Μ Ε Ρ Ο Σ   Α

Εισαγωγή στις Πιθανότητες

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΚΑΙ ΘΕΩΡΙΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΙ ΒΑΣΙΚΩΝ ΕΝΝΟΙΩΝ

Όλοι έχουμε χρησιμοποιήσει στην καθημερινή ζωή την λέξη "πιθανότητα". Άλλοτε για να αναφερθούμε στο ενδεχόμενο να κερδίσουμε σε ένα τυχερό παιχνίδι και άλλοτε για να αναφερθούμε στο ενδεχόμενο πραγματοποίησης κάποιου γεγονότος. Η Θεωρία Πιθανοτήτων, όπως και η Στατιστική, ασχολούνται με τυχαία φαινόμενα ή τυχαία πειράματα.

Ορισμός: *Τυχαίο φαινόμενο (random phenomenon)* είναι το φαινόμενο εκείνο η κατάληξη του οποίου δεν είναι γνωστή εκ των προτέρων.

Ορισμός: *Τυχαίο πείραμα (random experiment)* είναι μια διαδικασία (πράξη) που οδηγεί σε ένα αποτέλεσμα που δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων.

Ο όρος "πείραμα" χρησιμοποιείται με την γενική του έννοια. Η γέννηση ενός παιδιού ή το στρίψιμο ενός νομίσματος θεωρούνται τυχαία πειράματα. Για να είμαστε σε θέση να αναπτύξουμε μια θεωρία πιθανοτήτων, θα χρειασθούμε ορισμένους νέου όρους που θα βοηθήσουν στην απλούστευση της παρουσίασης.

Ορισμός: *Απλά ενδεχόμενα (simple events), στοιχειώδη ενδεχόμενα ή γεγονότα* λέγονται τα δυνατά αποτελέσματα ενός τυχαίου πειράματος.

Ορισμός: *Δειγματικός χώρος (sample space) ή δειγματοχώρος* είναι το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός τυχαίου πειράματος.

Θα συμβολίζουμε με S τον δειγματικό χώρο. (Ο συμβολισμός Ω συναντάται επίσης στη βιβλιογραφία).

Παράδειγμα: Στην γέννηση ενός παιδιού S={A, K} όπου A και K συμβολίζουν τα ενδεχόμενα αγοριού και κοριτσιού αντίστοιχα.
Στο ρίξιμο ενός ζαριού S={1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε 3 ασφάλειες ηλεκτρικού ρεύματος και σημειώνουμε το αποτέλεσμα κάθε εξέτασης. Έστω E το ενδεχόμενο μια ασφάλεια να είναι ελαττωματική και A να μην είναι ελαττωματική. Ο δειγματικός χώρος στην περίπτωση αυτή είναι: S={EEE, EEA, EAE, EAA, AEE, AEA, AAE, AAA}.

Παράδειγμα: Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μπαταρίες. Εάν η τάση είναι έξω από κάποια προκαθορισμένα όρια η μπαταρία θεωρείται ελαττωματική (E). Εάν η τάση είναι μέσα στα όρια αυτά η μπαταρία θεωρείται καλή (K). Έστω ότι το πείραμα που κάνουμε αναφέρεται στην εξέταση κάθε μπαταρίας που παράγεται και σταματά μόλις παρατηρήσουμε μια καλή μπαταρία. Ο δειγματικός χώρος εδώ είναι: S={K, EK, EEK, EEEK, EEEEK,...}.

Ο δειγματικός χώρος διακρίνεται σε διακριτό και σε συνεχή (απόλυτα συνεχή).

Ορισμός: *Διακριτός (discrete)* λέγεται ο δειγματικός χώρος, που έχει πεπερασμένο ή αριθμήσιμο πλήθος στοιχειωδών ενδεχομένων.

Τα δύο πρώτα από τα προηγούμενα παραδείγματα είναι παραδείγματα πεπερασμένων δειγματικών χώρων, ενώ το τρίτο παράδειγμα αναφέρεται σε δειγματικό χώρο με αριθμήσιμο πλήθος στοιχείων.

Ορισμός: *Συνεχής (continuous)* λέγεται ο δειγματικός χώρος που τα στοιχεία του σχηματίζουν διαστήματα.

Παράδειγμα: Ο χρόνος t που κάποιος περιμένει ένα λεωφορείο S={t:t≥0}.

Ορισμός: *Ενδεχόμενο* (ή *γεγονός*) *(event)* είναι μια συλλογή απλών ενδεχομένων.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΑΣ

Όπως είναι φυσικό, στην μελέτη τυχαίων πειραμάτων ή φαινομένων, το πρόβλημα έγκειται στον προσδιορισμό του δειγματικού χώρου, την επιλογή των ενδεχομένων που μας ενδιαφέρουν και τον καθορισμό των πιθανοτήτων που έχουν τα ενδεχόμενα αυτά να συμβούν.

