

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

1. Σε ένα στρατόπεδο εκπαιδεύσεως, γίνεται ένα πείραμα για να διαπιστωθεί αν ο χρόνος που απαιτείται για να διεκπεραιωθεί μια συγκεκριμένη σωματική άσκηση επηρεάζεται από μια ειδική δίαιτα που ακολούθουν οι στρατιώτες για ένα χρονικό διάστημα πριν από την προσπάθεια. Για μια μεγάλη χρονική περίοδο, βρέθηκε ότι ο χρόνος που απαιτείται για την συγκεκριμένη άσκηση, κατανέμεται κανονικά με μέσο 50 δευτερόλεπτα και διακύμανση 100 δευτερόλεπτα². Ένα δείγμα 20 στρατιωτών ακολουθεί την ειδική αυτή δίαιτα για μια εβδομάδα μετά από την οποία υπολογίζεται ότι ο μέσος χρόνος που απαιτήθηκε ήταν 46 δευτερόλεπτα. Χρησιμοποιήστε ένα 5% επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας για να ελέγξετε αν η ειδική αυτή δίαιτα επέφερε στατιστικά σημαντική διαφορά στην επίδοση των στρατιωτών.

2. Σε ένα διαγώνισμα, στο οποίο πήρε μέρος ένας μεγάλος αριθμός μαθητών, η μέση βαθμολογία ήταν 64,5 (με άριστα το 100) με τυπική απόκλιση 8. Ένα δείγμα 200 μαθητών που έφτασαν καθυστερημένα από το “έξωτερικό”, έδωσε μια μέση βαθμολογία 65,5. Είναι η μέση αυτή βαθμολογία στατιστικά σημαντικά μεγαλύτερη από 64,5 σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$; (Υποθέστε κανονικότητα).

3. Σε ένα ψυχολογικό πείραμα, ένας μεγάλος αριθμός σπουδαστών εξετάστηκε σε ένα test μνήμης. Τα αποτελέσματα κατανέμονταν κανονικά με μέση τιμή 100 και τυπική απόκλιση 12. Έστω ότι ένα δείγμα 30 από αυτούς τους σπουδαστές, έδωσε τα παρακάτω αποτελέσματα:

Score	101	102	103	104	105	106	107
Συχνότητα	2	4	6	8	5	3	2

Με βάση τα δεδομένα αυτά, ελέγξτε αν η μέση τιμή του πληθυσμού θα μπορούσε να θεωρηθεί στατιστικά σημαντικά διαφορετική από την τιμή 100 σε $\alpha = 5\%$.

4. Δύο μηχανές έχουν σχεδιασθεί έτσι ώστε να κόβουν σωλήνες συγκεκριμένου μήκους. Η μία μηχανή δουλεύει με τυπική απόκλιση 0,01 cm και η άλλη με τυπική απόκλιση 0,013cm. Ένα δείγμα 10 σωλήνων από την πρώτη μηχανή δίνει ένα μέσο μήκος 8,250cm και ένα δείγμα 12 σωλήνων από την δεύτερη μηχανή δίνει ένα μέσο μήκος 8,244 cm. Αποτελεί αυτό σημαντική μαρτυρία (απόδειξη) ότι οι δύο μηχανές παράγουν σωλήνες διαφορετικού μήκους;

5. Δύο ομάδες από κοτόπουλα παραγωγής αυγών επελέγησαν τυχαία από δύο ορνιθοτροφεία Α και Β. Η παραγωγή αυγών που παρατηρήθηκε σε μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο συνοψίζεται στον πίνακα που ακολουθεί.

Ομάδα	Αριθμός κοτόπουλων	Μέσος αριθμός αυγών ανά κοτόπουλο
A	40	46
B	50	55

Η τυπική απόκλιση ολόκληρου του πληθυσμού είναι γνωστή και ίση με 20. Μπορεί να υποστηριχθεί σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=5\%$ ότι ο μέσος αριθμός παραγωγής αυγών από τα κοτόπουλα του ορνιθοτροφείου Α είναι μικρότερος από τον αντίστοιχο του ορνιθοτροφείου Β; (Υποθέστε κανονικότητα).

