμή DT αντίστοιχα συμπληρώνοντας έτσι το δένδρο ελάχιστης επικάλυψης.

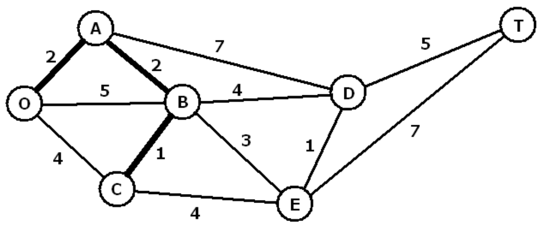




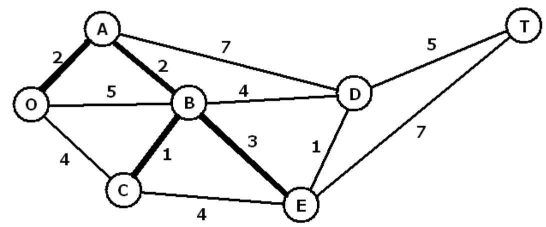
Βήμα 1



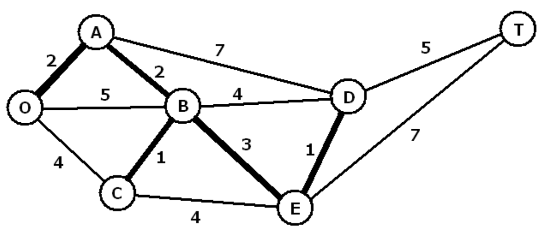
Βήμα 2



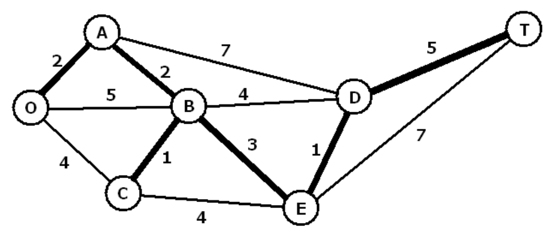
Βήμα 3



Βήμα 4



Βήμα 5



Βήμα 6

5.3 Πρόβλημα μέγιστης ροής σε προσανατολισμένους γράφους

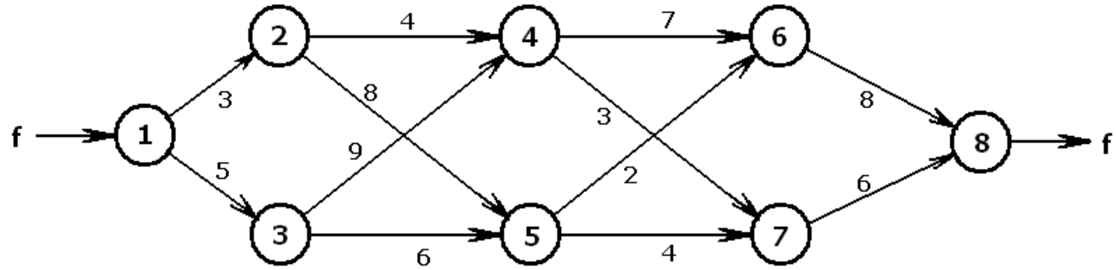
Στο παρόν Ένας προσανατολισμένος γράφος μπορεί να περιγραφεί από τον λεγόμενο πίνακα πρόσπτωσης ο οποίος κατασκευάζεται ως εξής. Αν υποθέσουμε ότι $V = \{1, 2, \ldots, m\}$ δηλαδή ότι έχουμε αριθμήσει τις κορυφές του γράφου τότε οι ακμές είναι ένα υποσύνολο του $V \times V$. Αν $e_1, e_2, \ldots, e_n$ είναι οι ακμές του γράφου τότε έχουμε ένα πίνακα $m \times n$ του οποίου κάθε γραμμή αντιστοιχεί σε μια κορυφή (ή κόμβο) και κάθε στήλη σε μια ακμή. Η στήλη που αντιστοιχεί στην ακμή (k, l) είναι η

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

όπου όλα τα στοιχεία είναι μηδέν εκτός από το στοιχείο k που είναι -1 και το στοιχείο l που είναι $+1$. Για παράδειγμα ο πίνακας πρόσπτωσης που αντιστοιχεί στον γράφο του σχήματος είναι ο

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & & & & & & & & & & \\ 1 & & -1 & -1 & & & & & & & & \\ & 1 & & & -1 & -1 & & & & & & \\ & & 1 & & 1 & & -1 & -1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & -1 & -1 & & \\ & & & & & & 1 & & 1 & & -1 & \\ & & & & & & & 1 & & 1 & & -1 \\ & & & & & & & & & & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Αν υποθέσουμε ότι οι χωρητικότητες των αγωγών είναι u_j για την ακμή j τότε έχουμε το γραμμικό πρόγραμμα που λύνει το πρόβλημα της μέγιστης ροής.



