

4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

4.1 ΠΑΡΑΓΟΥΣΑ Ή ΑΝΤΙΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Παράγουσα ή αντιπαράγωγος μιας συνάρτησης $f(x)$ ορισμένη στο $D(f)$ λέγεται η συνάρτηση $F(x)$ για την οποία ισχύει $F'(x)=f(x)$.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $F(x)=\int f(x)dx = \int df(x)$

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού τότε υπάρχει η παράγουσα.

ΠΡΟΤΑΣΗ: Αν $F(x)$ και $G(x)$ είναι διαφορετικές παράγουσες μιας συνάρτησης $f(x)$ τότε διαφέρουν κατά μια σταθερά c δηλαδή:

$$F(x)-G(x)=c.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Η ολοκλήρωση είναι η αντίθετη διαδικασία της παραγώγισης.

4.2 ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

$$1... \int \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \int f_i(x) dx, \lambda_i \text{ σταθερές}$$

ποσότητες.

$$2... \left[\int f(x) dx \right]' = f(x)$$

$$3... \int f'(x) dx = f(x)+c, c \text{ σταθερή ποσότητα.}$$

4.3 ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

$$1... f(x)=0 \quad \Leftrightarrow F(x)=c$$

$$2... f(x)=a \quad \Leftrightarrow F(x)=ax+c$$

$$3... f(x)=x^k \quad \Leftrightarrow F(x)=x^{k+1}/(k+1)+c, k \neq -1$$

$$4... f(x)=e^x \quad \Leftrightarrow F(x)=e^x+c$$

$$5... f(x)=1/x \quad \Leftrightarrow F(x)=\ln|x|+c$$

$$6... f(x)=\cos(x) \quad \Leftrightarrow F(x)=\sin(x)+c$$

$$7... f(x)=\sin(x) \quad \Leftrightarrow F(x)=-\cos(x)+c$$

$$8... f(x)=1/\cos^2(x) \quad \Leftrightarrow F(x)=\tan(x)+c$$

$$9... f(x)=1/\sin^2(x) \quad \Leftrightarrow F(x)=-\cotan(x)+c$$

$$10... f(x)=1/(1+x^2) \quad \Leftrightarrow F(x)=\arctan(x)+c$$

$$11... f(x)=1/\sqrt{1-x^2} \quad \Leftrightarrow F(x)=\arcsin(x)+c$$

$$12... f(x)=a^x \quad \Leftrightarrow F(x)=a^x/\ln(a)+c$$

4.4 ΚΑΝΟΝΕΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ

4.4.1 ΜΕΘΟΔΟΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Έστω f συνεχής στο $D(f)$ και $u=g(x)$ με πεδίο τιμών $R(g)=D(f)$ τότε

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = F(u)+c.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το παραπάνω θεώρημα μας βοηθάει να απλοποιήσουμε τα ολοκληρώματα χρησιμοποιώντας τις παραγώγους των σύνθετων συναρτήσεων.

ΜΕΘΟΔΟΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΥ $\int G(x)dx$:

ΒΗΜΑ 1: Γράφουμε την $G(x) = f(g(x))g'(x)$.

ΒΗΜΑ 2: Θέτουμε $u=g(x)$.

ΒΗΜΑ 3: Υπολογίζουμε $\int G(x)dx = \int f(u)du$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $f(u)$ πρέπει να είναι εύκολα ολοκληρώσιμη.

4.4.2 ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ

ΚΑΝΟΝΑΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΙΚΗΣ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ:

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε ένα ολοκλήρωμα $\int f(x)dx$ όπου η f μπορεί να γραφτεί ως γινόμενο δύο συναρτήσεων h_1 και h_2 (δηλαδή $f(x)=h_1(x)h_2(x)$) και η παραγούσα H_1 της συνάρτησης h_1 είναι εύκολα παραγωγίσιμη τότε

$$\int f(x)dx = H_1(x)h_2(x) - \int H_1(x)h_2'(x)dx.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (I): Αν $\int h_1(x)h_2'(x)dx$ είναι εύκολα υπολογίσιμη τότε έχουμε υπολογίσει και το $\int f(x)dx$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II): Ο κανόνας παραγοντικής ολοκλήρωσης συνεπάγεται από την ιδιότητα

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

θέτοντας $H_1=f$ και $h_2=g$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (III): Η $h_2'(x)$ πρέπει να είναι πιο απλή συνάρτηση από την $h_2(x)$. Η $h_1(x)$ επιλέγεται ώστε να έχει εύκολα υπολογίσιμες παράγουσες.