6. Ελατήρια παράγονται από δύο μηχανές. Τα μήκη των ελατηρίων που παράγονται από κάθε μια από τις μηχανές αυτές κατανέμονται κανονικά. Σε κάθε περίπτωση, το μέσο μήκος υποτίθεται ότι είναι 20 cm. Ωστόσο τα μήκη των ελατηρίων που παράγονται από την πρώτη μηχανή έχουν διακύμανση 0.08cm^2 , ενώ από την δεύτερη μηχανή έχουν διακύμανση 0.05cm^2 . Τυχαία δείγματα 6 ελατηρίων από την πρώτη μηχανή και 7 ελατηρίων από τη δεύτερη, έδωσαν τα παρακάτω μήκη (σε εκατοστά):

Πρώτη μηχανή	19.5	20.1	20.0	19.7	19.9	19.4	
Δεύτερη μηχανή	20.2	19.6	20.1	20.3	20.1	20.2	20.1

Να ελεγχθεί σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 1% αν τα μέσα μήκη των ελατηρίων, που παράγονται από τις δύο μηχανές, διαφέρουν στατιστικά σημαντικά.

7. Σε μια πόλη της Αγγλίας, ένα τυχαίο δείγμα από 225 δωδεκάχρονα αγόρια και 250 δωδεκάχρονα κορίτσια, έδωσαν ένα τεστ στα μαθηματικά. Ο μέσος βαθμός για τα αγόρια ήταν 57 με μέση απόκλιση 12, ενώ ο μέσος βαθμός για τα κορίτσια ήταν 60 με τυπική απόκλιση 15. Υποθέτοντας ότι οι κατανομές των βαθμών είναι κανονικές, αποτελούν τα δεδομένα των δειγμάτων σημαντική ένδειξη ότι τα δωδεκάχρονα κορίτσια είναι ανώτερα στα μαθηματικά από τα δωδεκάχρονα αγόρια στην συγκεκριμένη Αγγλική πόλη;

8. (α). Ένας συγκεκριμένος τύπος μπαταρίας για μικροϋπολογιστές, λέγεται ότι έχει διάρκεια ζωής 2000 ώρες. Ένα δείγμα από 200 από αυτές τις μπαταρίες έδειξε μέση διάρκεια ζωής 1995 ωρών με τυπική απόκλιση 25.5 ωρών. Χρησιμοποιώντας αυτά τα δεδομένα, ελέγξτε αν η μέση διάρκεια ζωής στον πληθυσμό είναι 2000 ώρες έναντι της εναλλακτικής ότι είναι μικρότερη από 2.000 ώρες, σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha=1\%$.

(β). Δύο τύποι μπαταριών ελέγχονται ως προς την διάρκεια ζωής τους. Τα αποτελέσματα περιέχονται στον παρακάτω πίνακα:

Τύπος Μπαταρίας	Αριθμός που ελέγχθηκε	Μέσος Δείγματος	Δειγματική τυπική απόκλιση
A	200	1995	25.5
B	150	2000	32.8

Να ελεγχθεί αν οι πληθυσμοί από τους οποίους προήλθαν τα δείγματα έχουν ίσες μέσες τιμές σε επίπεδο σημαντικότητας $\alpha = 1\%$.

9. Ο παρακάτω πίνακας δίνει την κατανομή 175 ανδρών, ανάλογα με τον αριθμό των ετών του εγγάμου βίου τους.

Έτη εγγάμου βίου (κεντρικός όρος)	Συχνότητα
17.5	28
22.5	68
27.5	43
32.5	18
37.5	9
42.5	4
47.5	2
52.5	1
57.5	0
62.5	2

Υπολογίστε την μέση τιμή και την τυπική απόκλιση της παραπάνω κατανομής. Αν θεωρηθεί ότι η κατανομή αυτή αποτελεί κατανομή συχνότητας ενός τυχαίου δείγματος από ένα ευρύτερο κανονικό πληθυσμό, να κατασκευασθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή του πληθυσμού αυτού.

10. Η μέση απόκλιση τετραγώνου των βαρών όλων των ανδρών ηλικίας 23 ετών μιας συγκεκριμένης πόλης, είναι 10kg. Ένα τυχαίο δείγμα 100 ανδρών 23 ετών που επιλέγεται από αυτή την πόλη, δίνει μέσο βάρος 73,6kg. Να κατασκευασθεί ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο βάρος όλων των ανδρών 23 ετών αυτής της πόλης.

11. Ένα μεγάλο βιομηχανικό συγκρότημα αποτελείται από δύο εργοστάσια Α και Β. Στο εργοστάσιο Α, ένα δείγμα 100 εργατών έδωσε ένα μέσο χρόνο 30 λεπτών για την ολοκλήρωση μιας συγκεκριμένης εργασίας με διακύμανση 9 λεπτά² (όχι αμερόληπτη εκτιμήτρια). Για την ίδια εργασία στο εργοστάσιο Β, ένα δείγμα 120 εργατών έδωσε ένα μέσο χρόνο 27 λεπτών με διακύμανση 4 λεπτά² (όχι αμερόληπτη εκτιμήτρια). Να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά μεταξύ των μέσων χρόνων στους δύο πληθυσμούς. (Η κατανομή του χρόνου των εργατών που απαιτείται για την διεκπεραίωση της συγκεκριμένης εργασίας υποτίθεται ότι είναι κανονική και στα δύο εργοστάσια).