Ο καθορισμός των πιθανοτήτων ενδεχομένων είναι το ξεκίνημα της θεωρίας των πιθανοτήτων, ειδικά σε σχέση με τυχερά παιγνίδια (16ος και 17ος αιώνας). Ο Fermat και ο Pascal, λόγω της σχέσης τους με τον ερασιτέχνη μαθηματικό και παίκτη Chevalier de Mere, ενδιαφέρθηκαν για προβλήματα όπως τα παρακάτω:

1) Πόσες φορές πρέπει κανείς να ρίξει ένα ζάρι για να έχει πιθανότητα μεγαλύτερη από 0.5 να φέρει τουλάχιστον ένα 6;
2) Ας υποθέσουμε ότι δύο παίκτες παίζουν ένα παιχνίδι στο οποίο νικητής είναι αυτός που κερδίζει πρώτος τέσσερις παρτίδες. Αν ο παίκτης Α έχει κερδίσει ήδη 3 παρτίδες, ο Β έχει κερδίσει 2 παρτίδες και οι αντίπαλοι υποχρεωθούν να σταματήσουν το παιχνίδι, με ποιο τρόπο θα πρέπει να μοιρασθούν τα στοιχήματα;

Οι απόψεις των Fermat και Laplace στα παραπάνω προβλήματα, όπως και σε άλλα προβλήματα παρόμοιας μορφής, αποτέλεσαν τις πρώτες συνεισφορές στην διαμόρφωση της θεωρίας των πιθανοτήτων. Την εργασία των παραπάνω ακολούθησε το ενδιαφέρον σε παρόμοια προβλήματα άλλων γνωστών μαθηματικών όπως οι Huygens, Newton, De Moivre και Gauss.

Πριν ασχοληθούμε εκτενώς με τον ορισμό της πιθανότητας που θα χρησιμοποιήσουμε στην συνέχεια, είναι σκόπιμο να αναφέρουμε ότι δεν υπάρχει κάποιος ορισμός της πιθανότητας που να είναι καθολικά αποδεκτός. Η έννοια της πιθανότητας είναι αυτή καθ' αυτή μια φιλοσοφική έννοια και σαν τέτοια έχει γίνει αφορμή διαφορετικών φιλοσοφικών θεωρήσεων και ισχυρών αντιθέσεων. Για λόγους πληρότητας δίνουμε μια σύντομη περιγραφή των κυριοτέρων απόψεων (σχολών) που έχουν διατυπωθεί με ορισμένα σχόλια πάνω σε καθεμιά από αυτές.

ΘΕΩΡΙΕΣ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Θεωρία Πιθανοτήτων θα ονομάζεται ένα σύστημα αξιωμάτων που πρέπει να ικανοποιούνται από τις πιθανότητες και κανόνων για την κατασκευή και ερμηνεία των πιθανοτήτων. Ο ερευνητής, χρησιμοποιώντας την θεωρία, θα μπορεί να κατασκευάζει πιθανότητες σύμφωνα με τους κανόνες, να υπολογίζει άλλες πιθανότητες σύμφωνα με τα αξιώματα και να ερμηνεύει αυτές τις πιθανότητες σύμφωνα με τους κανόνες. Αν η ερμηνεία δεν έχει νόημα ίσως η αρχική κατασκευή της πιθανότητας πρέπει να τροποποιηθεί.

Υπάρχουν τρεις, κυρίως, προσεγγίσεις θεωρίας πιθανοτήτων. Η Λογική Θεωρία *(logical theory),* η Εμπειρική Θεωρία *(empirical theory)* και η Υποκειμενική Θεωρία *(Subjective theory).*

Στις *λογικές θεωρίες* η πιθανότητα του ενδεχομένου αντιπροσωπεύει το λογικό βαθμό πίστης *(rational degree of belief)* στο συγκεκριμένο ενδεχόμενο σε σχέση με κάποιες δεδομένες ενδείξεις.

Στις *εμπειρικές θεωρίες* η πιθανότητα εκφράζει την υπάρχουσα (παρατηρούμενη) κατάσταση των πραγμάτων *(factual statement).*

Στις *υποκειμενικές θεωρίες* η πιθανότητα ενός ενδεχομένου εκφράζει τον υποκειμενικό βαθμό πίστης *(individual degree of belief)* στο συγκεκριμένο ενδεχόμενο. Οι θεωρίες αυτές διαφέρουν από τις λογικές στο ότι διαφορετικά άτομα είναι δυνατό να έχουν διαφορετικές πιθανότητες για ένα ενδεχόμενο, ακόμα και όταν οι γνώσεις τους γι' αυτό είναι ίδιες.

Λογικές Θεωρίες: Laplace
(Κλασσικός Ορισμός)

Η πρώτη λογική θεωρία οφείλεται στον Laplace. Ο Laplace όρισε την πιθανότητα ενός ενδεχομένου σαν τον λόγο του αριθμού των ευνοϊκών για το ενδεχόμενο περιπτώσεων διά του συνολικού αριθμού των περιπτώσεων. (Εδώ σαν περιπτώσεις θεωρούνται τα στοιχειώδη ενδεχόμενα).

