Κεφάλαιο 4

Θεωρία Παιγνίων

4.1 Παίγνια μηδενικού αθροίσματος σε κανονική μορφή

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε παίγνια μηδενικού αθροίσματος σε κανονική μορφή (zero sum games in canonical form). Τα παίγνια αυτά μπορούν να περιγραφούν από ένα πίνακα που δίδει την αμοιβή που δίδει ο παίκτης II στον παίκτη I. Για παράδειγμα, στον ακόλουθο πίνακα

$$\begin{array}{cc} & \text{παίκτης II: Ελαχιστοποιεί} \\ \text{παίκτης I: Μεγιστοποιεί} & \begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.1}$$

ο παίκτης I επιλέγει γραμμή ενώ ο παίκτης II στήλη, και από τον συνδυασμό των δύο αποφάσεων προκύπτει η αμοιβή που θα πρέπει να πληρώσει ο II στον I (η οποία βεβαίως μπορεί να είναι και αρνητική). Στο παράδειγμα της (4.1) ο παίκτης I, αν παίξει πρώτος, θα πρέπει να επιλέξει την 2η γραμμή γιατί αυτή έχει το *μεγαλύτερο ελάχιστο.* Ο παίκτης II που παίζει δεύτερος αναγκαστικά θα επιλέξει τότε την δεύτερη στήλη και θα πληρώσει 2 μονάδες στον I. Οποιαδήποτε άλλη επιλογή από την πλευρά του I οδηγεί σε μικρότερη αμοιβή για τον I. Αντίστοιχα, αν ο παίκης II παίζει πρώτος, τότε θα πρέπει να επιλέξει την στήλη με το *μικρότερο μέγιστο*, δηλαδή την στήλη 2. Τότε ο παίκτης I που παίζει δεύτερος θα πρέπει αναγκαστικά να επιλέξει την γραμμή 2 και θα πάρει αμοιβή και πάλι 2 μονάδες. Στην περίπτωση αυτή δεν έχει σημασία ποιός από τους δύο παίκτες παίζει πρώτος. Υπάρχουν όμως άλλα παίγνια στα οποία το ποιός παίζει πρώτος (δηλαδή *η πληροφορία που μπορεί να έχει ένας παίκτης για τις αποφάσεις του άλλου*) έχει σημασία. Για παράδειγμα, στην περίπτωση του παιγνίου με τον ακόλουθο πίνακα

$$\begin{array}{cc} & \text{παίκτης II: Ελαχιστοποιεί} \\ \text{παίκτης I: Μεγιστοποιεί} & \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 4 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \tag{4.2}$$

όταν ο παίκτης I παίζει πρώτος τότε θα επιλέξει την γραμμή 2 η οποία έχει το μεγαλύτερο ελάχιστο που είναι ίσο με 1. Ο παίκτης II διαλέγει τότε την στήλη 3 και δίνει αμοιβή 1 στον I. Όταν ο παίκτης II παίζει πρώτος τότε θα επιλέξει την στήλη με το μικρότερο μέγιστο, δηλαδή την στήλη 2, οπότε ο I διαλέγει την γραμμή 2 και παίρνει 3 μονάδες από τον II.

Λήμμα 4. *Αν X, Y, δύο σύνολα και $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ τότε*

$$\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \le \inf_{y\in Y} \sup_{x\in X} f(x,y).$$

Απόδειξη Ισχύει ότι $\inf_{y\in Y} f(x,y) \le f(x,y)$ για κάθε $(x,y) \in X \times Y$. Συνεπώς, παίρνωντας supremum ως προς $x \in X$, $\sup_{x\in X} \inf_{y\in Y} f(x,y) \le \sup_{x\in X} f(x,y)$ για όλα τα $y \in Y$. Παίρνοντας τώρα το infimum ως προς $y \in Y$ στην τελευταία σχέση συμπληρώνει την απόδειξη. ∎

Ορισμός 3. *Αν ένας πίνακας $A = (a_{ij})$ ικανοποιεί την $\max_i \min_j a_{ij} = \min_i \max_j a_{ij}$ τότε θα λέμε ότι έχει σαγματικό σημείο. Αν αντιθέτως $\max_i \min_j a_{ij} < \min_i \max_j a_{ij}$ τότε ο πίνακας δεν έχει σαγματικό σημείο.*

Από την παραπάνω συζήτηση είναι σαφές ότι, αν ο πίνακας του παιγνίου έχει σαγματικό σημείο τότε οποιαδήποτε πληροφορία έχει ένας παίκτης για την απόφαση του άλλου δεν επηρεάζει την δική του στρατηγική. Σ' αυτή την περίπτωση το παίγνιο έχει λύση με *καθαρές στρατηγικές*. Αν ο πίνακας δεν έχει σαγματικό σημείο τότε η πληροφορία που μπορεί να έχει ο ένας παίκτης για την στρατηγική του άλλου επηρεάζει και την δική του στρατηγική. Το παίγνιο δεν έχει λύση με *καθαρές στρατηγικές*.