12. Η κατανομή των μετρήσεων του πάχους των νημάτων που παράγονται σε ένα εργοστάσιο υφαντουργίας, την οποία έδειξε ένα τυχαίο δείγμα, φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Πάχος νήματος Κεντρικός όρος (σε εκατομμυριοστά του μέτρου)	Συχνότητα
72,5	6
77,5	18
82,5	32
87,5	57
92,5	102
97,5	51
102,5	25
107,5	9

Χρησιμοποιήστε τα παραπάνω δεδομένα για να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή του πληθυσμού.

13. Δείγμα 8 μετρήσεων έδωσε ένα μέσο αριθμητικό 86375. Επίσης άλλο δείγμα 8 μετρήσεων έδωσε ένα μέσο αριθμητικό 79838. Υποθέτοντας ότι όλες οι μετρήσεις προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς με μέση απόκλιση τετραγώνου 4000, να εκτιμήσετε με πιθανότητα 90% την μικρότερη και μεγαλύτερη διαφορά μεταξύ των μέσων των δύο πληθυσμών. (Υποθέστε ανεξαρτησία των τυχαίων δειγμάτων).

14. 50 κορίτσια και 75 αγόρια εξετάσθηκαν σε ένα τεστ Χημείας. Τα κορίτσια πήραν μέσο βαθμό 76 (με άριστα το 100), ενώ τα αγόρια πήραν βαθμό 82. Να κατασκευάσετε ένα 96% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά μεταξύ των μέσων βαθμών των πληθυσμών αγοριών και κοριτσιών αν είναι γνωστό ότι η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας του πληθυσμού των κοριτσιών είναι 6, ενώ η τυπική απόκλιση της βαθμολογίας του πληθυσμού των αγοριών είναι 8.

15. Ο ιδιοκτήτης ενός εργοστασίου κατασκευής σπέρτων ισχυρίζεται ότι, κατά μέσο όρο, υπάρχουν 50 σπέρτα σε κάθε ένα από τα κουτιά που κατασκευάζει. Ένας πελάτης αγοράζει 8 κουτιά και μετρά τον αριθμό, x , των σπέρτων σε κάθε κουτί. Βρίσκει ότι $\sum x = 384$ και $\sum x^2 = 18460$. Υποθέτοντας ότι τα κουτιά αυτά αποτελούν ένα τυχαίο δείγμα από την παραγωγή αυτού του εργοστασίου, να ελεγχθεί, σε επίπεδο στατιστικής σημαντικότητας 2.5%, αν η μέση τιμή του πληθυσμού είναι στατιστικά σημαντικά μικρότερη από το 50. (Υποθέστε κανονικότητα).

16. Είναι γνωστό, ότι το μήκος ενός συγκεκριμένου είδους σαύρας, κατανέμεται κανονικά με μέση τιμή 17.3 cm. Όταν ένα δείγμα 21 σαυρών εξετάζεται, το μέσο μήκος τους βρίσκεται να είναι 16.5 cm με διασπορά 5.6 cm^2 (αμερόληπτη εκτιμήτρια). Σε επίπεδο σημαντικότητας 1%, ελέγξτε αν το μέσο μήκος του πληθυσμού των σαυρών είναι πράγματι 17.3cm.

17. Ένα τυχαίο δείγμα λαμβάνεται από ένα κανονικό πληθυσμό με άγνωστη μέση τιμή και άγνωστη διασπορά. Από τις τιμές του δείγματος $X_1, X_2, X_3, \dots, X_{16}$ προκύπτει ότι $\sum X_i = 454$ και $\sum X_i^2 = 13026$. Να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την μέση τιμή του πληθυσμού.

18. Με σκοπό να εξετασθούν τα μήκη των ελατηρίων που παράγονται από μια μηχανή, δέκα ελατήρια επιλέγονται τυχαία από μια μεγάλη ομάδα. Τα μήκη τους (σε μέτρα) είναι 1.125 1.127 1.125 1.124 1.131 1.132 1.125 1.129 1.123 και 1.129. Χρησιμοποιήστε αυτό το δείγμα για να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για το μέσο μήκος των ελατηρίων αυτής της ομάδας (υποθέστε ότι τα μήκη των ελατηρίων κατανέμονται κανονικά).