Είναι βέβαια απαραίτητο να αναφερόμαστε σε ισοπίθανα ενδεχόμενα για να εφαρμόσουμε την θεωρία του Laplace. Σε πολλά τυχερά παιχνίδια (όπως ρίξιμο ζαριού ή νομίσματος, τράβηγμα χαρτιού από ανακατεμένη τράπουλα) μπορούμε να δεχθούμε μια τέτοια υπόθεση, μια και δεν υπάρχει κάποια αιτία που να κάνει κάποιο στοιχειώδες ενδεχόμενο να ξεχωρίζει. Σε άλλα προβλήματα όμως (όπως π.χ. η πιθανότητα να βρέξει αύριο), δεν διακρίνει κανείς εύκολα εναλλακτικά ενδεχόμενα με ίσες πιθανότητες εμφάνισης. Για τέτοιες περιπτώσεις ο Laplace - όπως νωρίτερα ο Bernoulli - χρησιμοποίησε την αρχή της "ανεπαρκούς αιτίας" *(insufficient reason),* η οποία καθορίζει ότι οι πιθανότητες δύο ενδεχομένων είναι ίσες αν δεν έχουμε κάποιο λόγο που μας κάνει να πιστεύουμε ότι είναι διαφορετικές. Η αρχή της ανεπαρκούς αιτίας απορρίπτεται σήμερα γιατί υποθέτει πάρα πολλές πιθανότητες ίσες.

Ακόμα και στα τυχερά παιχνίδια μπορούμε να υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι όλοι οι δυνατοί συνδυασμοί του ριξίματος n ζαριών είναι ισοπίθανοι, έτσι ώστε η πιθανότητα άσσου στην επόμενη ζαριά να είναι 1/6 οποιοδήποτε και να ήταν το αποτέλεσμα στις προηγούμενες ζαριές. Παρ' όλα αυτά, το ζάρι πάντα θα έχει κάποια μεροληπτικότητα και αν ο άσσος έχει εμφανισθεί περισσότερες από 1/6 φορές στο παρελθόν, είναι βέβαιο ότι θα δώσουμε πιθανότητα άσσου μεγαλύτερη απο 1/6 στην επόμενη ζαριά. Εδώ η υπόθεση ότι μακροπρόθεσμα η συχνότητα του άσσου θα είναι 1/6 είναι αποτέλεσμα της αρχής της ανεπαρκούς αιτίας. Αυτή η πρόβλεψη είναι πολύ πιθανό να διαψευσθεί από την παρατηρούμενη συχνότητα. Βέβαια, κάθε πεπερασμένη ακολουθία δοκιμών δεν θα δώσει κάποια καθοριστική αντίφαση. Στην πράξη όμως κανένας παίκτης δεν θα είναι διατεθειμένος να ποντάρει στον άσσο 5 προς 1 αν ξέρει, ότι σε χίλιες δοκιμές το 1/3 μόνο ήταν άσσοι. Επομένως, η αρχή της ανεπαρκούς αιτίας καταστρατηγεί την αρχή του σκεπτικισμού *(sceptical principle)* σύμφωνα με την οποία δεν μπορεί κανείς να είναι βέβαιος για το μέλλον.

Keynes & Jeffreys

Ο Keynes υποστήριξε, ότι πιθανότητα είναι το λογικό πιστεύω *(rational belief)* σε μια πρόταση που δικαιολογείται από την γνώση μιας άλλης πρότασης.

Σύμφωνα με την θεωρία αυτή δεν είναι δυνατόν να δίνει κανείς μια αριθμητική τιμή σε κάθε τέτοια πίστη, είναι όμως δυνατό να συγκρίνει τέτοια ζευγάρια "πίστης". Ο Keynes τροποποίησε την αρχή της ανεπαρκούς αιτίας με την αρχή της αδιαφορίας *(indifference)*. Δύο εναλλακτικά φαινόμενα είναι ισοπίθανα, αν δεν υπάρχουν σχετικές ενδείξεις που να ευνοούν το ένα ή το άλλο.

Η άποψη αυτή πάλι αφήνει μεγάλα περιθώρια στην προσωπική κρίση. Για παράδειγμα, ο Keynes υποστηρίζει ότι αν σε ένα δοχείο περιέχονται n μαύρες και άσπρες σφαίρες σε άγνωστη αναλογία, κάθε ακολουθία άσπρων και μαύρων σφαιρών έχει την ίδια πιθανότητα εμφάνισης, έτσι ώστε για μεγάλο n το ποσοστό των άσπρων σφαιρών είναι με μεγάλη πιθανότητα, κοντά στο 1/2. Ο Keynes συζητά για πιθανότητες που μπορούν να θεωρηθούν ότι προκύπτουν από αντιστοιχία, αλλά δεν δίνει μέθοδο για πρακτικό υπολογισμό των πιθανοτήτων αυτών. Η θεωρία του Keynes δεν έχει επιτυχία γιατί δεν παρέχει κανόνες για τον υπολογισμό πιθανοτήτων ούτε καν για την σύγκριση πιθανοτήτων.