Το πρόβλημα της μέγιστης ροής

$$\max f \qquad s.t. \tag{5.1}$$

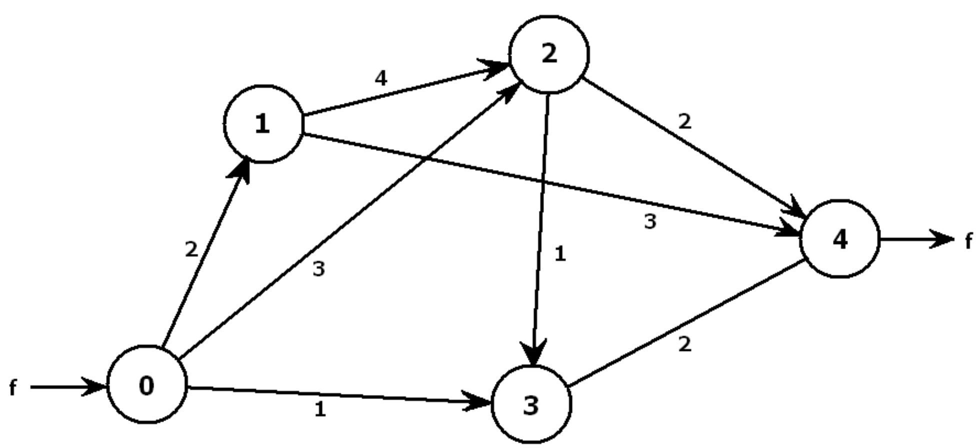
$$\begin{array}{rrrrrrrrrrrrcr}
-x_{12} & -x_{13} & & & & & & & & & & & = & -f \\
x_{12} & & -x_{24} & -x_{25} & & & & & & & & & = & 0 \\
 & x_{13} & & & -x_{34} & -x_{35} & & & & & & & = & 0 \\
 & & x_{24} & & +x_{34} & & -x_{46} & -x_{47} & & & & & = & 0 \\
 & & & x_{25} & & +x_{35} & & & -x_{56} & -x_{57} & & & = & 0 \\
 & & & & & & x_{46} & & +x_{56} & & -x_{68} & & = & 0 \\
 & & & & & & & x_{47} & & +x_{57} & & -x_{78} & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & x_{68} & +x_{78} & = & f \\
x_{12} & & & & & & & & & & & & \leq & 3 \\
 & x_{13} & & & & & & & & & & & \leq & 5 \\
 & & x_{24} & & & & & & & & & & \leq & 4 \\
 & & & x_{25} & & & & & & & & & \leq & 8 \\
 & & & & x_{34} & & & & & & & & \leq & 9 \\
 & & & & & x_{35} & & & & & & & \leq & 6 \\
 & & & & & & x_{46} & & & & & & \leq & 7 \\
 & & & & & & & x_{47} & & & & & \leq & 3 \\
 & & & & & & & & x_{56} & & & & \leq & 2 \\
 & & & & & & & & & x_{57} & & & \leq & 4 \\
 & & & & & & & & & & x_{68} & & \leq & 8 \\
 & & & & & & & & & & & x_{78} & \leq & 6
\end{array}$$

$$x_j \geq 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 12.$$

Στη συνέχεια δίνουμε ένα δεύτερο παράδειγμα

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrcr}
\max f & & & & & & & & & & \\
s.t. & & & & & & & & & & \\
x_{01} & +x_{02} & +x_{03} & & & & & & & = & -f \\
-x_{01} & & & +x_{12} & +x_{13} & +x_{14} & & & & = & 0 \\
 & -x_{02} & & -x_{12} & & & +x_{23} & +x_{24} & & = & 0 \\
 & & -x_{03} & & -x_{13} & & -x_{23} & & +x_{34} & = & 0 \\
 & & & & & -x_{14} & & -x_{24} & -x_{34} & = & 0 \\
x_{01} & & & & & & & & & \leq & 2 \\
 & x_{02} & & & & & & & & \leq & 3 \\
 & & x_{03} & & & & & & & \leq & 1 \\
 & & & x_{12} & & & & & & \leq & 4 \\
 & & & & x_{13} & & & & & \leq & 1 \\
 & & & & & x_{14} & & & & \leq & 3 \\
 & & & & & & x_{23} & & & \leq & 1 \\
 & & & & & & & x_{24} & & \leq & 2 \\
 & & & & & & & & x_{34} & \leq & 2
\end{array}
\tag{5.2}
$$

$x_{ij} \geq 0.$



5.4 Το πρόβλημα της ροής ελαχίστου κόστους

Ας θεωρήσουμε ότι το κόστος ροής μιας μονάδας στην ακμή j είναι c_j. Τότε η βέλτιστη ροή που ελαχιστοποιεί το κόστος κάτω από τους περιορισμούς ότι η συνολική ροή πρέπει να είναι ίση με μια δεδομένη ποσότητα f είναι

$$\min \sum_{j=1}^{12} c_j x_j \tag{5.3}$$

$$
\begin{array}{rrrrrrrrrrrrcr}
\multicolumn{14}{l}{s.t.} \\
-x_1 & -x_2 & & & & & & & & & & & = & -f \\
x_1 & & -x_3 & -x_4 & & & & & & & & & = & 0 \\
 & x_2 & & & -x_5 & -x_6 & & & & & & & = & 0 \\
 & & x_3 & & x_5 & & -x_7 & -x_8 & & & & & = & 0 \\
 & & & x_4 & & x_6 & & & -x_9 & -x_{10} & & & = & 0 \\
 & & & & & & x_7 & & x_9 & & -x_{11} & & = & 0 \\
 & & & & & & & x_8 & & x_{10} & & -x_{12} & = & 0 \\
 & & & & & & & & & & x_{11} & x_{12} & = & f \\
x_1 & & & & & & & & & & & & \le & 3 \\
 & x_2 & & & & & & & & & & & \le & 5 \\
 & & x_3 & & & & & & & & & & \le & 4 \\
 & & & x_4 & & & & & & & & & \le & 8 \\
 & & & & x_5 & & & & & & & & \le & 9 \\
 & & & & & x_6 & & & & & & & \le & 6 \\
 & & & & & & x_7 & & & & & & \le & 7 \\
 & & & & & & & x_8 & & & & & \le & 3 \\
 & & & & & & & & x_9 & & & & \le & 2 \\
 & & & & & & & & & x_{10} & & & \le & 4 \\
 & & & & & & & & & & x_{11} & & \le & 8 \\
 & & & & & & & & & & & x_{12} & \le & 6
\end{array}
$$

