ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΔΥΟ ΤΥΧΑΙΩΝ ΜΕΤΑΒΛΗΤΩΝ

Στην προηγούμενη ενότητα, συζητήσαμε μετασχηματισμούς της μορφής $Y = g(X)$ μίας τυχαίας μεταβλητής X. Όμως, σε ένα πολυμεταβλητό φαινόμενο, ενδέχεται να θέλουμε να μετασχηματίσουμε τις αρχικές μας μεταβλητές $X_1 , X_2 , ..., X_n$ σε νέες μεταβλητές $Y_i = g_i (X_1 ,X_2 ,...,X_n)$, i=1,2,...,n. Για παράδειγμα, αν $X_1, X_2, ..., X_n$ παριστάνουν τα βάρη ενός οργανισμού στις χρονικές στιγμές $t_1, t_2, ..., t_n$, ενδέχεται να ενδιαφερόμαστε να μελετήσουμε την συμμεταβλητότητα του αρχικού βάρους $Y_1 = X_1$ και των αυξήσεων σε βάρος $Y_j = X_j - X_{j-1}$, j=2, 3, ..., n κατά τη διάρκεια κάθε μιας από τις χρονικές περιόδους που ακολούθησαν.

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε μεθόδους προσδιορισμού της από κοινού κατανομής των τυχαίων μεταβλητών $Y_i = g_i (X_1, X_2, ..., X_n)$, i=1,2,...,n, με βάση την μορφή της από κοινού κατανομής των τυχαίων μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_n$. Για απλότητα, εξετάζεται στην παρούσα ενότητα πρώτα η περίπτωση n=2. Στις ενότητες που ακολουθούν, εξετάζεται η επέκταση της περίπτωσης αυτής όταν $n > 2$ καθώς επίσης και η περίπτωση όπου ενδιαφερόμαστε να ελαττώσουμε τον αριθμό των μεταβλητών $X_1, X_2, ..., X_n$ που έχουμε σε μία μοναδική τυχαία μεταβλητή

$Y = g (X_1, X_2, ..., X_n)$.

Ας υποθέσουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 έχουν μία διμεταβλητή κατανομή. Ενδιαφερόμαστε να προσδιορίσουμε την από κοινού κατανομή των τυχαίων μεταβλητών Y_1, Y_2, όπου αυτές οι νέες μεταβλητές είναι το αποτέλεσμα ενός ένα-προς-ένα μετασχηματισμού $Y_1 = g_1 (X_1, X_2)$, $Y_2 = g_2 (X_1, X_2)$ των X_1, X_2. Θεωρούμε, δηλαδή, την περίπτωση μετασχηματισμών, όπου υπάρχουν δύο συναρτήσεις $h_1 (y_1, y_2)$, $h_2(y_1, y_2)$ τέτοιες ώστε $y_i = g_i (x_1, x_2)$, i=1, 2 τότε και μόνο τότε εάν $x_i = h_i(y_1, y_2)$, i=1, 2. (Είναι φανερό ότι οι συναρτήσεις $h_i(y_1, y_2)$, i=1, 2 είναι οι αντίστροφες των συναρτήσεων $g_i(x_1, x_2)$, $i = 1,2$, δηλαδή $h_i(y_1, y_2) = g_i^{-1}(y_1, y_2)$, i=1, 2).

Έστω ότι μεταβλητές X_1, X_2 είναι διακριτές τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $P_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. Τότε, η από κοινού συνάρτηση πιθανότητας $P_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ των Y_1 , Y_2 δίνεται από τον τύπο

$$P_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = P_{X_1,X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)).$$

Ας θεωρήσουμε τώρα την περίπτωση όπου οι τυχαίες μεταβλητές X_1, X_2 είναι συνεχείς με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)$. Αν οι συναρτήσεις $h_1(y_1, y_2)$ και $h_2(y_1, y_2)$ είναι παραγωγίσιμες ως προς y_1 και y_2, τότε

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = |J(y_1, y_2)| f_{X_1,X_2}(h_1(y_1, y_2), h_2(y_1, y_2)),$$

όπου

$$J(y_1, y_2) = \left(\frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_1}\right)\left(\frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_2}\right) - \left(\frac{\partial h_1(y_1, y_2)}{\partial y_2}\right)\left(\frac{\partial h_2(y_1, y_2)}{\partial y_1}\right)$$

είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού $x_1 = h_1(y_1, y_2)$, $x_2 = h_2(y_1, y_2)$. Η αλήθεια της παραπάνω σχέσης προκύπτει ως αποτέλεσμα του ορισμού της από κοινού συνάρτησης κατανομής $F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ των τυχαίων μεταβλητών Y_1, Y_2 από την σχέση

$$\begin{aligned} F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) &= P\{Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2\} \\ &= \int_{-\infty}^{y_2} \int_{-\infty}^{y_1} f_{Y_1,Y_2}(t_1, t_2)\, dt_1 dt_2, \end{aligned}$$

