ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΙΓΑΙΟΥ

ΤΜΗΜΑ ΔΙΟΙΚΗΣΗΣ ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
Α Εξάμηνο

ΙΩΑΝΝΗΣ ΝΤΖΟΥΦΡΑΣ

1 ΕΙΣΑΓΩΓΗ

1.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ;

- Η επιστήμη των αριθμών
- Βασανιστήριο για τους μαθητές και φοιτητές
- Τέχνη για τους μαθηματικούς
- Η βάση για (σχεδόν) όλες τις θετικές επιστήμες
- Από την επιστήμη των μαθηματικών γεννήθηκε η επιστήμη της στατιστικής, που έχει χαρακτηριστεί «η επιστήμη των επιστημών». Αποτελεί το ποσοτικό μέρος όλων των επιστημών, από φιλοσοφία έως οικονομικά (οικονομετρία) και ψυχολογία (ψυχομετρία).

1.2 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΟΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΙ;

- Είναι οι επιστήμονες που προάγουν την επιστήμη των μαθηματικών, δηλαδή αποδεικνύουν ένα θεώρημα (μια μαθηματική αλήθεια).
- Επειδή η δουλειά τους δεν είναι κατανοητή από τους κοινούς θνητούς (μερικές φορές ούτε από τους ίδιους τους μαθηματικούς) είναι απόμακροι.
- Τις περισσότερες φορές τα θεωρήματα είναι ξεκομμένα από την πραγματικότητα και δεν έχουν καμιά (άμεση) εφαρμογή. Πολλές φορές θεωρίες των μαθηματικών εφαρμόστήκαν πολλά χρόνια αργότερα σε φαινομενικά άσχετους κλάδους της επιστήμης.

Παραδείγματα:

1. *Στατιστική* (Ποσοτικοποίηση της Αβεβαιότητας). Χρησιμοποιείται για την απόδειξη σχέσεων και φαινομένων.
2. *Θεωρία του χάους*. Εφευρέθηκε στις αρχές του αιώνα χωρίς να φαίνεται να έχει καμιά εφαρμογή και σήμερα εφαρμόζεται ευρέως στους Η/Υ (fractals).
3. *Οικονομικά – Οικονομετρία*: Βασίζουν την αρχή τους σε μαθηματικούς νόμους και κανόνες.

2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

2.1 ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ – ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΙ

2.1.1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ ΤΟ ΣΥΝΟΛΟ;

Θεμελιωτής: Cantor (1845-1918)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Σύνολο είναι η συλλογή (ομάδα) διακεκριμένων και αυστηρώς καθορισμένων αντικειμένων τα οποία λαμβάνονται ως μια ενότητα.

Παράδειγμα:

Οι παίκτες του Ολυμπιακού

Οι φοιτητές της σχολής Διοίκησης

Οι κάτοικοι της Χίου

2.1.2 ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΤΟΥ ΣΥΝΟΛΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Τα αντικείμενα που αποτελούν ένα σύνολο ονομάζονται στοιχεία (elements).

Παράδειγμα: Ο Τζιοβάνι είναι ένα στοιχείο του συνόλου των παικτών του Ολυμπιακού.

- Συμβολισμός 1: Έστω Α σύνολο και α ένα στοιχείο. Τότε με α$\in$Α συμβολίζουμε την πρόταση «Το στοιχείο α ανήκει στο σύνολο Α», ενώ με α$\notin$Α συμβολίζουμε την πρόταση «Το στοιχείο α δεν ανήκει στο σύνολο Α».
- Συμβολισμός 2 (Άμεσος προσδιορισμός): Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ τα στοιχεία ενός συνόλου Α, τότε μπορούμε να γράψουμε το Α ως $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$.
- Συμβολισμός 3 (Έμμεσος προσδιορισμός): Αν τα στοιχεία ενός συνόλου Α ικανοποιούν μια σχέση τότε μπορούμε να γράψουμε Α={Σχέση}, π.χ αν Α={1,2,3,4,5} τότε Α=$\{x \in N : x \leq 5\}$.

Παραδείγματα:

- Τζιοβάνι $\in$ Ολυμπιακό
- Βαζέχα $\notin$ Ολυμπιακό
- Ολυμπιακός={Ελευθερόπουλος,…}
- Αμυντικοί Παναθηναϊκού={ $x \in$ Παναθηναϊκό: x παίζει άμυνα}

2.1.3 ΜΕΡΙΚΑ ΓΝΩΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ

- ✎ ΦΥΣΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: $N = \{0,1,2,3,...\}$
- ✎ ΑΚΕΡΑΙΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: $Z = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$
- ✎ ΡΗΤΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: $Q = \left\{x = \frac{a}{b} : a,b \in Z\right\}$
- ✎ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: R
- ✎ ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ: $C = \{a + bi : (a,b) \in R\}$, $i = \sqrt{-1}$
- ✎ ΚΕΝΟ ΣΥΝΟΛΟ: $\Phi = \{\ \}$ ή $\varnothing$.