$x_j \ge 0 \quad j = 1, 2, \ldots, 12.$

Κεφάλαιο 6

Περιβάλλουσα Ανάλυση Δεδομένων

6.1 Εισαγωγή και Βασικές Αρχές

Έστω n επιχειρήσεις τις οποίες εξετάζουμε από την σκοπιά της παραγωγικότητος ως μαύρα κουτιά. Η επιχείρηση i έχει εισροή (input) x_i και εκροή (output) y_i. Μπορούμε να ορίσουμε ως παραγωγικότητα της επιχείρησης i τον λόγο $\rho_i = \frac{y_i}{x_i}$ και να κατατάξουμε τις επιχειρήσεις ως προς την παραγωγικότητα. Αν τώρα υποθέσουμε ότι κάθε επιχείρηση έχει μια εισροή x_i και δύο εκροές, (y_i^1, y_i^2) τότε, θέτοντας $(\rho_i^1, \rho_i^2) = (\frac{y_i^1}{x_i}, \frac{y_i^2}{x_i})$ σε κάθε επιχείρηση αντιστοιχεί ένα σημείο στο επίπεδο. Άρα δεν είμαστε σε θέση να συγκρίνουμε απόλυτα όλες τις επιχειρήσεις, μπορούμε όμως να τις κατατάξουμε με βάση την αποδοτικότητά τους και να συμπεράνουμε ότι μερικές από αυτές βρίσκονται στο σύνορο της αποδοτικότητας (efficient frontier) ενώ άλλες είναι κατώτερες. Η βασική ιδέα και η οικονομική θεωρία πίσω από αυτήν βρίσκονται στο άρθρο του Farrell (1957).

Γενικότερα, θα θεωρήσουμε επιχειρήσεις με k εισροές και m εκροές. Αν υποθέσουμε ότι οι εισροές της επιχείρησης i είναι οι $(x_1^i, \ldots, x_k^i)$ και οι εκροές της είναι οι $(y_1^i, \ldots, y_m^i)$ τότε αν αποτιμήσουμε τις ειροές με τιμές $(u_1, \ldots, u_k)$ και τις εκροές με $(v_1, \ldots, v_m)$ η παραγωγικότητα της επιχείρησης i δίδεται από την σχέση

$$\frac{\sum_{r=1}^{m} v_r y_r^i}{\sum_{l=1}^{k} u_l y_l^i}.$$

Ο παραπάνω ορισμός είναι αυθαίρετος και εξαρτάται από την επιλογή των τιμών.

$$\max \ \frac{\sum_{r=1}^{m} v_r y_r^i}{\sum_{l=1}^{k} u_l y_l^i} \tag{6.1}$$

$$s.t.$$

$$\frac{\sum_{r=1}^{m} v_r y_r^j}{\sum_{l=1}^{k} u_l y_l^j} \leq 1 \quad j = 1, \ldots, n, \quad j \neq i$$

$$v_r \geq 0, \ r = 1, \ldots, m, \quad u_l \geq 0, \ l = 1, \ldots, k.$$

Το παραπάνω πρόβλημα δεν είναι γραμμικό πρόγραμμα, είναι όμως ισοδύναμο με το ακόλουθο γραμμικό πρόγραμμα

$$\max \ \sum_{r=1}^{m} v_r y_r^i \tag{6.2}$$

$$s.t.$$

$$\sum_{l=1}^{k} u_l y_l^i = 1$$

$$\sum_{r=1}^{m} v_r y_r^j - \sum_{l=1}^{k} u_l y_l^j \leq 0 \quad j = 1, \ldots, n, \quad j \neq i$$

$$v_r \geq 0, \ r = 1, \ldots, m, \quad u_l \geq 0, \ l = 1, \ldots, k.$$

Κεφάλαιο 7

Θεωρία Παιγνίων

7.1 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος σε κανονική μορφή

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε παίγνια μηδενικού αθροίσματος σε κανονική μορφή (zero sum games in canonical form). Τα παίγνια αυτά μπορούν να περιγραφούν από ένα πίνακα ο οποίος προσδιορίζει την αμοιβή που δίδει ο παίκτης II στον παίκτη I. Για παράδειγμα, στον ακόλουθο πίνακα

$$\begin{array}{cc} & \text{παίκτης II: Ελαχιστοποιεί} \\ \text{παίκτης I: Μεγιστοποιεί} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{7.1}$$

ο παίκτης I επιλέγει γραμμή ενώ ο παίκτης II στήλη, και από τον συνδυασμό των δύο αποφάσεων προκύπτει η αμοιβή που θα πρέπει να πληρώσει ο II στον I (η οποία βεβαίως μπορεί να είναι και αρνητική). Έστω $A = [a_{ij}]$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ ο πίνακας του παιγνίου. Αν $a_{ij} \leq a_{i'j}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ τότε η στρατηγική i κυριαρχείται από την στρατηγική i' για τον παίκτη I αφού ο παίκτης αυτός δεν έχει ποτέ λόγο να προτιμήσει την i σε σύγκριση με την i', ασχέτως των ενεργειών του παίκτη II. Συνεπώς μπορούμε να διαγράψουμε την γραμμή i από τον πίνακα και να αναλύσουμε ένα παίγνιο με μικρότερο πίνακα αμοιβών. Παρόμοια, αν $a_{ij} \geq a_{ij'}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$, τότε η στρατηγική j κυριαρχείται από την j', δηλαδή ο παίκτης II δεν έχει ποτέ λόγο να προτιμήσει την j σε σύγκριση με την j'. Επομένως μπορούμε σ′ αυτή την περίπτωση να διαγράψουμε τη στήλη j.