19. Ένας αριθμός ηλιοτροπίων καλλιεργούνται στην σκιερή πλευρά ενός κτήματος. Ένα τυχαίο δείγμα 36 από αυτά δίνει μέσο ύψος 2.86m και μέση απόκλιση τετραγώνου 0.60 m. Ένας άλλος αριθμός

ηλιοτροπίων καλλιεργούνται στην προσήλια πλευρά του κτήματος. Ένα τυχαίο δείγμα 26 από αυτά δίνει μέσο ύψος 3.29 m και μέση απόκλιση τετραγώνου 0.90 m. Υποθέτοντας ότι τα παραπάνω δείγματα προέρχονται από κανονικούς πληθυσμούς που έχουν την ίδια διασπορά, να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων τιμών των δύο πληθυσμών. Με βάση το διάστημα εμπιστοσύνης μπορούμε να ισχυρισθούμε ότι τα ηλιοτρόπια της προσήλιας πλευράς τείνουν να είναι υψηλότερα από τα ηλιοτρόπια της σκιεράς πλευράς του κτήματος ($\alpha=5\%$);

20. Να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων τιμών δύο κανονικών πληθυσμών με ίσες διασπορές, όταν τα δεδομένα των δειγμάτων που επιλέγονται από αυτούς είναι:

$$\text{Δείγμα 1: } \bar{x} = 4.1 \quad n = 8 \quad \sum (x_i - \bar{x})^2 = 13.6$$

$$\text{Δείγμα 2: } \bar{y} = 3.3 \quad n = 6 \quad \sum (y_i - \bar{y})^2 = 7.2$$

21. Μια ομάδα φοιτητών εξετάσθηκε σε ένα διαγώνισμα Φυσικής αποτελούμενο από δύο μέρη, θεωρία και ασκήσεις. Οι βαθμοί έντεκα φοιτητών που επελέγησαν τυχαία (με άριστα το 100) δίνονται στον παρακάτω πίνακα.

Φοιτητής	A	B	Γ	Δ	E	Z	H	Θ	I	K	Λ
Βαθμός Θεωρίας	30	42	49	50	63	38	43	36	54	42	26
Βαθμός Ασκήσεων	52	58	42	67	94	68	22	34	55	48	17

Να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων βαθμών στην θεωρία και τις ασκήσεις. Υπάρχει στατιστικά σημαντική διαφορά μεταξύ των βαθμών από τη θεωρία και των βαθμών από τις ασκήσεις σε επίπεδο σημαντικότητας 5%; (Υποθέστε κανονικότητα).

22. Για να ελέγξει την επίδραση ενός νέου γάλακτος σε σκόνη για μωρά, ένας ερευνητής χρησιμοποίησε 10 ζευγάρια ομοίων διδύμων που κατά την γέννησή τους είχαν το ίδιο βάρος με τον αδελφό ή την αδελφή τους. Η διατροφή τους ήταν για ένα μήνα ίδια ως προς την

ποσότητα, αλλά το ένα από τα δίδυμα τρεφόταν με την παλιά σκόνη γάλακτος, ενώ το άλλο με την καινούργια. Τα βάρη των διδύμων σε κιλά μετά από ένα μήνα ήταν τα ακόλουθα:

Ζεύγος Διδύμων	Βάρος διατρεφόμενου με το καινούργιο γάλα	Βάρος διατρεφόμενου με το παλιό γάλα
1	4.32	4.30
2	5.62	5.43
3	5.24	5.26
4	4.12	4.18
5	5.74	5.41
6	4.36	4.22
7	5.34	5.39
8	4.76	4.61
9	5.26	5.14
10	4.97	4.86

Να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά των μέσων των βαρών των διδύμων που διατρέφονταν με τα δύο είδη γάλακτος. (Υποθέστε ότι οι πληθυσμοί είναι κανονικοί).

23. Η αναλογία των κατοίκων μιας κοινότητας που έχουν καστανά μάτια, εικάζεται ότι είναι $1/10$. Σε ένα τυχαίο δείγμα 400 κατοίκων, οι 47 βρέθηκαν να έχουν καστανά μάτια. Με βάση το δείγμα αυτό επιβεβαιώνεται η διατυπωθείσα εικασία;

24. Το μεταπτυχιακό πρόγραμμα ενός Πανεπιστημίου έλαβε την προηγούμενη χρονιά 450 αιτήσεις ενδιαφερομένων από την χώρα και 50 αιτήσεις από ενδιαφερόμενους άλλων χωρών. Την καινούργια χρονιά, μετά από μία αύξηση των διδάκτρων για τους ξένους σπουδαστές, οι αντίστοιχοι αριθμοί ήταν 550 και 40. Ελέγξτε αν είναι στατιστικά σημαντική η διαφορά των αναλογιών των ξένων υποψηφίων σπουδαστών που έκαναν αιτήσεις μεταξύ των δύο ετών.

