ΕΝΑ - ΠΡΟΣ - ΕΝΑ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ n ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Γενικεύοντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας για την περίπτωση $n > 2$, θα λέμε ότι ο μετασχηματισμός από το διάνυσμα $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ στο διάνυσμα $\mathbf{y} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ που ορίζεται από την σχέση

$$y_i = g_i(x_1, x_2, ..., x_n), \quad i=1,2,...,n$$

είναι ένα-προς-ένα, αν υπάρχουν συναρτήσεις $h_i(\mathbf{y}) = h_i(y_1, y_2, ..., y_n)$, $i = 1, 2, ..., n$, τέτοιες ώστε $y_i = g_i(\mathbf{x})$, $i=1,2,...,n$ τότε και μόνο τότε αν $x_i = h_i(\mathbf{y})$, $i=1,2,...,n$.

Αν $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $P_{X_1,X_2,...,X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, τότε

$$P_{Y_1,Y_2,...,Y_n}(\mathbf{y}) = P_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(h_1(\mathbf{y}), h_2(\mathbf{y}), \ldots h_n(\mathbf{y})).$$

Παράδειγμα : Έστω $Y_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$, $i=1,2,...,n$. Τότε

$$x_i = h_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_i - y_{i-1}, \quad i=2,...,n,$$

και

$$x_1 = h_1(y_1, y_2, ..., y_n) = y_1.$$

Επομένως,

$$P_{Y_1,Y_2,...,Y_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = P_{X_1,X_2,\ldots,X_n}(y_1, y_2 - y_1, \ldots, y_n - y_{n-1}).$$

Αν οι τυχαίες μεταβλητές $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι συνεχείς με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X_1,X_2,...,X_n}(\mathbf{x})$, τότε η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y_1,Y_2,...,Y_n}(\mathbf{y})$ των μεταβλητών $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ δίνεται από την σχέση

$$f_{Y_1,Y_2,...,Y_N}(\mathbf{y}) = |J(\mathbf{y})| f_{X_1,X_2,...,X_n}(h_1(\mathbf{y}), h_2(\mathbf{y}), \ldots, h_n(\mathbf{y})).$$

Εδώ $J(\mathbf{y})$ παριστάνει την Ιακωβιανή του μετασχηματισμού

$$x_1 = h_1(\mathbf{y}), \; x_2 = h_2(\mathbf{y}), ..., x_n = h_n(\mathbf{y})),$$

η οποία είναι ίση με την ορίζουσα του πίνακα του οποίου το (i,j) στοιχείο είναι $\frac{\partial h_i(\mathbf{y})}{\partial y_j}$.

Παράδειγμα: Έστω (X_1, X_2, X_3) τυχαίο διάνυσμα με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1,x_2,x_3)=\begin{cases}\theta^3\exp\left[-\theta(x_1+x_2+x_3)\right], & \text{αν } 0<x_1,x_2,x_3<\infty,\\ \\ 0, & \text{διαφορετικά}\end{cases}$$

Ας υποθέσουμε ότι επιθυμούμε να προσδιορίσουμε την από κοινού κατανομή των μεταβλητών

$$Y_1=\frac{X_2}{X_1+X_2},\ Y_2=\frac{X_3}{X_1+X_2+X_3},\ Y_3=X_1+X_2+X_3.$$

Παρατηρούμε ότι ο παραπάνω μετασχηματισμός είναι ένα-προς- ένα, δηλαδή υπάρχουν συναρτήσεις $h_i(Y_1,Y_2,Y_3)$, i=1,2,3, τέτοιες ώστε $X_i=h_i(Y_1,Y_2,Y_3)$, i=1,2,3. Συγκεκριμένα,

$$X_1=h_1(Y_1,Y_2,Y_3)=Y_3(1-Y_1)(1-Y_2),\quad X_2=h_2(Y_1,Y_2,Y_3)=Y_1Y_3(1-Y_2),$$

$$X_3=h_3(Y_1,Y_2,Y_3)=Y_2Y_3.$$

Επομένως, η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού θα είναι η ορίζουσα του πίνακα

$$J(y_1,y_2,y_3)=\begin{bmatrix}\frac{\partial h_1}{\partial y_1} & \frac{\partial h_1}{\partial y_2} & \frac{\partial h_1}{\partial y_3}\\ \\ \frac{\partial h_2}{\partial y_1} & \frac{\partial h_2}{\partial y_2} & \frac{\partial h_2}{\partial y_3}\\ \\ \frac{\partial h_3}{\partial y_1} & \frac{\partial h_3}{\partial y_2} & \frac{\partial h_3}{\partial y_3}\end{bmatrix},$$

δηλαδή του πίνακα

$$J(y_1,y_2,y_3)=\begin{bmatrix}-y_3(1-y_2) & -y_3(1-y_1) & (1-y_1)(1-y_2)\\ \\ y_3(1-y_2) & -y_1y_3 & y_1(1-y_2)\\ \\ 0 & y_3 & y_2\end{bmatrix}.$$