Ο Jeffreys παρουσιάζει την ίδια άποψη με τον Keynes για την πιθανότητα, αλλά αυτός είναι πιο εποικοδομητικός γιατί δίνει πολλούς τύπους "εκ των προτέρων" *(prior)* κατανομών πιθανοτήτων καταλλήλων για διαφορετικά στατιστικά προβλήματα. Πολλές από τις *standard a-priori* κατανομές πιθανοτήτων που χρησιμοποιούνται σήμερα οφείλονται στον Jeffreys. Ο Jeffreys έχει επίσης δώσει μερικούς γενικούς κανόνες για την κατασκευή πιθανοτήτων. Παραδέχεται ότι σε μερικές περιπτώσεις ίσως δεν υπάρχει μια γενικά αποδεκτή πιθανότητα, ισχυρίζεται όμως ότι δύο άνθρωποι που χρησιμοποιούν τους ίδιους κανόνες θα πρέπει να καταλήξουν στις ίδιες πιθανότητες. Παρ' όλα αυτά, ο μεγάλος αριθμός κανόνων που χρησιμοποιούνται από αυτόν δίνουν συχνά συγκρουόμενα αποτελέσματα. Η αδυναμία στην προσέγγιση του Jeffreys βρίσκεται στο γεγονός ότι δεν είναι δυνατόν να κατασκευάσει κανείς μονοσήμαντες πιθανότητες σύμφωνα με τους προκαθορισμένους κανόνες. Επίσης δεν είναι δυνατόν να συναγάγει κανείς την έννοια της πιθανότητας, όπως την ορίζει ο Jeffreys, μελετώντας τους κανόνες κατασκευής πιθανοτήτων που δίνει. Τέλος, δεν είναι δυνατόν να ερμηνεύσει κανείς τα αποτελέσματα στα οποία καταλήγει χρησιμοποιώντας τους υπολογισμούς του Jeffreys.

Εμπειρικές Θεωρίες: Von-Mises
(Πιθανότητα σαν Οριακή Σχετική Συχνότητα)

Στις εμπειρικές θεωρίες, που βασίζονται στην έννοια της σχετικής συχνότητας, οι πιθανότητες αντιστοιχούν σε σχετικές συχνότητες κάποιας ακολουθίας πειραμάτων (ίσως και υποθετικών). Για παράδειγμα η πρόταση “η πιθανότητα άσσου είναι 1/6” έχει την έννοια ότι αν ρίξουμε το ίδιο ζάρι κατ' επανάληψη - κάτω από τις ίδιες συνθήκες - η οριακή συχνότητα θα είναι 1/6.

Ο Von-Mises ισχυρίζεται, ότι τα αντικείμενα που μελετάμε δεν είναι απλά ενδεχόμενα αλλά ακολουθίες ενδεχομένων. Βέβαια οι εμπειρικά παρατηρούμενες ακολουθίες είναι πάντα πεπερασμένες. Μερικές εμπειρικά παρατηρούμενες ακολουθίες δίνουν μια ένδειξη τυχαιότητας στην σειρά εμφάνισης των όρων τους και σύγκλισης των σχετικών συχνοτήτων κατά προσέγγιση καθώς το μέγεθος του δείγματος μεγαλώνει. Ο Von-Mises εξιδανικεύει αυτές τις ιδιότητες σε μια άπειρη ακολουθία στην οποία κάθε στοιχειώδες ενδεχόμενο έχει οριακή συχνότητα, η οποία δεν αλλάζει από οποιαδήποτε υποακολουθία και αν υπολογισθεί.

Σύμφωνα με την άποψη του Von-Mises δηλαδή, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Ε είναι ίση με το όριο της σχετικής συχνότητας N(E)/N όταν το N τείνει στο άπειρο όπου N είναι ο αριθμός των δυνατών περιπτώσεων και N(E) ο αριθμός των ευνοϊκών για το Ε περιπτώσεων. Δηλαδή

$$P(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{N(E)}{N}$$

ΑΞΙΩΜΑΤΙΚΗ ΘΕΜΕΛΙΩΣΗ KOLMOGOROV

Στα μοντέρνα μαθηματικά συνηθίζεται να διαλέγουμε σαν αξιώματα ορισμένες “προτάσεις” που υποθέτουμε ότι ισχύουν και οι οποίες δεν αποδεικνύονται μέσα στα πλαίσια μιας συγκεκριμένης θεωρίας. Όλες οι άλλες προτάσεις της θεωρίας συνάγονται στην συνέχεια, με αυστηρά λογικό τρόπο, με βάση τα τεθέντα αξιώματα. Στην εξέλιξη των μαθηματικών επιστημών ο καθορισμός των αξιωμάτων (δηλαδή των βασικών υποθέσεων) πάνω στα οποία μπορεί να κατασκευασθεί μια εκτενής θεωρία δεν αποτελεί το αρχικό βήμα. Αντίθετα, είναι το αποτέλεσμα μιας μακράς περιόδου συσσώρευσης πραγματικών γεγονότων και μιας λογικής ανάλυσης των αποτελεσμάτων που στόχο έχει τον καθορισμό των πραγματικών βασικών αιτιών. Αυτή είναι και η διαδικασία που ακολουθήθηκε και στη θεωρία πιθανοτήτων με τη μόνη διαφορά ότι, στην συγκεκριμένη περίπτωση, αυτό κατορθώθηκε σχετικά πρόσφατα.