Στο παράδειγμα της (7.1) ο παίκτης I, αν παίξει πρώτος, θα πρέπει να επιλέξει την 2η γραμμή γιατί αυτή έχει το *μεγαλύτερο ελάχιστο*. Ο παίκτης II που παίζει δεύτερος αναγκαστικά θα επιλέξει τότε την δεύτερη στήλη και θα πληρώσει 2 μονάδες στον I. Οποιαδήποτε άλλη επιλογή από την πλευρά του I οδηγεί σε μικρότερη αμοιβή για τον I. Αντίστοιχα, αν ο παίκης II παίζει πρώτος, τότε θα πρέπει να επιλέξει την στήλη με το *μικρότερο μέγιστο*, δηλαδή την στήλη 2. Τότε ο παίκτης I που παίζει δεύτερος θα πρέπει αναγκαστικά να επιλέξει την γραμμή 2 και θα πάρει αμοιβή και πάλι 2 μονάδες. Στην περίπτωση αυτή δεν έχει σημασία ποιός από τους δύο παίκτες παίζει πρώτος. Υπάρχουν όμως άλλα παίγνια στα οποία το ποιός παίζει πρώτος (δηλαδή *η πληροφορία που μπορεί να έχει ένας παίκτης για τις αποφάσεις του άλλου*) έχει σημασία. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του παιγνίου με τον ακόλουθο πίνακα

$$\begin{array}{cc} & \text{παίκτης II: Ελαχιστοποιεί} \\ \text{παίκτης I: Μεγιστοποιεί} & \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{7.2}$$

όταν ο παίκτης I παίζει πρώτος τότε θα επιλέξει την γραμμή 2 η οποία έχει το μεγαλύτερο ελάχιστο που είναι ίσο με 1. Ο παίκτης II διαλέγει τότε την στήλη 3 και δίνει αμοιβή 1 στον I. Όταν ο παίκτης II παίζει πρώτος τότε θα επιλέξει την στήλη με το μικρότερο μέγιστο, δηλαδή την στήλη 2, οπότε ο I διαλέγει την γραμμή 2 και παίρνει 3 μονάδες από τον II.

Λήμμα 2. *Αν X, Y, δύο σύνολα και $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ τότε*

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \leq \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y).$$

Απόδειξη Ισχύει ότι $\inf_{y\in Y} f(x,y) \leq f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in X \times Y$. Συνεπώς, παίρνοντας supremum ως προς $x \in X$, $\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \leq \sup_{x\in X} f(x,y)$ για όλα τα $y \in Y$. Παίρνοντας τώρα το infimum ως προς $y \in Y$ στην τελευταία σχέση συμπληρώνει την απόδειξη. ∎

Ορισμός 2. *Αν ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ ικανοποιεί την $\max_i \min_j a_{ij} = \min_i \max_j a_{ij}$ τότε θα λέμε ότι έχει σαγματικό σημείο. Αν αντιθέτως $\max_i \min_j a_{ij} < \min_i \max_j a_{ij}$ τότε ο πίνακας δεν έχει σαγματικό σημείο.*

Από την παραπάνω συζήτηση είναι σαφές ότι, αν ο πίνακας του παιγνίου έχει σαγματικό σημείο τότε οποιαδήποτε πληροφορία έχει ένας παίκτης για την απόφαση του άλλου δεν επηρεάζει την δική του στρατηγική. Σ' αυτή την περίπτωση το παίγνιο έχει λύση με *καθαρές στρατηγικές*. Αν ο πίνακας δεν έχει σαγματικό σημείο τότε η πληροφορία που μπορεί να έχει ο ένας παίκτης για την στρατηγική του άλλου επηρεάζει και την δική του στρατηγική. Το παίγνιο δεν έχει λύση με *καθαρές στρατηγικές*.

7.2 Μεικτές στρατηγικές και το θεμελιώδες θεώρημα

Μια μεικτή στρατηγική (ή τυχαιοποιημένη στρατηγική) είναι μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο των στρατηγικών ενός παίκτη. Ο παίκτης δηλαδή αποφασίζει όχι ποια στρατηγική θα επιλέξει αλλά ποια κατανομή στο χώρο των στρατηγικών θα επιλέξει. Ο λόγος για τον οποίο ένας παίκτης θα μπορούσε να αποφασίσει να επιλέξει μια μεικτή στρατηγική είναι επειδή αναγκάζεται να παίξει πρώτος. Για παράδειγμα, στον πίνακα (7.2) ο οποίος δεν έχει σαγματικό σημείο όταν ο I παίζει πρώτος κερδίζει 1 μονάδα ενώ όταν παίζει δεύτερος 3 μονάδες. Αν ο παίκτης I δηλώσει ότι θα επιλέξει τις τρεις δυνατές ενέργειές του με αντίστοιχες πιθανότητες x_1, x_2, x_3, τότε ο παίκτης II αναγκάζεται να επιλέξει έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει την μέση αμοιβή που θα δώσει στον I δηλαδή καλείται να επιλέξει το ελάχιστο ανάμεσα στα

$$(-3x_1 + 2x_2 + 4x_3\,,\ -2x_1 + 3x_2\,,\ 4x_1 + x_2 - 2x_3)\,.$$

Για παράδειγμα, αν $x_1 = 1/10$, $x_2 = 9/10$, $x_3 = 0$ τότε ο II έχει να επιλέξει το ελάχιστο ανάμεσα στα $(1.5, 2.5, 1.3)$, συνεπώς επιλέγει την τρίτη στήλη, και δίνει αμοιβή 1.3 στον I. Άρα, όταν ο παίκτης I «παίζει πρώτος», όταν δηλαδή έχει λόγους να πιστεύει ότι ο II γνωρίζει την στρατηγική του θα προτιμήσει μια μεικτή (τυχαιοποιημένη) στρατηγική ώστε να αυξήσει τα έσοδά του. Το ίδιο βέβαια ισχύει και για τον παίκτη II που μπορεί να έχει επίσης κίνητρο να υιοθετήσει μια μεικτή στρατηγική.

Σε ένα γενικό παίγνιο που περιγράφεται από ένα πίνακα $m \times n$, $A = (a_{ij})$, αν ο παίκτης I υιοθετήσει την μεικτή στρατηγική x_i, $i = 1, \dots, m$ και ο II την y_j, $j = 1, \dots, n$ τότε η μέση τιμή της αμοιβής του II προς τον I είναι $x^T A y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$.