Z^*, N^*, R^*, Q^*, C^*: είναι τα αντίστοιχα σύνολα, χωρίς το μηδέν.

2.1.4 ΠΛΗΘΟΣ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ Ή ΠΛΗΘΑΡΙΘΜΟΣ (CARDINALITY)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πληθάριθμος ενός συνόλου A είναι ο αριθμός (πλήθος) των στοιχείων του.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: |A|

Παραδείγματα:

1. Έστω A={1,2,5,7}, τότε |A|=4
2. Έστω A={Οι κάτοικοι της πόλης της Χίου}, τότε |A|=36.000

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο ονομάζεται **πεπερασμένο** αν |A|=n, $n \in N$. Κάθε σύνολο που δεν είναι πεπερασμένο λέγεται **απειροσύνολο**.

2.1.5 ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1) Να εξετάσετε αν το 2 ανήκει στα ακόλουθα σύνολα:

a) A={1,2,3}

b) B={4,3,5}

c) C={3,7,10,15,33}

Απάντηση: $2 \in A$, $2 \notin B$, $2 \notin C$.

2) Υπολογίστε το πλήθος των παραπάνω συνόλων

Απάντηση: |A|=3, |B|=3, |C|=5.

2.2 ΣΧΕΣΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

2.2.1 ΙΣΟΤΗΤΑ ΔΥΟ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο σύνολα Α, Β είναι ίσα αν $\forall x \in A \Leftrightarrow x \in B$ (δηλαδή για κάθε x το οποίο ανήκει στο Α τότε x ανήκει στο Β και αντιστρόφως).

Με απλά λόγια, τα σύνολα Α και Β είναι ίσα αν όλα τα στοιχεία του Α είναι και στοιχεία του Β και αντίστροφα.

Άσκηση: Είναι ίσα τα παρακάτω σύνολα;

a) $A_1 = \{1,3,5\}$ και $B_1 = \{2,4,6\}$

b) $A_2 = \{100,98,...,2\}$ και $B_2 = \{x \in N : 2 \leq x \leq 100\}$

c) $A_3 = \{1,3,5,...,99\}$ και $B_3 = \{99,97,95,...,1\}$

Απάντηση:

a) $A_1 \neq B_1$ εφόσον $1 \in A_1$ αλλά $1 \notin B_1$

b) $A_2 = B_2 = \{2,4,6,...,100\} = \{2k, k \in N, k \leq 50\}$

c) $A_3 = B_3 = \{1,3,5,...,99\} = \{2k-1, k \in N, k \leq 50\}$

2.2.2 ΥΠΟΣΥΝΟΛΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο Α καλείται υποσύνολο του Β αν $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $A \subseteq B$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο Α καλείται «γνήσιο υποσύνολο» του Β αν $\forall x \in A \Rightarrow x \in B$ και $|A| < |B|$.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $A \subset B$

2.2.3 ΙΣΟΔΥΝΑΜΙΑ ΣΥΝΟΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο σύνολα Α και Β λέγονται ισοδύναμα αν |A|=|B|.

2.3 ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΟΛΩΝ

2.3.1 ΈΝΩΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ (UNION)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο Σ ονομάζεται ένωση δύο συνόλων Α και Β αν

$$\forall x \in \Sigma \Leftrightarrow (x \in A) \text{ ή } (x \in B)$$

(Κάθε στοιχείο του Σ ανήκει στο Α ή Β σύνολο και κάθε στοιχείο των Α ή Β ανήκουν στο Σ).

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\Sigma = A \bigcup B$

Παράδειγμα: {άρτιοι} $\cup$ {περιττοί}=N

2.3.2 ΤΟΜΗ ΣΥΝΟΛΩΝ (INTERSECTION)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο Σ λέγεται τομή των συνόλων Α και Β αν

$$\forall x \in \Sigma \Leftrightarrow (x \in A) \text{ και } (x \in B)$$

(Το σύνολο Σ περιλαμβάνει τα κοινά στοιχεία των συνόλων Α και Β).