Το πρόβλημα της αξιωματικής θεμελίωσης της θεωρίας των πιθανοτήτων τέθηκε, για πρώτη φορά, και λύθηκε το 1917 από τον γνωστό μαθηματικό S. N. Bernstein. Η εργασία του Bernstein είναι βασισμένη στην ποιοτική σύγκριση τυχαίων ενδεχομένων αναφορικά με τις πιθανότητες που αντιστοιχούν σε αυτά. Η αξιωματική θεμελίωση που έγινε κοινά αποδεκτή οφείλεται στον Ρώσσο μαθηματικό A. N. Kolmogorov και προτάθηκε το 1933. Σύμφωνα με την θεωρία του Kolmogorov πιθανότητα είναι μια συνολοσυνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

Έστω S ένας δειγματικός χώρος και B μια οικογένεια υποσυνόλων που είναι ενδεχόμενα. (Αυστηρότερα B είναι η σ-άλγεβρα του S). Έστω $A \in B$.

Ορισμός: Ορίζουμε ως *συνάρτηση πιθανότητας (probability distribution)* μια συνολοσυνάρτηση:

$$P: B \to R$$

η οποία σε κάθε στοιχείο $A \in B$ αντιστοιχεί ένα πραγματικό αριθμό P(A) με τρόπο ώστε να ικανοποιούνται τα παρακάτω αξιώματα:

i. $P(A) \geq 0$

ii. $P(S) = 1$

iii. Αν A_i , i=1,2,... είναι ενδεχόμενα (αν δηλαδή $A_i \in B$) αμοιβαία ξένα μεταξύ τους ($A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$) τότε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = P(A_1) + P(A_2) + ...$$

Ο αριθμός P(A) λέγεται *πιθανότητα (probability)* του ενδεχομένου A. Τα αξιώματα (i), (ii), (iii) λέγονται και *αξιώματα (axioms) του Kolmogorov.*

Σημείωση: Είναι προφανές ότι για τον ορισμό της έννοιας της πιθανότητας κατά Kolmogorov χρειάζεται να καθορίσουμε, όχι μόνο το σύνολο των απλών τυχαίων ενδεχομένων S, αλλά και το σύνολο των τυχαίων ενδεχομένων B όπως επίσης και την συνάρτηση P που ορίζεται πάνω στο B.

Ορισμός: Η συλλογή (S, B, P) ονομάζεται *χώρος πιθανοτήτων (probability space).*

Σημείωση: Η ουσία της αξιωματικής θεμελίωσης της Θεωρίας Πιθανοτήτων κατά Kolmogorov είναι ότι κάθε ενδεχόμενο (του οποίου θέλουμε να καθορίσουμε την πιθανότητα και για αυτό θα ονομάζουμε *παρατηρήσιμο ενδεχόμενο (observable event),* είναι δυνατόν να παρασταθεί με ένα υποσύνολο του συνόλου όλων των στοιχειωδών ενδεχομένων (δηλαδή ένα υποσύνολο του δειγματικού χώρου). Για παράδειγμα, όταν ρίχνουμε ένα ζάρι τα δυνατά αποτελέσματα (στοιχειώδη ενδεχόμενα) μπορούν να είνα τα 1, 2,…,6. Τα στοιχειώδη ενδεχόμενα από κοινού σχηματίζουν το δειγματικό χώρο. Το ενδεχόμενο ότι το αποτέλεσμα ενός ριξίματος ενός ζαριού είναι άρτιος αριθμός μπορεί να παρουσιασθεί ως το υποσύνολο του δειγματικού χώρου που αποτελείται από τους άρτιους αριθμούς {2,4,6}. Η θεωρία του Kolmogorov υποθέτει ότι τα παρατηρήσιμα ενδεχόμενα αποτελούν μια σ-άλγεβρα, όπως ήδη είπαμε, που το σ αναφέρεται στο άπειρο. Δηλαδή, ότι η από κοινού πραγματοποίηση δύο οποιονδήποτε παρατηρήσιμων γεγονότων, η πραγματοποίηση τουλάχιστον ενός ή ενός πεπερασμένου ή ενός μετρήσιμου αριθμού παρατηρήσιμων γεγονότων, όπως επίσης και το συμπλήρωμα οποιουδήποτε παρατηρήσιμου γεγονότος είναι επίσης ένα παρατηρήσιμο γεγονός. Στη συνέχεια, σε κάθε παρατηρήσιμο ενδεχόμενο αντιστοιχείται ένας μη αρνητικός αριθμός, δηλαδή η πιθανότητα του ενδεχομένου αυτού, έτσι ώστε η πιθανότητα του βεβαίου γεγονότος (δηλαδή του συνολικού δειγματικού χώρου) να είναι ένα, και επίσης, ώστε η ιδιότητα της σ-προσθετικότητας να ισχύει.