Όπως είδαμε $\max_i \min_j a_{ij} \le \min_j \max_i a_{ij}$ με ισότητα όταν ο πίνακας έχει σαγματικό σημείο. Ο χώρος όλων των μεικτών στρατηγικών του I είναι το simplex $X := \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \ge 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$. Παρόμοια ο χώρος των μεικτών στρατηγικών του II είναι ο $Y := \{(y_1, \dots, y_n) : x_i \ge 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}$.

Θεώρημα 14 (Von Neumann). *Κάθε παίγνιο της ανωτέρω μορφής έχει λύση με μεικτές στρατηγικές, δηλαδή*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y. \tag{7.3}$$

Απόδειξη Θέτουμε $v_I = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y$ και $v_{II} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y$ με σκοπό να δείξουμε ότι $v_I = v_{II}$. Από το λήμμα 2 ισχύει ότι $v_I \le v_{II}$, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση αυτή ικανοποιείται με ισότητα.

Έστω $A = [a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n]$ οι στήλες του πίνακα A. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη διατύπωση του Λήμματος του Farkas. Αν το 0 ανήκει στην κυρτή θήκη των σημείων $a_1, \dots, a_n, e_1, \dots, e_m$ στον $\mathbb{R}^m$ τότε υπάρχουν πραγματικοί $s_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, m+n$, τέτοιοι ώστε

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j + s_{n+i} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$
$$\sum_{j=1}^{m+n} s_j = 1.$$

Αλλά δεν είναι δυνατόν να έχουμε $s_j = 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$ γιατί τότε τα μοναδιαία διανύσματα e_i θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα. Συνεπώς $\sum_{j=1}^{n} s_j > 0$ και μπορούμε να ορίσουμε τις ποσότητες

$$y_j := \frac{s_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j} \geq 0$$

για τις οποίες ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Συνεπώς, από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = -\frac{s_{n+i}}{\sum_{j=1}^{n} s_j} \leq 0 \qquad \forall i.$$

Άρα, για την συγκεκριμμένη επιλογή των y_j από τον παίκτη II, $x^T A y \leq 0$ για οποιαδήποτε επιλογή των x_i από τον I, συνεπώς $\max_{x \in X} x^T A y \leq 0$ για το συγκεκριμένο $y \in Y$ και $v_{II} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y \leq 0$ κατά μείζονα λόγο. Άρα έχουμε

$$v_I \leq v_{II} \leq 0. \tag{7.4}$$

Έστω τώρα ότι η πρώτη περίπτωση του λήμματος του Farkas δεν ισχύει. Τότε θα ισχύει υποχρεωτικά η δεύτερη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x = (x_1, \ldots, x_m)$ τέτοιο ώστε $x_i > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, και $\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} > 0$ για $j = 1, \ldots, n$. Συνεπώς για το συγκεκριμένο x έχουμε $x^T A y > 0$ για κάθε y και επομένως, επαναλαμβάνοντας τον προηγούμενο συλλογισμό έχουμε $v_I > 0$ και

$$0 < v_I \leq v_{II}. \tag{7.5}$$

Εφόσον υποχρεωτικά πρέπει να ισχύει είτε η (7.4) είτε η (7.5) συμπεραίνουμε ότι είναι αδύνατον να ισχύει η $v_I \leq 0 < v_{II}$.

Έστω τώρα το παίγνιο που αντιστοιχεί στον πίνακα $B := (b_{ij})$ όπου $b_{ij} = a_{ij} + k\ \forall i, j$. Προφανώς $x^T B y = x^T A y + k$ για κάθε x, y και συνεπώς $v_I(B) = v_I(A) + k$, $v_{II}(B) = v_{II}(A) + k$. Αφού $v_I(B) \leq 0 < v_{II}(B)$ είναι αδύνατον, $v_I(B) \leq -k < v_{II}(B)$ είναι αδύνατον για κάθε $k \in \mathbb{R}$ που συνεπάγεται ότι $v_I < v_{II}$ είναι αδύνατον. Άρα, αναγκαστικά, $v_I = v_{II}$. ∎

7.3 Γραφικός υπολογισμός της τιμής

Για να κατανοήσουμε καλύτερα μερικές από τις έννοιες εξετάζουμε περιπτώσεις που ο ένας τουλάχιστον από τους δύο παίκτες έχει μόνο δύο επιλογές. Σ΄ αυτή την περίπτωση είναι δυνατό να επιλύσουμε γραφικά το παίγνιο. Θα εξετάσουμε το εξής παράδειγμα. Ο παίκτης ΙΙ κρύβει στο χέρι του ένα νόμισμα είτε του *ενός* είτε των *δύο* ευρώ. Ο παίκτης Ι μαντεύει τι νόμισμα έχει κρύψει ο ΙΙ και αν το πετύχει παίρνει το νόμισμα αλλιώς πληρώνει στον Ι 1.5 ευρώ. Το παιχνίδι παίζεται πολλές φορές. Ποιά είναι η βέλτιστη στρατηγική κάθε παίκτη και ποιά είναι η αξία του παιχνιδιού;

Ο πίνακας του παιγνίου (που δείχνει τα ποσά που πληρώνει ο ΙΙ στον Ι) είναι

$$\begin{array}{cc} & \text{παίκτης II} \\ \text{παίκτης I} & \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Είναι σαφές ότι ο πίνακας του παιγνίου αυτού δεν έχει σαγματικό σημείο. Αν ο παίκτης Ι δηλώσει πρώτος τι πιστεύει ότι είναι το νόμισμα και ο παίκτης ΙΙ μπορεί να κρύψει το νόμισμα μετά την δήλωση τότε ασφαλώς θα διαλέξει το αντίθετο και θα κερδίσει από τον παίκτη Ι 1.5 ευρώ. Αν ο παίκτης ΙΙ δηλώσει πρώτος τι νόμισμα έχει κρύψει τότε ο Ι θα το πάρει. Ο ΙΙ το γνωρίζει και γιάυτό θα κρύψει ένα ευρώ.