4.2 Μεικτές στρατηγικές και το θεμελιώδες θεώρημα

Μια μεικτή στρατηγική (ή τυχαιοποιημένη στρατηγική) είναι μια κατανομή πιθανότητας πάνω στο σύνολο των στρατηγικών ενός παίκτη. Ο παίκτης δηλαδή αποφασίζει όχι ποια στρατηγική θα επιλέξει αλλά ποια κατανομή στο χώρο των στρατηγικών θα επιλέξει. Ο λόγος για τον οποίο ένας παίκτης θα μπορούσε να αποφασίσει να επιλέξει μια μεικτή στρατηγική είναι επειδή αναγκάζεται να παίξει πρώτος. Για παράδειγμα, στον πίνακα (4.2) ο οποίος δεν έχει σαγματικό σημείο όταν ο I παίζει πρώτος κερδίζει 1 μονάδα ενώ όταν παίζει δεύτερος 3 μονάδες. Αν ο παίκτης I δηλώσει ότι θα επιλέξει τις τρεις δυνατές ενέργειές του με αντίστοιχες πιθανότητες x_1, x_2, x_3, τότε ο παίκτης II αναγκάζεται να επιλέξει έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει την μέση αμοιβή που θα δώσει στον I δηλαδή καλείται να επιλέξει το ελάχιστο ανάμεσα στα

$$(-3x_1 + 2x_2 + 4x_3\,,\ -2x_1 + 3x_2\,,\ 4x_1 + x_2 - 2x_3)\,.$$

Για παράδειγμα, αν $x_1 = 1/10$, $x_2 = 9/10$, $x_3 = 0$ τότε ο II έχει να επιλέξει το ελάχιστο ανάμεσα στα $(1.5, 2.5, 1.3)$, συνεπώς επιλέγει την τρίτη στήλη, και δίνει αμοιβή 1.3 στον I. Άρα, όταν ο παίκτης I «παίζει πρώτος», όταν δηλαδή έχει λόγους να πιστεύει ότι ο II γνωρίζει την στρατηγική του θα προτιμήσει μια μεικτή (τυχαιοποιημένη) στρατηγική ώστε να αυξήσει τα έσοδά του. Το ίδιο βέβαια ισχύει και για τον παίκτη II που μπορεί να έχει επίσης κίνητρο να υιοθετήσει μια μεικτή στρατηγική.

Σε ένα γενικό παίγνιο που περιγράφεται από ένα πίνακα $m \times n$, $A = (a_{ij})$, αν ο παίκτης I υιοθετήσει την μεικτή στρατηγική x_i, $i = 1, \dots, m$ και ο II την y_j, $j = 1, \dots, n$ τότε η μέση τιμή της αμοιβής του II προς τον I είναι $x^T A y = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} y_j$.

Όπως είδαμε $\max_i \min_j a_{ij} \leq \min_j \max_i a_{ij}$ με ισότητα όταν ο πίνακας έχει σαγματικό σημείο. Ο χώρος όλων των μεικτών στρατηγικών του I είναι το simplex $X := \{(x_1, \dots, x_m) : x_i \geq 0,\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1\}$. Παρόμοια ο χώρος των μεικτών στρατηγικών του II είναι ο $Y := \{(y_1, \dots, y_n) : x_i \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1\}$.

Θεώρημα 21 (Von Neumann). *Κάθε παίγνιο της ανωτέρω μορφής έχει λύση με μεικτές στρατηγικές, δηλαδή*

$$\max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y. \tag{4.3}$$

Απόδειξη Θέτουμε $v_I = \max_{x \in X} \min_{y \in Y} x^T A y$ και $v_{II} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y$ με σκοπό να δείξουμε ότι $v_I = v_{II}$. Από το λήμμα 4 ισχύει ότι $v_I \leq v_{II}$, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι η σχέση αυτή ικανοποιείται με ισότητα.