Για την ανάπτυξη της θεωρίας του ο Kolmogorov χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα γνωστών μαθηματικών, κυρίως αυτά των E.Borel, A.Lomnitzky, H.Steinhaus όπως επίσης Θεωρία Συνόλων και Θεωρία Μέτρου. (Λεπτομέρειες για το θέμα αυτό είναι δυνατόν να αναζητηθούν στο Archive for Hist. of Exact Sci., (1978), 18, 123-190).

Παρατήρηση: Για τους αναγνώστες που έχουν γνώση θεωρίας μέτρου είναι αντιληπτό, ότι από την σκοπιά της θεωρίας συνόλων ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας κατά Kolmogorov δεν είναι τίποτα άλλο παρά ο εφοδιασμός του συνόλου S με ένα κανονικοποιημένο *(normed),* πλήρωs προσθετικό, μη αρνητικό μέτρο ορισμένο πάνω σε όλα τα στοιχεία του συνόλου B.

Σημείωση: Είναι ενδιαφέρον να παρατηρηθεί ότι ο αξιωματικός ορισμός της πιθανότητας κατά Kolmogorov περιλαμβάνει, σαν ειδικές περιπτώσεις, και το κλασσικό ορισμό (όπως θα δούμε σε λίγο) και τον ορισμό που βασίζεται στην σχετική συχνότητα ενώ ταυτόχρονα ξεπερνά τα μειονεκτήματα των δύο αυτών θεωριών. Η αξιωματική θεωρία του Kolmogorov είναι αυτή που θα ακολουθήσουμε στην συνέχεια. Πριν όμως προχωρήσουμε στην διαμόρφωση της θεωρίας αυτής θα δώσουμε και τα βασικά στοιχεία των υποκειμενικών θεωριών.

ΥΠΟΚΕΙΜΕΝΙΚΕΣ ΘΕΩΡΙΕΣ

Στις υποκειμενικές θεωρίες η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι συνδεδεμένη με κάθε άτομο. Σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές δεν υπάρχει μια "αντικειμενική" πιθανότητα για κάποιο ενδεχόμενο Α. Υπάρχει μόνο υποκειμενική πιθανότητα που εξαρτάται φυσικά από το πρόσωπο που την δίνει. Κύριοι εκφραστές των θεωριών αυτών είναι οι De Finetti, Savage, Good, Lindley κ.λ.π..

Ο De Finetti, που θεωρείται ο εγκυρότερος εκφραστής των θεωριών αυτών, υποστηρίζει ότι η πιθανότητα που κάποιο άτομο αντιστοιχεί σ' ένα ενδεχόμενο αποκαλύπτεται από τις συνθήκες κάτω από τιs οποίες το άτομο αυτό θα ήταν διατεθειμένο να στοιχηματίσει για το ενδεχόμενο.

Ο Savage ονομάζει τις πιθανότητες αυτές "προσωπικές πιθανότητες". Κάθε άτομο θα πρέπει να είναι "συνεπές" (coherent) στον τρόπο με τον οποίο καθορίζει τις πιθανότητες στοιχειωδών ενδεχομένων, έχει όμως την ελευθερία να δώσει όποια πιθανότητα θέλει σε κάθε ενδεχόμενο χωρίς αυτό να δίνει δικαίωμα κριτικής στους άλλους. Εάν δηλαδή κάποιος υποστηρίζει ότι "η πιθανότητα του να βρέξει αύριο είναι 0.90" κανείς δεν μπορεί να πει ότι αυτό είναι λάθος. Η πιθανότητα αυτή δίνει απλώς την διάθεση του ατόμου να στοιχηματίσει με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο. Θα πρέπει να σημειωθεί εδώ ότι οι οπαδοί των υποκειμενικών θεωριών υποστηρίζουν, ότι κάθε άτομο θα πρέπει να έχει "συνέπεια" στον τρόπο με τον οποίο στοιχηματίζει.

Υπάρχουν πολλές αντιρρήσεις στις απόψεις αυτές που στηρίζονται στην έννοια του στοιχήματος. Άλλες είναι τεχνικής φύσης (είναι εφικτές;) και άλλες φιλοσοφικής (είναι χρήσιμες;). Στην πρώτη κατηγορία αναφέρονται ενδεικτικά οι εξής:

i) Υπάρχουν άτομα που δεν είναι διατεθειμένα να στοιχηματίσουν.
ii) Το στοίχημα είναι ένα κέρδος που εξαρτάται απο τις δυνάμεις της αγοράς. Έστω για παράδειγμα ότι ένα άτομο βρίσκεται μέσα σε ένα δωμάτιο γεμάτο από μετεωρολόγους και υποστηρίζει ότι η πιθανότητα να βρέξει αύριο είναι 0.95. Αν διαπιστώσει ότι όλοι τρέχουν προς το μέρος του έτοιμοι να στοιχηματίσουν, δε θα

μεταβάλλει την πιθανότητά του; Γιατί θα πρέπει η παρουσία άλλων να είναι δυνατόν να επηρεάσει την πιθανότητα ενός ατόμου;

Οι φιλοσοφικές αντιρρήσεις στηρίζονται στην άποψη ότι δεν ενδιαφέρει ιδιαίτερα με ποιο τρόπο ένα συγκεκριμένο άτομο είναι διατεθειμένο να στοιχηματίσει.

