

*Πρόβλημα 1.* Έστω ένα σύστημα με απεριόριστο χώρο αναμονής και έναν υπηρέτη, ο οποίος εξυπηρετεί πελάτες με εκθετικό χρόνο εξυπηρέτησης με ρυθμό  $\mu$ . Οι πελάτες φθάνουν στο σύστημα σύμφωνα με μια διαδικασία Poisson με ρυθμό  $\lambda$ . Όταν ένας πελάτης φθάνει στο σύστημα και βρίσκει  $n$  πελάτες παρόντες μπαίνει στην ουρά αναμονής με πιθανότητα  $\frac{1}{1+n}$ . (Παρατηρείστε ότι αν  $n = 0$  αυτό σημαίνει ότι ο πελάτης μπαίνει στο σύστημα με πιθανότητα 1 και, βέβαια, εξυπηρετείται αμέσως, χωρίς αναμονή.) Με πιθανότητα  $\frac{n}{n+1}$  ο πελάτης φεύγει αμέσως χωρίς να μπει στο σύστημα και χωρίς να εξυπηρετηθεί. Αυτό είναι ένα σύστημα  $M/M/1$  με αποθάρρυνση των πελατών.

- 1) Να βρείτε τον γεννήτορα της μαρκοβιανής διαδικασίας που περιγράφει τον αριθμό πελατών στο σύστημα.
- 2) Είναι η διαδικασία χρονικά αντιστρέψιμη;
- 3) Να βρείτε την στάσιμη κατανομή.
- 4) Να βρείτε τον μέσο αριθμό πελατών στο σύστημα.
- 5) Να βρείτε το ποσοστό των πελατών οι οποίοι αποχωρούν χωρίς να εξυπηρετηθούν.

*Πρόβλημα 2.* Έστω μια διαδικασία Markov  $\{X_t; t \geq 0\}$  με τρεις καταστάσεις, 0, 1 και 2, και γεννήτορα

$$Q = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

- 1) Υπολογίστε τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης  $P(t) = e^{Qt} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} Q^n$ ,  $t \geq 0$  χρησιμοποιώντας τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του  $Q$ .
- 2) Με βάση τον πίνακα πιθανοτήτων μετάβασης, αν  $T$  είναι μια τυχαία μεταβλητή εκθετικά κατανομημένη με ρυθμό  $\lambda$ , ανεξάρτητη από την διαδικασία Markov  $\{X_t; t \geq 0\}$ , να υπολογίσετε την πιθανότητα  $\mathbb{P}(X_T = 1 | X_0 = 0)$ .

*Πρόβλημα 3.* Έστω  $M$  μηχανές, κάθε μια από τις οποίες λειτουργεί για ένα εκθετικό χρόνο με ρυθμό  $\lambda$ , ανεξάρτητα από τις άλλες, έως ότου να υποστεί βλάβη. Όταν υφίσταται βλάβη, επιδιορθώνεται από έναν επιστάτη. Υπάρχουν δυο επιστάτες και ο καθένας χρειάζεται έναν εκθετικό χρόνο με ρυθμό  $\mu$ . Μια μηχανή μπορεί να επισκευαστεί μόνο από έναν επιστάτη (και επομένως όταν μια μόνο μηχανή έχει βλάβη, ο ένας από τους δυο επιστάτες δεν απασχολείται.) Όταν περισσότερες από δυο μηχανές έχουν βλάβη, δυο επισκευάζονται και οι υπόλοιπες περιμένουν να επισκευασθούν.

- 1) Να περιγράψετε το σύστημα αυτό ως μια μαρκοβιανή διαδικασία και να βρείτε τον γεννήτορά της.
- 2) Ποια είναι η στάσιμη κατανομή;