Έστω $A = [a_1 \mid a_2 \mid \cdots \mid a_n]$ οι στήλες του πίνακα A. Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρησιμοποιήσουμε την δεύτερη διατύπωση του Λήμματος του Farkas. Αν το 0 ανήκει στην κυρτή θήκη των σημείων $a_1, \dots, a_n, e_1, \dots, e_m$ στον $\mathbb{R}^m$ τότε υπάρχουν πραγματικοί $s_j \geq 0$, $j = 1, 2, \dots, m + n$, τέτοιοι ώστε

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} s_j + s_{n+i} = 0,\ i = 1, 2, \dots, m,$$
$$\sum_{j=1}^{m+n} s_j = 1.$$

Αλλά δεν είναι δυνατόν να έχουμε $s_j = 0$ για κάθε $j = 1, \dots, n$ γιατί τότε τα μοναδιαία διανύσματα e_i θα ήταν γραμμικά εξαρτημένα. Συνεπώς $\sum_{j=1}^{n} s_j > 0$ και μπορούμε να ορίσουμε τις ποσότητες

$$y_j := \frac{s_j}{\sum_{j=1}^{n} s_j} \geq 0$$

για τις οποίες ισχύει ότι $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$. Συνεπώς, από τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = -\frac{s_{n+i}}{\sum_{j=1}^{n} s_j} \leq 0 \qquad \forall i.$$

Άρα, για την συγκεκριμμένη επιλογή των y_j από τον παίκτη II, $x^T A y \leq 0$ για οποιαδήποτε επιλογή των x_i από τον I, συνεπώς $\max_{x \in X} x^T A y \leq 0$ για το συγκεκριμένο $y \in Y$ και $v_{II} = \min_{y \in Y} \max_{x \in X} x^T A y \leq 0$ κατά μείζονα λόγο. Άρα έχουμε

$$v_I \leq v_{II} \leq 0. \tag{4.4}$$

Έστω τώρα ότι η πρώτη περίπτωση του λήμματος του Farkas δεν ισχύει. Τότε θα ισχύει υποχρεωτικά η δεύτερη. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει $x = (x_1, \ldots, x_m)$ τέτοιο ώστε $x_i > 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$, $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$, και $\sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij} > 0$ για $j = 1, \ldots, n$. Συνεπώς για το συγκεκριμένο x έχουμε $x^T A y > 0$ για κάθε y και επομένως, επαναλαμβάνοντας τον προηγούμενο συλλογισμό έχουμε $v_I > 0$ και

$$0 < v_I \leq v_{II}. \tag{4.5}$$

Εφόσον υποχρεωτικά πρέπει να ισχύει είτε η (4.4) είτε η (4.5) συμπεραίνουμε ότι είναι αδύνατον να ισχύει η $v_I \leq 0 < v_{II}$.

Έστω τώρα το παίγνιο που αντιστοιχεί στον πίνακα $B := (b_{ij})$ όπου $b_{ij} = a_{ij} + k \ \forall i, j$. Προφανώς $x^T B y = x^T A y + k$ για κάθε x, y και συνεπώς $v_I(B) = v_I(A) + k$, $v_{II}(B) = v_{II}(A) + k$. Αφού $v_I(B) \leq 0 < v_{II}(B)$ είναι αδύνατον, $v_I(B) \leq -k < v_{II}(B)$ είναι αδύνατον για κάθε $k \in \mathbb{R}$ που συνεπάγεται ότι $v_I < v_{II}$ είναι αδύνατον. Άρα, αναγκαστικά, $v_I = v_{II}$. ∎

4.3 Γραφικός υπολογισμός της τιμής

Για να κατανοήσουμε καλύτερα μερικές από τις έννοιες εξετάζουμε περιπτώσεις που ο ένας τουλάχιστον από τους δύο παίκτες έχει μόνο δύο επιλογές. Σ' αυτή την περίπτωση είναι δυνατό να επιλύσουμε γραφικά το παίγνιο. Θα εξετάσουμε το εξής παράδειγμα. Ο παίκτης II κρύβει στο χέρι του ένα νόμισμα είτε του *ενός* είτε των *δύο* ευρώ. Ο παίκτης I μαντεύει τι νόμισμα έχει κρύψει ο II και αν το πετύχει παίρνει το νόμισμα αλλιώς πληρώνει στον I 1.5 ευρώ. Το παιχνίδι παίζεται πολλές φορές. Ποιά είναι η βέλτιστη στρατηγική κάθε παίκτη και ποιά είναι η αξία του παιχνιδιού;

Ο πίνακας του παιγνίου (που δείχνει τα ποσά που πληρώνει ο II στον I) είναι

$$\begin{array}{cc} & \text{παίκτης II} \\ \text{παίκτης I} & \begin{bmatrix} 1 & -1.5 \\ -1.5 & 2 \end{bmatrix} \end{array}$$

Είναι σαφές ότι ο πίνακας του παιγνίου αυτού δεν έχει σαγματικό σημείο. Αν ο παίκτης I δηλώσει πρώτος τι πιστεύει ότι είναι το νόμισμα και ο παίκτης II μπορεί να κρύψει το νόμισμα μετά την δήλωση τότε ασφαλώς θα διαλέξει το αντίθετο και θα κερδίσει από τον παίκτη I 1.5 ευρώ. Αν ο παίκτης II δηλώσει πρώτος τι νόμισμα έχει κρύψει τότε ο I θα το πάρει. Ο II το γνωρίζει και γιάυτό θα κρύψει ένα ευρώ.