4.4.3 ΕΙΔΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

$$1... \int e^{ax+b} p(x) dx = \alpha^{-1} e^{ax+b} p(x) - \alpha^{-1} \int e^{ax+b} p'(x) dx$$

όπου $p(x)$ είναι πολυωνυμική συνάρτηση

$$2... \int \sin(ax+b) p(x) dx = \\ = -\alpha^{-1} \cos(ax+b) p(x) + \alpha^{-1} \int \cos(ax+b) p'(x) dx$$

$$3... \int \cos(ax+b) p(x) dx = \\ = \alpha^{-1} \sin(ax+b) p(x) - \alpha^{-1} \int \sin(ax+b) p'(x) dx$$

$$4... \int f(x) \ln(g(x)) dx = \\ = F(x) \ln(x) - \int \frac{f(x)}{g(x)} g'(x) dx$$

όπου f, g είναι ρητές συναρτήσεις.

$$5... \int e^{\alpha x + \beta} \sin(\gamma + \delta x) dx, \quad \int e^{\alpha x + \beta} \cos(\gamma + \delta x) dx$$

θεωρούμε σαν $h_1(x) = e^{\alpha x + \beta}$ και εφαρμόζουμε δύο φορές τον κανόνα παραγοντικής ολοκλήρωσης.

4.4.4 ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

Οι ρητές συναρτήσεις αναφέρονται σε συναρτήσεις που γράφονται σαν λόγος δύο πολυωνύμων δηλαδή $f(x) = p(x)/q(x)$.

ΜΕΡΙΚΑ ΒΑΣΙΚΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$1... \int \frac{1}{\alpha x + \beta} dx = \alpha^{-1} \ln(\alpha x + \beta) + c$$

$$2... \int \frac{1}{(\alpha x + \beta)^k} dx = \alpha^{-1} (\alpha x + \beta)^{-k+1} / (-k+1) + c$$

$$3... \int \frac{x}{(1+x^2)^k} dx = \frac{1}{2} \frac{(1+x^2)^{-k+1} x}{-k+1} + c, k \neq -1$$

$$4... \int \frac{x}{1+x^2} dx = \ln(1+x^2)/2 + c$$

$$5... \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan(x) + c$$

ΔΙΑΔΙΚΑΣΙΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΣΗΣ ΡΗΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΒΗΜΑ 1: Ελέγχουμε αν ο βαθμός του $p(x)$ είναι μικρότερου βαθμού από το $q(x)$. Αν όχι διαιρούμε και προχωρούμε με το υπόλοιπο $r(x)$ δηλαδή γράφουμε

$$p(x)/q(x) = k(x) + r(x)/q(x).$$

ΒΗΜΑ 2: Παραγοντοποιούμε την $q(x)$.

ΒΗΜΑ 3: Για κάθε παράγοντα $(x-\alpha)^k$ γράφουμε

$$A_1/(x-\alpha) + A_2/(x-\alpha)^2 + \dots + A_k/(x-\alpha)^k.$$

Για κάθε παράγοντα $(x^2+bx+c)^m$ γράφουμε

$$(B_1x+\Gamma_1)/(x^2+bx+c) + \dots + (B_kx+\Gamma_k)/(x^2+bx+c)^k$$

ΒΗΜΑ 4: γράφουμε το $p(x)/q(x)$ σαν άθροισμα των παραπάνω συντελεστών και βρίσκουμε τα $A_1, B_1, \Gamma_1, \dots, A_k, B_k, \Gamma_k$.