Στην εποχή μας η διαφωνία έχει κυρίως περιορισθεί ανάμεσα στους υποστηρικτές των εμπειρικών θεωριών. Η παραπέρα ανάλυση και μελέτη των αντικρουόμενων θεωριών δεν είναι μέσα στους στόχους μας. Σκοπός μας ήταν η σύντομη παράθεση των βασικών απόψεων που έχουν διατυπωθεί για να πάρει ο αναγνώστης μια εικόνα των αντιλήψεων που υπήρξαν ή υπάρχουν.

Στην συνέχεια, θα περιοριστούμε στην αξιωματική θεωρία του Kolmogorov εκτός αν κάτι διαφορετικό διατυπωθεί σαφώς.

ΘΕΩΡΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ ΚΑΤΑ KOLMOGOROV

Έστω (S, B, P) ένας χώρος πιθανοτήτων, όπου S ο δειγματικός χώρος, B το σύνολο των ενδεχομένων που είναι υποσύνολα του S και P η συνάρτηση πιθανότητας που ικανοποιεί τα τρία αξιώματα του Kolmogorov όπως αυτά διατυπώθηκαν προηγουμένως.

Θα αποδείξουμε τώρα μερικά θεωρήματα που θα μας βοηθήσουν να υπολογίζουμε πιθανότητες διαφόρων ενδεχομένων.

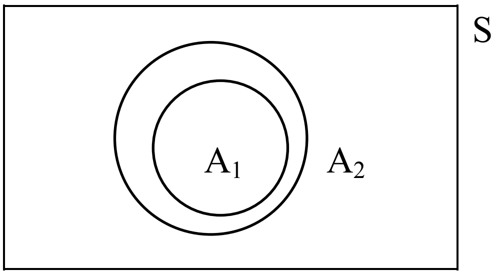
Θεώρημα: Για κάθε ενδεχόμενο A, $P(A') = 1-P(A)$.

Απόδειξη: $S=A\cup A'$ και $A\cap A' = \varnothing$. Επομένως (Αξ. (i) και Αξ.(ii))
$P(S) = P(A) + P(A')$, δηλαδή $P(A') = 1-P(A)$.

Θεώρημα: $P(\varnothing) = 0$.

Απόδειξη: Εστω $A=\varnothing$. Τότε $A'= S$. Από το προηγούμενο θεώρημα $P(A)=1-P(A')$.
Άρα $P(\varnothing) = 0$.

Θεώρημα: Αν για τα ενδεχόμενα A_1 και A_2 έχουμε $A_1 \subseteq A_2$ τότε $P(A_1)\leq P(A_2)$.



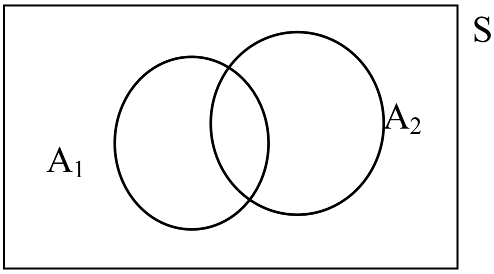
Απόδειξη: $A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1')$ και $A_1 \cap (A_2 \cap A_1') = \emptyset$.
Επομένως $P(A_2) = P(A_1 \cup (A_2 \cap A_1')) = P(A_1)+P(A_2 \cap A_1') \geq P(A_1)$.

Θεώρημα: Για κάθε ενδεχόμενο A, $P(A) \leq 1$.
Απόδειξη: $A \subseteq S$. Επομένως $P(A) \leq 1$.

Θεώρημα: Για οποιαδήποτε ενδεχόμενα A_1 και A_2 ισχύει ότι

$$P(A_1 \cup A_2) = P (A_1) + (A_2) - P(A_1 \cap A_2).$$

Απόδειξη:



$$A_1 \cup A_2 = A_1 \cup (A_2 \cap A_1') \text{ και } A_1 \cap (A_2 \cap A_1') = \emptyset$$

Επομένως,

$$P (A_1 \cup A_2) = P (A_1) + P(A_1' \cap A_2)$$

Επίσης,

$$A_2 = (A_1 \cap A_2) \cup (A_1' \cap A_2) \text{ και } (A_1 \cap A_2) \cap (A_1' \cap A_2) = \emptyset$$

Συνεπώς,

$P(A_2) = P(A_1 \cap A_2) + P(A_1' \cap A_2)$ ή $P(A_1' \cap A_2) = P(A_2)-P(A_1 \cap A_2)$

Δηλαδή, τελικά

$$P(A_1 \cup A_2) = P (A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2)$$

Πόρισμα: $P(A_1 \cup A_2) \leq P (A_1) + P(A_2)$.