Ας πούμε λοιπόν ότι ο ΙΙ χρησιμοποιήσει μεικτές στρατηγικές. Δηλώνει ότι θα κρύψει 1 ευρώ με πιθανότητα y_1 και 2 ευρώ με πιθανότητα $y_2 = 1 - y_1$. (Ακόμη και αν δεν το δηλώσει, αφού το παιχνίδι παίζεται συνέχεια ο Ι θα το καταλάβει αν συλλέξει στατιστικά στοιχεία.) Αν ο Ι μαντέψει 1 ευρώ τότε η μέση τιμή της αμοιβής που θα πάρει από τον ΙΙ είναι $y_1 - 1.5(1 - y_1)$. Αν ο Ι μαντέψει 2 ευρώ τότε η μέση αμοιβή που θα πάρει από τον ΙΙ είναι $-1.5y_1 + 2(1 - y_1)$. Ο παίκτης Ι δεν ξέρει τι νόμισμα έχει κρύψει ο ΙΙ, μπορεί όμως να εκτιμήσει την πιθανότητα y_1 συνεπώς θα πει

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ ευρώ} & \text{αν } y_1 - 1.5(1 - y_1) > -1.5y_1 + 2(1 - y_1) \\ 2 \text{ ευρώ} & \text{αν } y_1 - 1.5(1 - y_1) \leq -1.5y_1 + 2(1 - y_1) \end{array}$$

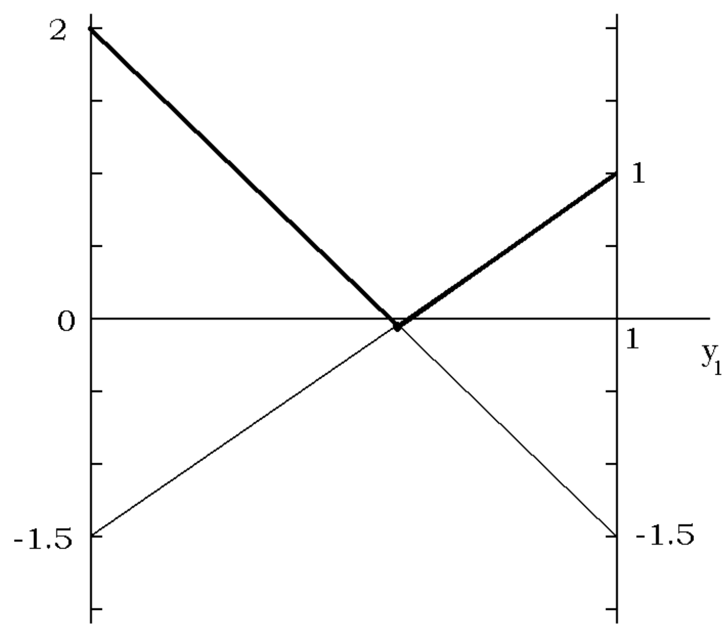
και η μέση αμοιβή που θα πάρει θα είναι

$$\max(y_1 - 1.5(1 - y_1)\ ,\ -1.5y_1 + 2(1 - y_1)) \tag{7.6}$$

Αυτό το γνωρίζει ο ΙΙ (που ελαχιστοποιεί) συνεπώς θα επιλέξει το y_1 έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει την (7.6). Η μέση τιμή της αμοιβής που πληρώνει είναι

$$\min_{0 \leq y_1 \leq 1} \max(y_1 - 1.5(1 - y_1)\ ,\ -1.5y_1 + 2(1 - y_1)).$$

Επομένως ο ΙΙ διαλέγει το y_1 έτσι ώστε $y_1 - 1.5(1 - y_1) = -1.5y_1 + 2(1 - y_1)$ ή $y_1 = \frac{7}{12}$ και η αξία του παιγνίου είναι $2 - 3.5y_1 = -1/24$. Αυτό σημαίνει ότι ο ΙΙ πληρώνει κατά μέσο όρο στον Ι $-1/24$ ευρώ. Συνεπώς το παιχνίδι είναι επικερδές για τον ΙΙ αν παίζεται βέλτιστα και του αποφέρει μέσο κέρδος 1/24 ευρώ κάθε φορά.



Σχήμα 7.1: Στο σχήμα βλέπουμε τη μέση τιμή της αμοιβής που πληρώνει ο II στον I όταν ο II χρησιμοποιεί μεικτή στρατηγική με πιθανότητες y_1 και $y_2 = 1 - y_1$. Η παχειά γραμμή είναι η $\max(y_1 - 1.5(1-y_1)\ ,\ -1.5y_1 + 2(1-y_1))$. Συνεπώς ο II διαλέγει y_1=το σημείο τομής και πληρώνει κατα μέσο όρο 1/24 ευρώ στον I.

7.4 Επίλυση με την βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού

Έστω ένας πίνακας A $m \times n$. Ο παίκτης I, ο οποίος διαλέγει γραμμές μεγιστοποιεί και έχει m επιλογές, ενώ ο παίκτης II ο οποίος διαλέγει στήλες ελαχιστοποιεί και έχει n επιλογές. Αν ο παικτης I διαλέξει την γραμμή i και ο II την στήλη j τότε ο II πληρώνει στον I το ποσό a_{ij} που δίνει ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

. Ας υποθέσουμε ότι ο II επιλέγει την τυχαιοποιημένη στρατηγική $(y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n)^T$ την οποία και ανακοινώνει στον I. Αν ο I επιλέξει την γραμμή i τότε το μέσο ποσό που θα εισπράξει από τον II είναι $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ij}y_j + \cdots + a_{in}y_n$. Δεδομένου ότι θέλει να μεγιστοποιήσει τα έσοδά του θα διαλέξει το i ανάλογα. Συνεπώς η αξία του παιχνιδιού είναι

$$v = \max_{i=1,2,\ldots,m} a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ij}y_j + \cdots + a_{in}y_n$$