σε συνδυασμό με το γεγονός ότι

$$\begin{aligned} F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) &= P\{Y_1 \le y_1, Y_2 \le y_2\} \\ &= P\{g_1(X_1, X_2) \le y_1,\ g_2(X_1, X_2) \le y_2\} \\ &= \iint f_{X_1,X_2}(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2 \\ &\quad g_1(x_1, x_2) \le y_1 \\ &\quad g_2(x_1, x_2) \le y_2 \\ &= \int_{-\infty}^{y_2} \int_{-\infty}^{y_1} |J(t_1, t_2)|\, f_{X_1,X_2}(h_1(t_1, t_2), h_2(t_1, t_2))\, dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$ των μεταβλητών Y_1, Y_2 προκύπτει τότε από την σχέση $\frac{\partial^2}{\partial y_1 \partial y_2} F_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)$.

Παράδειγμα: Έστω $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_2$. Τότε,

$$h_1(y_1, y_2) = y_1 - y_2 \quad \text{και} \quad h_2(y_1, y_2) = y_2 ,$$

έτσι ώστε

$$P_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = P_{X_1,X_2}(y_1 - y_2, y_2).$$

Παράδειγμα: Έστω ότι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές οι οποίες παριστάνουν τους χρόνους που απαιτούνται για την ολοκλήρωση δύο εργασιών. Υποθέτοντας ότι οι μεταβλητές X_1 και X_2 έχουν την ίδια μορφή κατανομής και ότι αυτή είναι η Γ με παραμέτρους θ και r, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας των X_1 και X_2 είναι

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1) f_{X_2}(x_2)$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\theta^{2r} x_1^{r-1} x_2^{r-1} e^{-\theta x_1} e^{-\theta x_2}}{[\Gamma(r)]^2}, & \text{αν} \quad 0 < x_1 < \infty, \quad 0 < x_2 < \infty \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ας θεωρήσουμε τώρα τις μεταβλητές $Y_1 = X_1 + X_2$, $Y_2 = X_1/X_2$. Η πρώτη από αυτές τις μεταβλητές παριστάνει τον συνολικό χρόνο που απαιτείται για την ολοκλήρωση των δύο εργασιών, ενώ η δεύτερη παριστάνει τον λόγο των χρόνων που απαιτούνται για τις δύο αυτές εργασίες. Ο μετασχηματισμός $y_1 = x_1 + x_2$, $y_2 = x_1/x_2$ είναι ένα-προς-ένα και

$$x_1 = h_1(y_1, y_2) = \frac{y_1 y_2}{1 + y_2} , \quad x_2 = h_2(y_1, y_2) = \frac{y_1}{1 + y_2} .$$

Η Ιακωβιανή αυτού του μετασχηματισμού είναι

$$J(y_1, y_2) = \left(\frac{y_2}{1 + y_2}\right)\left(\frac{-y_1}{(1 + y_2)^2}\right) - \left(\frac{y_1}{(1 + y_2)^2}\right)\left(\frac{1}{1 + y_2}\right) .$$

$$= -\frac{y_1}{(1 + y_2)^2}$$

Επομένως, η από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας του τυχαίου διανύσματος (Y_1, Y_2) είναι η

$$f_{Y_1,YX_2}(y_1,y_2) = \left|J(y_1,y_2)\right| f_{X_1X_2}(h_1(y_1,y_2),\ h_2(y_1,y_2))$$

$$= \begin{cases} \dfrac{y_1}{(1+y_2)^2}\dfrac{\theta^{2r}\ y_1^{2r-2}\ y_2^{r-1}\ e^{-\theta y_1}}{(1+y_2)^{2r-2}[\Gamma(r)]^2}, & \text{αν } 0 < \dfrac{y_1 y_2}{1+y_2} < \infty \\ & \text{αν } 0 < \dfrac{y_1}{1+y_2} < \infty \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{\theta^{2r}\ y_1^{2r-1}\ e^{-\theta y_1}}{\Gamma(2r)\,B(r,r)}\dfrac{y_2^{r-1}}{(1+y_2)^{2r}}, & \text{αν } 0 < y_1 < \infty \\ & \text{αν } 0 < y_2 < \infty \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Παρατήρηση: Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ότι οι μεταβλητές Y_1, Y_2 έχουν από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας, η οποία είναι το γινόμενο των περιθωρίων συναρτήσεων πυκνότητας των μεταβλητών αυτών, οδηγώντας στο συμπέρασμα ότι οι μεταβλητές Y_1, Y_2 είναι ανεξάρτητες.

ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΟΙ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

Μία ενδιαφέρουσα περίπτωση των μετασχηματισμών που μόλις εξετάσαμε είναι οι λεγόμενοι *διμεταβλητοί γραμμικοί μετασχηματισμοί.*

Έστω X_1, X_2 δύο τυχαίες μεταβλητές με από κοινού συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας $f_{X_1,X_2}(x_1,x_2)$. Ένας διμεταβλητός γραμμικός συνδυασμός από τις μεταβλητές X_1, X_2 στις μεταβλητές Y_1, Y_2 έχει την μορφή

$$Y_1 = \alpha_{11}X_1 + \alpha_{12}X_2\,,$$

$$Y_2 = \alpha_{21}X_1 + \alpha_{22}X_2\,.$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός αυτός είναι ένα-προς-ένα. Δηλαδή $y_i = \alpha_{i1}x_1 + \alpha_{i2}x_2$, i=1, 2, τότε και μόνο τότε αν $x_i = b_{i1}y_1 + b_{i2}y_2$, i=1, 2, όπου

$$b_{11} = \frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad b_{12} = \frac{-\alpha_{12}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}},$$

$$b_{21} = \frac{-\alpha_{21}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}, \quad b_{22} = \frac{\alpha_{11}}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}},$$

με την προϋπόθεση ότι $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} \neq 0$.

Είναι, προφανώς, τότε

$$h_1(y_1, y_2) = b_{11}y_1 + b_{12}y_2, \quad h_2(y_1, y_2) = b_{12}y_1 + b_{22}y_2$$

και επομένως

$$J(y_1, y_2) = (b_{11})(b_{22}) - (b_{12})(b_{21})$$

$$= \frac{(\alpha_{22})(\alpha_{11}) - (-\alpha_{12})(-\alpha_{21})}{(\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21})^2}.$$

$$= \frac{1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι η από κοινού συνάρτηση κατανομής των μεταβλητών Y_1 , Y_2 δίνεται από την σχέση

$$f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = \left|\frac{1}{\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}}\right| f_{X_1, X_2}(b_{11}y_1 + b_{12}y_2, b_{21}y_1 + b_{22}y_2).$$

Για παράδειγμα, αν ενδιαφερόμαστε για τον μέσο $Y_1 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$ και την διαφορά $Y_2 = X_1 - X_2$ των μεταβλητών X_1 , X_2 , τότε $\alpha_{11} = \alpha_{12} = \frac{1}{2}$, $\alpha_{21} = -\alpha_{22} = 1$, $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = -1$ και

$$b_{11} = 1, \ b_{12} = \frac{1}{2}, \ b_{21} = 1, \ b_{22} = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως

$$f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1,X_2}(y_1 + \frac{1}{2}y_2, y_1 - \frac{1}{2}y_2).$$

Παράδειγμα : Ας υποθέσουμε ότι X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυποποιημένες κανονικές μεταβλητές. Δηλαδή, $X_1 \sim N(0,1)$, $X_2 \sim N(0,1)$. Έστω ότι Y_1 και Y_2 ορίζονται όπως και προηγουμένως.

Τότε,

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = f_{X_1}(x_1)f_{X_2}(x_2) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)\right]}{2\pi},$$

έτσι ώστε

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) &= f_{X_1,X_2}(y_1 + \frac{1}{2}y_2, y_1 - \frac{1}{2}y_2) \\ &= \frac{\exp\left\{-\frac{1}{2}\left[(y_1 + \frac{1}{2}y_2)^2 + (y_1 - \frac{1}{2}y_2)^2\right]\right\}}{2\pi} \\ &= \frac{\exp[-\frac{1}{2}2y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2]}{2\pi} \\ &= \left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(2y_1^2)\right]\right\}\left\{\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}y_2^2)\right]\right\} \end{aligned}$$

Προκύπτει, επομένως, ότι οι περιθώριες κατανομές των μεταβλητών Y_1 και Y_2 είναι

$$f_{Y_1}(y_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(2y_1^2)\right],$$

$$f_{Y_2}(y_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2)dy_1 = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}\exp\left[-\frac{1}{2}(\frac{1}{2}y_2^2)\right],$$

Ισχύει τότε ότι $f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) = f_{Y_1}(y_1)f_{Y_2}(y_2)$ και, επομένως, οι μεταβλητές Y_1 και Y_2 είναι ανεξάρτητες και $Y_1 \sim N(0, \frac{1}{2})$, $Y_2 \sim N(0,2)$.