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\Sigma = A \cap B$

Παράδειγμα: {άρτιοι} $\cap$ {περιττοί}= Ø

{1,3,6} $\cap$ {1,2,4,6}={1,6}

2.3.3 ΔΙΑΦΟΡΑ Η ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΣΥΝΟΛΩΝ (DIFFERENCE)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο Σ είναι η διαφορά του συνόλου Β από το Α αν

$$\forall x \in \Sigma \Leftrightarrow (x \in A) \text{ και } (x \notin B)$$

(Το σύνολο Σ περιλαμβάνει τα στοιχεία του Α που δεν είναι στοιχεία του Β).

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\Sigma = A - B$ ή $\Sigma = A \setminus B$

Παράδειγμα: N – {άρτιοι} = {περιττοί}

Z – N = {…-3, -2, -1}

2.3.4 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΟ ΣΥΝΟΛΟ Η ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ ΕΝΟΣ ΣΥΝΟΛΟΥ (COMPLEMENT)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω ένα σύνολο Ω το οποίο θεωρούμε ως σύνολο αναφοράς. Τότε συμπλήρωμα του συνόλου Α ως προς Ω είναι η διαφορά Ω – Α.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\overline{A} = \Omega - A$ ή $\overline{A_\Omega} = \Omega - A$

Σημείωση: $A - B = A \cap \overline{B_\Omega}$ αν το $\Omega \supseteq A$ και $\Omega \supseteq B$

2.3.5 ΞΕΝΑ ΣΥΝΟΛΑ (DISJOINT SETS)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Δύο σύνολα $A \neq \varnothing$, $B \neq \varnothing$ λέγονται ξένα αν η τομή τους είναι το κενό σύνολο ($A \cap B = \varnothing$), δηλαδή δεν έχουν κοινά σημεία.

Παραδείγματα:

- {άρτιοι} $\cap$ {περιττοί}= Ø
- {Φοιτητές Αιγαίου} $\cap$ {Φοιτητές Ο.Π.Α}=Ø
- {Φοιτητές Αιγαίου} $\cap$ {Φοιτητές ΠΑ.ΠΕΙ}=Ø

2.4 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΣΥΝΟΛΩΝ

2.4.1 ΈΝΩΣΗ

1. $A \cup A = A$
2. $A \cup \overline{A} = A$
3. $A \cup B = B \cup A$
4. $A \cup B = \varnothing \Leftrightarrow A = \varnothing$ και $B = \varnothing$
5. $A \subseteq B \Rightarrow (A \cup \Gamma) \subseteq (B \cup \Gamma)$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B$
7. $A \subseteq A \cup B$ και $B \subseteq A \cup B$

2.4.2 ΤΟΜΗ

1. $A \cap A = A$
2. $A \cap \Omega = A$
3. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
4. $A \cap B \subseteq A$ και $A \cap B \subseteq B$
5. $A \cap B = B \cap A$
6. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap \Gamma \subseteq B \cap \Gamma$
7. $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$
8. $(A \cap B) \cap \Gamma = A \cap (B \cap \Gamma)$

2.4.3 ΔΙΑΦΟΡΑ

1. $(A - B) \cap B = \varnothing$
2. $A - B \subseteq A$
3. $A - B = A \Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$

2.4.4 ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑ

1. $A \cup \overline{A} = \Omega$
2. $A \cap \overline{A} = \varnothing$
3. $\overline{\overline{A}} = A$
4. $A \subseteq B \Leftrightarrow \overline{A} \supseteq \overline{B}$
5. $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$
6. $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$

2.4.5 ΓΕΝΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1. $A \cup (B \cap \Gamma) = (A \cup B) \cap (A \cup \Gamma)$
2. $A \cap (B \cup \Gamma) = (A \cap B) \cup (A \cap \Gamma)$
3. $A \cup (A \cap B) = A \cap (A \cup B) = A$

2.5 ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

2.5.1 ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΖΕΥΓΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο δύο στοιχείων (x, y) στο οποίο μπορεί να οριστεί ποιο είναι πρώτο και ποιο δεύτερο λέγεται «διατεταγμένο ζεύγος».