Ο παίκτης II θα διαλέξει τις πιθανότητες y_j έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί το v. Συνεπώς η αξία του παιχνιδιού δίνεται από τη λύση του γραμμικού προγράμματος

$$\min v$$

υ.π.

$$\begin{aligned} y_1 + \cdots + y_j + \cdots y_n &= 1 \\ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \cdots + a_{1j}y_j \cdots + a_{1n}y_n &\leq v \\ \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 \cdots + a_{ij}y_j \cdots + a_{in}y_n &\leq v \\ \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 \cdots + a_{mj}y_j \cdots + a_{mn}y_n &\leq v \end{aligned}$$

$$y_j \geq 0, \ \ j = 1, 2, \ldots, n, \ \ v \text{ ελεύθερη.}$$

Το σύστημα αυτό γράφεται ισοδύναμα ως

$$
\begin{aligned}
&\min v\\
&\text{υ.π.}\\
&\begin{array}{rcl}
y_1 + \cdots + y_j + \cdots y_n &=& 1\\
v - a_{11}y_1 - a_{12}y_2 \cdots - a_{1j}y_j \cdots - a_{1n}y_n &\geq& 0\\
\\
v - a_{i1}y_1 - a_{i2}y_2 \cdots - a_{ij}y_j \cdots - a_{in}y_n &\geq& 0\\
\\
v - a_{m1}y_1 - a_{m2}y_2 \cdots - a_{mj}y_j \cdots - a_{mn}y_n &\geq& 0\\
\\
y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ \ v \text{ ελεύθερη.}
\end{array}
\end{aligned}
$$

Το δυϊκό γραμμικό πρόγραμμα είναι το

$$
\begin{aligned}
&\max u\\
&\text{υ.π.}\\
&\begin{array}{rcl}
x_1 + \cdots + x_i + \cdots x_m &=& 1\\
u - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots + a_{1j}x_i - \cdots - a_{1n}x_m &\leq& 0\\
\\
u - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots + a_{ij}x_i - \cdots - a_{in}x_m &\leq& 0\\
\\
u - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + a_{nj}x_i - \cdots + a_{nm}x_m &\leq& 0\\
\\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \ u \text{ ελεύθερη.}
\end{array}
\end{aligned}
$$

Η θεωρία της δυϊκότητας εξασφαλίζει ότι η βέλτιστη τιμή του v που προκύπτει από την λύση του πρωτεύοντος προβλήματος ισούται με την βέλτιστη τιμή που προκύπτει από τη λύση του δυϊκού. Αυτή είναι η αξία του παιγνίου.

7.5 Ασκήσεις

Πρόβλημα 1. Στο παίγνιο μηδενικού αθροίσματος με πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

ο παίκτης Ι διαλέγει γραμμές ενώ ο ΙΙ διαλέγει στήλες. Αν επιλεγεί η γραμμή i και η στήλη j τότε ο παίκτης ΙΙ θα δώσει στον Ι a_{ij} ευρώ. Συνεπώς ο Ι θέλει να μεγιστοποιήσει το ποσό που θα λάβει ενώ ο παίκτης ΙΙ θέλει να ελαστοποιήσει το ποσό που θα δώσει. Να βρείτε τις βέλτιστες στρατηγικές (καθαρές ή μεικτές), την αξία του παιγνίου, και να εξηγήσετε την σημασία τους.

Πρόβλημα 2. Για ποια διανύσματα b έχει το σύστημα

$$Ax = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$$

λύση $x \geq 0$;

Πρόβλημα 3. Βρείτε την εναλλακτική πρόταση (κατά Farkas) της εξής πρότασης: Το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

έχει λύση x με $x_1 \geq 0$, $x_3 \geq 0$. (*Υπόδειξη:* Θέστε $x_2 = u_2 - v_2$ με $u_2 \geq 0$, $v_2 \geq 0$.)

Πρόβλημα 4. Έστω $P = (P_{ij})$ $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$, στοχαστικός πίνακας $n \times n$, δηλαδή $P_{ij} \geq 0$ και $\sum_{j=1}^{n} P_{ij} = 1$ για κάθε i. Χρησιμοποιείστε το λήμμα του Farkas για να δείξετε ότι *δεν υπάρχει* $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{n} y_i P_{ij} \geq 0$ για κάθε j και $\sum_{i=1}^{n} y_i < 0$.

Πρόβλημα 5. Για το παίγνιο

$$\begin{array}{cc} & \text{παίκτης II} \\ & \text{minimizer} \\ \begin{array}{c}\text{παίκτης I} \\ \text{maximizer}\end{array} & \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \end{array}$$

να βρείτε τις βέλτιστες στρατηγικές για τους δύο παίκτες καθώς και την αξία του παιγνίου.

Κεφάλαιο 8

Παράρτημα: Συστήματα γραμμικών εξισώσεων

Γραμμικά συστήματα m εξισώσεων με n αγνώστους είναι συστήματα της μορφής

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \tag{8.1}$$

Αν

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}, \tag{8.2}$$

τότε η εξίσωση (8.1) γράφεται στην μορφή

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \tag{8.3}$$

Στην περίπτωση που $m = n$ δηλαδή ο πίνακας είναι τετραγωνικός ή ισοδύναμα έχουμε τον ίδιο αριθμό εξισώσεων και αγνώστων. Σ' αυτή την περίπτωση το σύστημα έχει μοναδική λύση υπό την προϋπόθεση ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος πράγμα που συμβαίνει αν και μόνο αν η ορίζουσα του πίνακα, $\det(A)$, είναι διάφορη του μηδενός.

Ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε γενικότερα γραμμικά συστήματα, όπου ο αριθμός των αγνώστων δεν είναι υποχρεωτικά ίσος με τον αριθμό των εξισώσεων. Θα ξεκινήσουμε με ένα ιδιαίτερ απλό παράδειγμα. Ας εξετάσουμε το σύστημα

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 10 \\ 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & = & 5 \end{array} \tag{8.4}$$

Το συγκεκριμένο σύστημα δεν έχει μοναδική λύση. Για να πεισθούμε, ας πολλαπλασιάσουμε την πρώτη εξίσωση με 3 και ας την αφαιρέσουμε από την δεύτερη. Τότε παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & 6x_3 & + & 5x_4 & = & 10 \\ & & 7x_2 & - & 14x_3 & - & 16x_4 & = & -25 \end{array} . \tag{8.5}$$

Αν τώρα πολλαπλασιάσουμε τη δεύτερη εξίσωση με 2/7 και την αφαιρέσουμε από την πρώτη (και στη συνέχεια διαιρέσουμε την δεύτερη εξίσωση με 7) παίρνουμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & & & + & 2x_3 & + & \frac{3}{7}x_4 & = & \frac{20}{7} \\ & & x_2 & - & 2x_3 & - & \frac{16}{7}x_4 & = & -\frac{25}{7} \end{array} . \tag{8.6}$$

Από την παραπάνω μορφή του συστήματος βλέπουμε ότι υπάρχουν άπειρες λύσεις που είναι της μορφής

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & \frac{20}{7} & -2x_3 & -\frac{3}{7}x_4 \\ x_2 & = & -\frac{25}{7} & +2x_3 & +\frac{16}{7}x_4 \end{array} \qquad x_3,\ x_4 \text{ αυθαίρετα.} \tag{8.7}$$

Στην λύση (8.7) οι μεταβλητές x_1, x_2, ονομάζονται *βασικές μεταβλητές* και οι x_3 και x_4 *μη βασικές*. Από τις άπειρες λύσεις της (8.7) ξεχωρίζουμε την *βασική λύση* (με βάση τις μεταβλητές x_1, x_2) που προκύπτει αν θέσουμε τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν. Η λύση αυτή είναι η $x_1^* = \frac{20}{7}$, $x_2^* = -\frac{25}{7}$, $x_3^* = 0$, $x_4^* = 0$.

Θα μπορούσαμε να είχαμε επιλύσει ως προς διαφορετικές μεταβλητές. Αν, για παράδειγμα, στο σύστημα (8.5) είχαμε διαιρέσει την δεύτερη εξίσωση με -14 και στην συνέχεια είχαμε αφαιρέσει -6 επί την δεύτερη εξίσωση από την πρώτη θα παίρναμε το σύστημα

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & & & - & \frac{13}{7}x_4 & = & -\frac{5}{7} \\ & - & \frac{1}{2}x_2 & + & x_3 & + & \frac{8}{7}x_4 & = & \frac{25}{14} \end{array} \tag{8.8}$$

από το οποίο προκύπτει η λύση

$$\begin{array}{rcrrr} x_1 & = & -\frac{5}{7} & -x_2 & +\frac{13}{7}x_4 \\ x_3 & = & \frac{25}{14} & +\frac{1}{2}x_2 & -\frac{8}{7}x_4 \end{array} \qquad x_2,\ x_4 \text{ αυθαίρετα.} \tag{8.9}$$

Στην παραπάνω λύση οι βασικές μεταβλητές είναι οι x_1 και x_3 ενώ μη βασικές είναι οι x_2 και x_4. Η αντίστοιχη *βασική λύση* είναι η $x_1^* = -\frac{5}{7}$, $x_2^* = 0$, $x_3^* = \frac{25}{14}$, $x_4^* = 0$.

Συνεπώς οι βασικές λύσεις (που προκύπτουν θέτοντας τις μη βασικές μεταβλητές ίσες με το μηδέν) διαφέρουν ανάλογα με την επιλογή της βάσεως. Ταυτόχρονα, είναι σημαντικό να συνειδητοποιήσουμε ότι οι εξισώσεις (8.7) και (8.9) δεν είναι διαφορετικές λύσεις αλλά *διαφορετικές περιγραφές του συνόλου των λύσεων* του γραμμικού συστήματος (8.4).

Ένας δεύτερος, ισοδύναμος τρόπος για να δει κανεις το γραμμικό σύστημα είναι ο ακόλουθος. Το σύστημα γράφεται σε μορφή πινάκων ως

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

ή, ισοδύναμα,

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}. \tag{8.10}$$

Ψάχνουμε δηλαδή να βρούμε πραγματικούς αριθμούς x_1, x_2, x_3, x_4 τέτοιους ώστε να εκφράσουμε το διάνυσμα $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$ σαν γραμμικό συνδιασμό των διανυσμάτων $\mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{a}_3 = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}$, και $\mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Βασικές λύσεις είναι εκείνες οι λύσεις στις οποίες διαλέγει κανείς δύο από τις τέσσερεις στήλες του πίνακα A και εκφράζει το $\mathbf{b}$ ως γραμμικό τους συνδιασμό. (Αυτό συμβαίνει γιατί στο συγκεκριμένο παράδειγμα το $\mathbf{b}$ είναι διδιάστατο διάνυσμα.) Για παράδειγμα μπορούμε να προσπαθήσουμε να εκφράσουμε το $\mathbf{b}$ ως γραμμικό συνδιασμό των δύο πρώτων στηλών. Αυτό βεβαίως ισοδυναμεί με το να θέσουμε $x_3 = x_4 = 0$ στην εξίσωση (8.10) και να επιλύσουμε το σύστημα που προκύπει ως προς x_1 και x_2. Με άλλα λόγια θέλουμε να επιλύσουμε το σύστημα

$$x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 5 \end{bmatrix}$$

η ισοδύναμα το

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &= 10 \\ 3x_1 + x_2 &= 5 \end{aligned}$$

Η λύση που παίρνουμε από αυτό το σύστημα είναι η $x_1 = \frac{20}{7}$, $x_2 = -\frac{25}{7}$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$ η οποία είναι βεβαίως η βασική λύση της (8.7).