ΒΗΜΑ 5: Υπολογίζουμε τα ολοκληρώματα με βάση τα βασικά ολοκληρώματα ρητών συναρτήσεων.

4.5 ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ (κατά Riemann): Έστω $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a,b]$ και για οποιοδήποτε διαμερισμό του $[a,b] = [a,x_1] \cup [x_1,x_2] \cup \dots \cup [x_k,b]$ με $x_0=a$ και $x_{k+1}=b$ και για οποιαδήποτε $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ για $i=1, \dots,$

$k+1$ τότε το όριο $\lim_{\delta x_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \delta x_i$, $\delta x_i = x_i - x_{i-1}$

ονομάζεται ολοκλήρωμα κατά Riemann και είναι ίσο με $F(b)-F(a)$.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\int_a^b f(x)dx$ ή $\int_{[a,b]} f(x)dx$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (I): Το ολοκλήρωμα από το a έως το b είναι ίσο με το εμβαδόν που περικλείεται ανάμεσα στην $f(x)$ και στην ευθεία $y=0$ (δηλαδή τον άξονα των X).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II): Το ολοκλήρωμα είναι στην ουσία επέκταση των αθροισμάτων σε συνεχή διαστήματα.

4.5.1 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΣΜΕΝΟΥ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΟΣ

$$1... \int_a^b \sum_{i=1}^k \lambda_i f_i(x) dx = \sum_{i=1}^k \lambda_i \int_a^b f_i(x) dx, \quad \lambda_i \text{ σταθερές}$$

ποσότητες.

$$2... \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$3... \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

4... Αν $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ τότε

$$\int_{x_1}^{x_k} f(x) dx = \sum_{i=1}^{k-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x) dx$$

5... Αν $a < \beta < \gamma$ και $f(x) \geq 0$ για κάθε x τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx \leq \int_a^\gamma f(x) dx$$

6... Αν $f(x) < g(x)$ για κάθε $a < x < \beta$ τότε

$$\int_a^\beta f(x) dx < \int_a^\beta g(x) dx$$

4.6 ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

4.6.1 ΠΡΩΤΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f(x)$ είναι συνεχής στο $[a, +\infty]$

τότε το ολοκλήρωμα $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ ορίζεται σαν το όριο

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - F(a).$$

Ανάλογα έχουμε:

$$\star \int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$$

$$\star \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) - \lim_{a \rightarrow -\infty} F(a)$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν τα παραπάνω όρια είναι ίσα με ένα πραγματικό αριθμό τότε το αντίστοιχο ολοκλήρωμα συγκλίνει διαφορετικά αποκλίνει.

4.6.2 ΔΕΥΤΕΡΟΥ ΤΥΠΟΥ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $f(x)$ είναι συνεχής στο (a,b) και

[1] $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$ ή/και [2] $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = \pm\infty$ τότε το

ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$ ορίζεται σαν το όριο

$$\star \lim_{t \rightarrow a^+} \int_t^b f(x)dx = F(b) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \text{ αν ισχύει η [1]}$$

$$\star \lim_{t \rightarrow b^-} \int_a^t f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - F(a) \text{ αν ισχύει η [2]}$$

$$\star \lim_{t_1 \rightarrow a^+} \lim_{t_2 \rightarrow b^-} \int_{t_1}^{t_2} f(x)dx = \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) - \lim_{x \rightarrow a^+} F(x) \text{ αν ισχύουν}$$

και η [1] και η [2].

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (I): Ανάλογα μπορούμε να ορίσουμε και συνδυασμούς A και B τύπου γενικευμένα ολοκληρώματα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ (II): Αν η συνάρτηση f είναι ασυνεχής σε ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$ τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx$$

4.6.3 ΕΛΕΓΧΟΣ ΣΥΓΚΛΙΣΗΣ ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ

ΘΕΩΡΗΜΑ: Αν $f(x)$ και $g(x)$ είναι συνεχής στο $[a, +\infty)$ και $0 \leq f(x) \leq g(x)$ για κάθε $x \geq a$ τότε

(1) αν $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ συγκλίνει τότε και το

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ συγκλίνει.