Γενικότερα ισχύει η εξής ανισότητα:

Ανισότητα του Boole: $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) \le \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.

Απόδειξη: Η ανισότητα ισχύει για n=2 . Έστω ότι ισχύει για n=k. Τότε για n=k+1 εχουμε

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_i \bigcup A_{k+1}\right) \le P\left(\bigcup_{i=1}^{k} A_k\right) + P(A_{k+1}) \le \sum_{i=1}^{k+1} P(A_i)$$

Θεώρημα: Για οποιαδήποτε τρία ενδεχόμενα A_1 , A_2 και A_3 ισχύει ότι

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 \cap A_2) - P(A_1 \cap A_3) - P(A_2 \cap A_3) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

Απόδειξη: Γράφουμε $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = A_1 \cup (A_2 \cup A_3)$. Θέτουμε $Γ=A_2 \cup A_3$ και εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα.

Παράδειγμα: Στο επόμενο εξάμηνο θα προσφερθούν δύο προαιρετικά μαθήματα, ένα σχετικό με πιθανότητες και ένα σχετικό με στατιστική. Η πιθανότητα ότι ένας φοιτητής θα διαλέξει το μάθημα το σχετικό με τις πιθανότητες είναι P(A)=0.08. Η πιθανότητα ότι ο φοιτητής θα επιλέξει τουλάχιστον ένα από τα δύο είναι 0.9. Να βρεθεί η πιθανότητα να επιλέξει και τα δύο.

Απάντηση:

$$P(A \cup B)=P(A)+P(B)-P(A \cap B)$$

Επομένως,

$$P(A \cap B)=0.8+0.15-0.9=0.05$$

Επειδή στα προβλήματα που θα αντιμετωπίσουμε θα χρησιμοποιούμε συχνά τον δειγματικό χώρο, δηλαδή το σύνολο όλων των δυνατών αποτελεσμάτων ενός πειράματος, είναι φυσικό να θέλουμε να μετράμε τον αριθμό αυτών των δυνατών αποτελεσμάτων. Αυτό ισχύει ιδιαίτερα για πεπερασμένους δειγματικούς χώρους με ισοπίθανα ενδεχόμενα όπου, όπως είδαμε, η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι το πηλίκο του αριθμού των ευνοϊκών για το ενδεχόμενο περιπτώσεων δια του αριθμού των δυνατών περιπτώσεων.

Οι τεχνικές μέτρησης είναι πρόβλημα ενός άλλου κλάδου των μαθηματικών, της συνδυαστικής. Στο επόμενο κεφάλαιο θα αναπτύξουμε τα στοιχεία εκείνα της συνδυαστικής που είναι απαραίτητα για το σκοπό αυτό.

Πριν όμως προχωρήσουμε στην συνδυαστική, θα αποδείξουμε ένα προηγούμενο ισχυρισμό μας, ότι δηλαδή ο κλασσικός ορισμός πιθανότητας του Laplace είναι ειδική περίπτωση του αξιωματικού ορισμού κατά Kolmogorov.

Έστω ότι θεωρούμε μια διαμέριση του δειγματικού χώρου S σε k αμοιβαία ξένα ενδεχόμενα A_1, A_2, ..., A_κ [δηλαδή $A_i \cap A_j = \emptyset$, $i \neq j$ και $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = S$]. Υποθέτουμε ότι

$$P(A_1) = P(A_2) = \dots\dots\dots = P(A_\kappa)$$

Τότε (από τα αξ. (ii) και (iii))

$$P(S) = P(A_1) + P(A_2) + \dots + P(A_k) \qquad \text{ή}$$

$$P(A_i) = 1/k, \quad i=1,2,\dots,k$$

Ας θεωρήσουμε το ενδεχόμενο $A = \bigcup_{i=1}^{r} A_i$.

Τότε, $P(A) = P(A_1)+P(A_2)+\dots+P(A_r) = r/k$ όπου k είναι ο αριθμός των τρόπων με τους οποίους μπορεί να τελειώσει το πείραμα και r ο αριθμός των ευνοϊκών περιπτώσεων για το ενδεχόμενο A. Δηλαδή, P(A) είναι ο λόγος του r δια του k.

Σημείωση: Θα πρέπει, ίσως, να παρατηρήσουμε ότι η πρόοοδος της Θεωρίας Πιθανοτήτων έχει οδηγήσει και σε καινούργιες θεωρητικές αναζήτησεις. Έτσι, ενώ σύμφωνα με τα αξιώματα του Kolmogorov και την αντίστοιχη θεωρία, η πιθανότητα είναι πάντοτε ένας μη αρνητικός αριθμός, πολλά από τα θεωρήματα των πιθανοτήτων έχουν επεκταθεί με τρόπο ώστε οι αρνητικοί αριθμοί να ορίζονται ως πιθανότητες.