Ας πούμε λοιπόν ότι ο II χρησιμοποιήσει μεικτές στρατηγικές. Δηλώνει ότι θα κρύψει 1 ευρώ με πιθανότητα y_1 και 2 ευρώ με πιθανότητα $y_2 = 1 - y_1$. (Ακόμη και αν δεν το δηλώσει, αφού το παιχνίδι παίζεται συνέχεια ο I θα το καταλάβει αν συλλέξει στατιστικά στοιχεία.) Αν ο I μαντέψει 1 ευρώ τότε η μέση τιμή της αμοιβής που θα πάρει από τον II είναι $y_1 - 1.5(1 - y_1)$. Αν ο I μαντέψει 2 ευρώ τότε η μέση αμοιβή που θα πάρει από τον II είναι $-1.5y_1 + 2(1 - y_1)$. Ο παίκτης I δεν ξέρει τι νόμισμα έχει κρύψει ο II, μπορεί όμως να εκτιμήσει την πιθανότητα y_1 συνεπώς θα πεί

$$\begin{array}{ll} 1 \text{ ευρώ} & \text{αν } y_1 - 1.5(1 - y_1) > -1.5y_1 + 2(1 - y_1) \\ 2 \text{ ευρώ} & \text{αν } y_1 - 1.5(1 - y_1) \leq -1.5y_1 + 2(1 - y_1) \end{array}$$

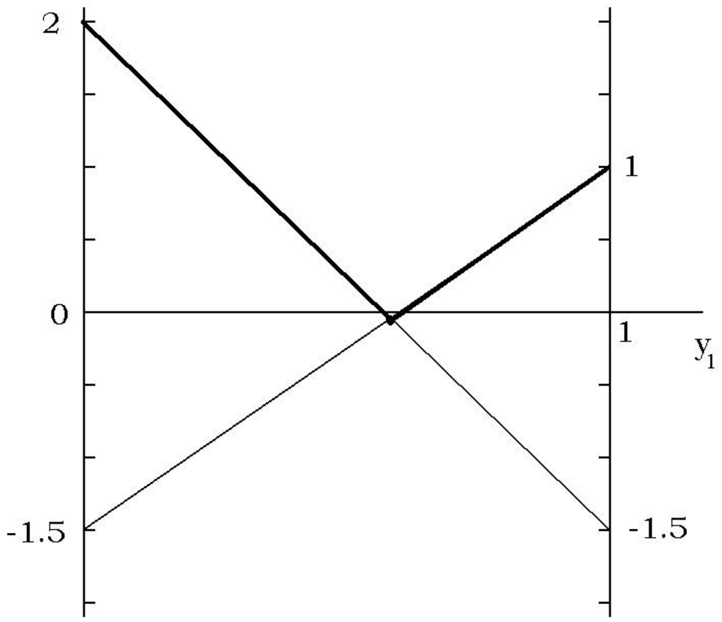
και η μέση αμοιβή που θα πάρει θα είναι

$$\max(y_1 - 1.5(1 - y_1)\ ,\ -1.5y_1 + 2(1 - y_1)) \tag{4.6}$$

Αυτό το γνωρίζει ο II (που ελαχιστοποιεί) συνεπώς θα επιλέξει το y_1 έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσει την (4.6). Η μέση τιμή της αμοιβής που πληρώνει είναι

$$\min_{0 \leq y_1 \leq 1} \max(y_1 - 1.5(1 - y_1)\ ,\ -1.5y_1 + 2(1 - y_1)).$$

Επομένως ο II διαλέγει το y_1 έτσι ώστε $y_1 - 1.5(1 - y_1) = -1.5y_1 + 2(1 - y_1)$ ή $y_1 = \frac{7}{12}$ και η αξία του παιγνίου είναι $2 - 3.5y_1 = -1/24$. Αυτό σημαίνει ότι ο II πληρώνει κατά μέσο όρο στον I $-1/24$ ευρώ. Συνεπώς το παιχνίδι είναι επικερδές για τον II αν παίζεται βέλτιστα και του αποφέρει μέσο κέρδος $1/24$ ευρώ κάθε φορά.