(2) αν $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ αποκλίνει τότε και το

$\int_a^{+\infty} g(x)dx$ αποκλίνει.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να γενικευτεί για όλα τα γενικευμένα ολοκληρώματα.

4.7 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΩΝ ΣΤΙΣ ΟΙΚΟΝΟΜΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

4.7.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΕΣΟΔΩΝ ΚΑΙ ΚΟΣΤΟΥΣ

Συνήθως δίδεται η συνάρτηση οριακών εσόδων (ή οριακού κόστους) και ζητούνται οι συναρτήσεις ολικών ή μέσων εσόδων (ή κόστους) δηλαδή:

$$R(q) = \int MR(q) dq \text{ και } C(q) = \int MC(q) dq .$$

4.7.2 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗΣ, ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΗΣ ΚΑΙ ΕΘΝΙΚΟΥ ΕΙΣΟΔΗΜΑΤΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το εθνικό εισόδημα δίδεται σαν άθροισμα του ποσού που καταναλώνουμε και του ποσού που αποταμιεύουμε δηλαδή:

$$\text{ΕΙΣΟΔΗΜΑ} = \text{ΚΑΤΑΝΑΛΩΣΗ} + \text{ΑΠΟΤΑΜΙΕΥΣΗ} \\ [E = K + A].$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: Αν παραγωγίσουμε την παραπάνω

έκφραση προς το εισόδημα έχουμε: $\frac{dK}{dE} + \frac{dA}{dE} = 1$.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η παράγωγος της κατανάλωσης ως προς το εισόδημα, $\frac{dK}{dE}$, ονομάζεται οριακή ροπή προς κατανάλωση.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η παράγωγος της αποταμίευσης ως προς το εισόδημα, $\frac{dA}{dE}$, ονομάζεται οριακή ροπή προς αποταμίευση.

ΟΡΙΣΜΟΣ: Η παράγωγος του εισοδήματος ως προς την αποταμίευση, $\frac{dE}{dA}$, ονομάζεται πολλαπλασιαστής εθνικού εισοδήματος και συμβολίζεται με k.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: $k=1/(\text{οριακή ροπή προς αποταμίευση})$ και $k=1/(1-\text{οριακή ροπή προς κατανάλωση})$.

ΕΡΜΗΝΕΙΑ: Για κάθε νομισματική μονάδα που αποταμιεύεται το εθνικό εισόδημα αυξάνει κατά k μονάδες.

4.7.3 ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΚΑΤΑΝΑΛΩΤΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πλεόνασμα καταναλωτή στο σημείο (q_0, p_0) λέγεται το επιπλέον ποσό που διατίθεται να πληρώσει ο καταναλωτής για προϊόντα που πωλούνται πάνω από την τιμή p_0 και δίδεται ως:

$$(i) \quad CS = \int_0^{q_0} D^{-1}(q) dq - p_0 q_0 \quad \text{αν η ζήτηση}$$

περιγράφεται από τη σχέση $p = D^{-1}(q)$ ή

$$(ii) \quad CS = \int_{p > p_0, q > 0} D(p) dp \quad \text{αν η ζήτηση}$$

περιγράφεται από τη σχέση $q = D(p)$.

4.7.4 ΠΛΕΟΝΑΣΜΑ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πλεόνασμα παραγωγού στο σημείο (q_1, p_1) λέγεται το επιπλέον ποσό που διατίθεται να χάσει ο παραγωγός προσφέροντας τα αγαθά του σε τιμή μικρότερη από την τιμή p_1 και δίδεται ως:

$$(i) \quad PS = p_1 q_1 - \int_0^{q_1} S^{-1}(q) dq \quad \text{αν η προσφορά}$$

περιγράφεται από τη σχέση $p = S^{-1}(q)$ ή

$$(iii) \quad PS = \int_{p < p_1, q > 0} S(p) dp \quad \text{αν η προσφορά}$$

περιγράφεται από τη σχέση $q = S(p)$.