25. Από το αρχείο ενός Νοσοκομείου, διαπιστώθηκε ότι από τους 500 άνδρες που εισήχθησαν μια συγκεκριμένη χρονική περίοδο για θεραπεία, οι 60 εισήχθησαν για υψηλή πίεση, ενώ από τις 500 γυναίκες οι οποίες εισήχθησαν για θεραπεία, οι 50 εισήχθησαν για

υψηλή πίεση. Να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την διαφορά μεταξύ των αναλογιών ανδρών και γυναικών στην περιοχή αυτή με υψηλή πίεση.

26. Η υπηρεσία επιλογής στρατευσίμων, υποστηρίζει ότι η αναλογία των ανδρών των αστικών περιοχών οι οποίοι είναι σωματικά ακατάλληλοι για στρατιωτικές υποχρεώσεις, είναι μεγαλύτερη από την αναλογία των σωματικά ακατάλληλων ανδρών των αγροτικών περιοχών. Για τον λόγο αυτό, ελέγχθηκαν τυχαία 3214 άνδρες από τις αστικές περιοχές και 2011 άνδρες από τις αγροτικές περιοχές. Από αυτούς, απορρίφθηκαν για σωματική αναπηρία 1078 και 543 άνδρες από τις αστικές και αγροτικές περιοχές αντίστοιχα. Να κατασκευάσετε ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την πραγματική, αλλά άγνωστη διαφορά των αναλογιών των σωματικά ακατάλληλων ανδρών των δύο πληθυσμών. Μπορείτε να ισχυρισθείτε ότι αν η πραγματική αναλογία των σωματικά ακατάλληλων ανδρών των αστικών περιοχών είναι μεγαλύτερη από την αντίστοιχη των αγροτικών περιοχών σε επίπεδο σημαντικότητας 5%;

27. Ένα τυχαίο δείγμα 295 μαθητών ενός Λυκείου έδειξε ότι οι 135 από αυτούς είχαν χρησιμοποιήσει και ωφεληθεί από τα βιβλία “Λύσεις Ασκήσεων”.

- i) Να δοθεί μία σημειακή εκτίμηση της αναλογίας των μαθητών του Λυκείου που βοηθήθηκαν από το βιβλίο αυτό.
- ii) Να κατασκευασθεί ένα 95% διάστημα εμπιστοσύνης για την πραγματική αναλογία του συνόλου των μαθητών αυτού του Λυκείου που βοηθήθηκαν από το βιβλίο αυτό.

28. Από ένα τυχαίο δείγμα 144 μελών ενός φιλανθρωπικού οργανισμού, διαπιστώθηκε ότι το 20% ήταν απόφοιτοι Πανεπιστημίου. Να κατασκευασθεί ένα 99% διάστημα εμπιστοσύνης για την πραγματική αναλογία των πτυχιούχων επί του συνόλου των μελών του φιλανθρωπικού αυτού οργανισμού αν έχει 200000 μέλη.

29. Ένα τυχαίο δείγμα 12 ατσάλινων ραβδών λαμβάνεται από μια γραμμή παραγωγής. Οι μάζες, σε κιλά, των ραβδών αυτών δίνονται παρακάτω:

24.8 30.8 28.1 24.8 27.4 22.1 24.7 27.3 27.5 27.8 23.9 23.2

Υποθέτοντας ότι το δείγμα προέρχεται από κανονικό πληθυσμό, να κατασκευάσετε ένα 90% διάστημα εμπιστοσύνης για την διασπορά του πληθυσμού.

30. Ένα δείγμα 14 μετρήσεων έδειξε δειγματική διασπορά 2.97. Είναι δυνατόν το δείγμα αυτό να προέρχεται από ένα πληθυσμό με διασπορά 9.6;

31. Οι παρατηρήσεις δύο δειγμάτων A και B δίνονται στον πίνακα που ακολουθεί:

A:	22.41	2.38	2.37	2.42	2.35	2.38
B:	2.32	2.36	2.38	2.33	2.38	

Ελέγξτε την υπόθεση ότι τα δείγματα αυτά προέρχονται από πληθυσμούς με ίσες διασπορές.