Σχήμα 4.1: Στο σχήμα βλέπουμε τη μέση τιμή της αμοιβής που πληρώνει ο ΙΙ στον Ι όταν ο ΙΙ χρησιμοποιεί μεικτή στρατηγική με πιθανότητες y_1 και $y_2 = 1 - y_1$. Η παχειά γραμμή είναι η $\max(y_1 - 1.5(1 - y_1)\ ,\ -1.5y_1 + 2(1 - y_1))$. Συνεπώς ο ΙΙ διαλέγει y_1=το σημείο τομής και πληρώνει κατα μέσο όρο 1/24 ευρώ στον Ι.

4.4 Επίλυση με την βοήθεια του γραμμικού προγραμματισμού

Έστω ένας πίνακας A $m \times n$. Ο παίκτης I, ο οποίος διαλέγει γραμμές μεγιστοποιεί και έχει m επιλογές, ενώ ο παίκτης II ο οποίος διαλέγει στήλες ελαχιστοποιεί και έχει n επιλογές. Αν ο παικτης I διαλέξει την γραμμή i και ο II την στήλη j τότε ο II πληρώνει στον I το ποσό a_{ij} που δίνει ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ & & & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ & & & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

. Ας υποθέσουμε ότι ο II επιλέγει την τυχαιοποιημένη στρατηγική $(y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_n)^T$ την οποία και ανακοινώνει στον I. Αν ο I επιλέξει την γραμμή i τότε το μέσο ποσό που θα εισπράξει από τον II είναι $a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ij}y_j + \cdots + a_{in}y_n$. Δεδομένου ότι θέλει να μεγιστοποιήσει τα έσοδά του θα διαλέξει το i ανάλογα. Συνεπώς η αξία του παιχνιδιού είναι

$$v = \max_{i=1,2,\ldots,m} a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{ij}y_j + \cdots + a_{in}y_n$$

Ο παίκτης II θα διαλέξει τις πιθανότητες y_j έτσι ώστε να ελαχιστοποιεί το v. Συνεπώς η αξία του παιχνιδιού δίνεται από τη λύση του γραμμικού προγράμματος

$$\min v$$

υ.π.

$$\begin{aligned} y_1 + \cdots + y_j + \cdots y_n &= 1 \\ a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \cdots + a_{1j}y_j \cdots + a_{1n}y_n &\leq v \\ \\ a_{i1}y_1 + a_{i2}y_2 \cdots + a_{ij}y_j \cdots + a_{in}y_n &\leq v \\ \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 \cdots + a_{mj}y_j \cdots + a_{mn}y_n &\leq v \end{aligned}$$

$$y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ \ v \text{ ελεύθερη.}$$

Το σύστημα αυτό γράφεται ισοδύναμα ως

$$
\begin{aligned}
&\min v \\
&\text{υ.π.} \\
y_1 + \cdots + y_j + \cdots y_n &= 1 \\
v - a_{11}y_1 - a_{12}y_2 \cdots - a_{1j}y_j \cdots - a_{1n}y_n &\geq 0 \\
v - a_{i1}y_1 - a_{i2}y_2 \cdots - a_{ij}y_j \cdots - a_{in}y_n &\geq 0 \\
v - a_{m1}y_1 - a_{m2}y_2 \cdots - a_{mj}y_j \cdots - a_{mn}y_n &\geq 0 \\
y_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, n,\ \ v \text{ ελεύθερη.}
\end{aligned}
$$

Το δυϊκό γραμμικό πρόγραμμα είναι το

$$
\begin{aligned}
&\max u \\
&\text{υ.π.} \\
x_1 + \cdots + x_i + \cdots x_m &= 1 \\
u - a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \cdots + a_{1j}x_i - \cdots - a_{1n}x_m &\leq 0 \\
u - a_{i1}x_1 - a_{i2}x_2 - \cdots + a_{ij}x_i - \cdots - a_{in}x_m &\leq 0 \\
u - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \cdots + a_{nj}x_i - \cdots + a_{nm}x_m &\leq 0 \\
x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \ u \text{ ελεύθερη.}
\end{aligned}
$$

Η θεωρία της δυϊκότητας εξασφαλίζει ότι η βέλτιστη τιμή του v που προκύπτει από την λύση του πρωτεύοντος προβλήματος ισούται με την βέλτιστη τιμή που προκύπτει από τη λύση του δυϊκού. Αυτή είναι η αξία του παιγνίου.