Άρα, η Ιακωβιανή δίνεται από την σχέση

$$\left|J(y_1,y_2,y_3)\right|=y_3^2(1-y_2).$$

Κατά συνέπεια, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του διανύσματος (Y_1, Y_2, Y_3) είναι

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) =$$

$$= \left|J(y_1, y_2, y_3)\right| f_{X_1,X_2,X_3}(y_3(1-y_1)(1-y_2), y_1y_3(1-y_2), y_2y_3)$$

$$= \begin{cases} \theta^3 y_3^2 (1-y_2) e^{-\theta y_3}, & \text{αν } 0 < y_1, y_2 < 1, \ 0 < y_3 < \infty \\ \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Επεκτείνοντας τον ένα-προς-ένα γραμμικό μετασχηματισμό της προηγούμενης ενότητας στην περίπτωση n>2 τυχαίων μεταβλητών, μπορούμε να ορίσουμε τον εξής πολυμεταβλητό γραμμικό μετασχηματισμό, ο οποίος χρησιμοποιείται πολύ συχνά στις πρακτικές εφαρμογές:

$$Y_1 = \alpha_{11} X_1 + \alpha_{12} X_2 + \ldots + \alpha_{1n} X_n$$

$$Y_2 = \alpha_{21} X_1 + \alpha_{22} X_2 + \ldots + \alpha_{2n} X_n$$

$$\begin{array}{cccc} . & . & . & . \\ . & . & . & . \\ . & . & . & . \end{array}$$

$$Y_n = \alpha_{n1} X_1 + \alpha_{n2} X_2 + \ldots + \alpha_{nn} X_n$$

Θα λέμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι *αντιστρέψιμος*, *μη ιδιάζων*, ή *ένα-προς-ένα και επί*, εάν υπάρχουν σταθερές $b_{i,j}$, $i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,n$, τέτοιες ώστε $y_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik} x_k$, $i = 1,2,\ldots,n$, τότε και μόνο τότε εάν $x_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k$, i=1,2,…,n.

Στην περίπτωση αυτή,

$$h_i(y) = h_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_{k=1}^{n} b_{ik} y_k \ , \ \ i=1,2,\ldots,n$$

και J(**y**) είναι η ορίζουσα ενός πίνακα B του οποίου το (i, j) στοιχείο είναι b_{ij} . Είναι γνωστό, από την θεωρία πινάκων, ότι η ορίζουσα του πίνακα B είναι η αντίστροφη της ορίζουσας του πίνακα A των συντελεστών του γραμμικού μετασχηματισμού. Ο πίνακας αυτός των συντελεστών έχει ως (i, j) στοιχείο τον συντελεστή α_{ij} . Αν detA συμβολίζει την ορίζουσα του πίνακα A, έπεται ότι η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y_1,Y_2,...,Y_n}(\mathbf{y})$ των μετασχηματισμένων μεταβλητών $Y_1, Y_2, ..., Y_n$ ορίζεται μέσω της από κοινού συνάρτησης πυκνότητας πιθανότητας $f_{X_1,X_2,...,X_n}(\mathbf{x})$ των αρχικών μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_n$ από την σχέση

$$f_{Y_1,Y_2,...,Y_n}(\mathbf{y}) = \frac{1}{|\det A|} f_{X_1,X_2,...,X_n}\left(\sum_{k=1}^{n} b_{1k} y_k, \sum_{k=1}^{n} b_{2k} y_k, ..., \sum_{k=1}^{n} b_{nk} y_k\right).$$

Παράδειγμα: Ας υποθέσουμε ότι X_1, X_2, X_3 είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές που ακολουθούν την τυποποιημένη κανονική κατανομή N(0,1). Ας θεωρήσουμε τον γραμμικό μετασχηματισμό

$$Y_1 = X_1 + X_2 + X_3, \quad Y_2 = X_1 - X_2, \quad Y_3 = X_2 - X_3.$$

Τότε

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

και εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί ότι

$$x_1 = \frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{3}, \quad x_2 = \frac{y_1 - y_2 + y_3}{3}, \quad x_3 = \frac{y_1 - y_2 - 2y_3}{3}$$

και

$$|\det A| = 3.$$

Από το γεγονός ότι X_1, X_2, X_3 είναι αμοιβαία ανεξάρτητες και ισόνομες N(0,1) μεταβλητές, έπεται ότι

$$f_{X_1,X_2,X_3}(x_1, x_2, x_3) = \prod_{i=1}^{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x_i^2}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2+x_3^2)},$$

για κάθε $-\infty < x_1, x_2, x_3 < \infty$. Επομένως, για κάθε $-\infty < y_1, y_2, y_3 < \infty$,

$$f_{Y_1,Y_2,Y_3}(y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^3 e^{-\frac{1}{2}Q(y_1,y_2,y_3)},$$

όπου

$$Q(y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{y_1 + 2y_2 + y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2 + y_3}{3}\right)^2 + \left(\frac{y_1 - y_2 - 2y_3}{3}\right)^2$$

$$= \frac{y_1^2}{3} + \frac{2y_2^2}{3} + \frac{2y_3^2}{3} + \frac{2y_2 y_3}{3}.$$