ΙΣΟΤΗΤΑ: $(x_1, y_1) = (x_1, y_1) \Leftrightarrow x_1 = x_2 \;\&\; y_1 = y_2$

Συντεταγμένες ονομάζονται οι τιμές *x* και *y*.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\mathbf{X} \longrightarrow \mathbf{Y}$

2.5.2 ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΟ ΖΕΥΓΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Καρτεσιανό γινόμενο των συνόλων *A* και *B* ονομάζεται το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών (x, y) με $x \in A$ και $y \in B$.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $A \times B = \{(x, y) : x \in A \;\&\; y \in B\}$

2.5.3 ΔΥΑΔΙΚΗ Η ΔΙΜΕΛΗΣ ΣΧΕΣΗ ΑΠΟ ΤΟ *A* ΣΤΟ *B*

ΟΡΙΣΜΟΣ: Κάθε υποσύνολο Σ του $A \times B$ ορίζει μια διμελή σχέση από το *A* στο *B*.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\Sigma : A \to B$ ή $A \xrightarrow{\Sigma} B$

Παράδειγμα: $A = R$, $B = R$

$$\Sigma = \{(x, y) : y = 2x\}$$

Το Σ ορίζει μια σχέση από το $A \xrightarrow{\Sigma} B = R \xrightarrow{\Sigma} R$

2.5.4 ΔΙΑΤΕΤΑΓΜΕΝΗ ν – αδα

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα σύνολο $S = (a_1, a_2, ..., a_\nu)$ ν στοιχείων το οποίο ορίζεται με συγκεκριμένη σειρά λέγεται «διατεταγμένη ν-άδα στοιχείων».

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: $\tilde{S}$ ή $\vec{S}$

Σημείωση: Είναι γενίκευση της δυάδας.

2.5.5 ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ Ν – ΣΥΝΟΛΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Το σύνολο των διατεταγμένων ν-άδων που ορίζονται από το σύνολο $A_1 \times A_2 \times ... \times A_\nu = \{(x_1, x_2, ..., x_\nu) : x_i \in A_i, \forall i = 1,2,...,\nu\}$ καλείται καρτεσιανό γινόμενο των $A_1, A_2, ..., A_\nu$. Το στοιχείο x_i είναι η i – συντεταγμένη της διατεταγμένης ν-άδας.

2.6 ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΜΕΛΩΝ ΣΧΕΣΕΩΝ

2.6.1 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΣΧΕΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω Σ μια διμελής σχέση από το *A* στο *B*, τότε $\Sigma^{-1} = \{(y, x) : (x, y) \in \Sigma\}$, δηλαδή $\Sigma^{-1} \subseteq B \times A$ είναι μια διμελής σχέση από το *B* στο *A*.

2.6.2 ΠΕΔΙΟ ΟΡΙΣΜΟΥ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πεδίο ορισμού Σ_0 της σχέσης $\Sigma \subseteq A \times B$ ορίζουμε το σύνολο:

$$\boxed{\Sigma_0 = \{x \in A : \exists y \in B \text{ τέτοιο ώστε } (x, y) \in \Sigma\}}$$

δηλαδή όλες οι τιμές του x για τις οποίες υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in \Sigma$.

2.6.3 ΠΕΔΙΟ ΤΙΜΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Πεδίο τιμών Σ_r της σχέσης $\Sigma \subseteq A \times B$ ορίζουμε το σύνολο:

$$\boxed{\Sigma_r = \{y \in B : \exists x \in A \text{ τέτοιο ώστε } (x, y) \in \Sigma\}}$$

δηλαδή όλες οι τιμές του y για τις οποίες υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $(x, y) \in \Sigma$.

2.6.4 ΕΙΚΟΝΑ

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ως εικόνα $\Sigma(x)$ ενός στοιχείου $x \in \Sigma_0$ ορίζουμε το σύνολο

$$\Sigma(x) = \{y \in B : (x, y) \in \Sigma\}$$

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Εικόνα $\Sigma(\Gamma)$ ενός συνόλου $\Gamma \subseteq \Sigma_0$ ορίζεται η ένωση των εικόνων όλων των στοιχείων του Γ δηλαδή $\Sigma(\Gamma) = \bigcup_{x\in\Gamma} \Sigma(x)$.

2.6.5 ΓΙΝΟΜΕΝΟ Ή ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΧΕΣΕΩΝ

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ</u>: Γινόμενο ή σύνθεση των σχέσεων $\Sigma_1 \subseteq A\times B$ και $\Sigma_2 \subseteq B\times\Gamma$ είναι μια σχέση $\Sigma_2 \circ \Sigma_1$ η οποία ορίζεται ως εξής:

$$\boxed{\begin{array}{c}\Sigma_2 \circ \Sigma_1 = \{(x,z)\in A\times\Gamma : \exists y\in B \text{ τέτοιο ώστε} \\ (x,y)\in \Sigma_1 \ \&\ (y,z)\in\Sigma_2\}\end{array}}$$

2.6.6 ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

$\Pi = \{(1,2),(2,4),(3,6),...\} \subseteq R^2$

$\mathrm{P} = \{(1,10),(2,100),(3,1000),...\}$

Μπορούμε να γράψουμε:

$$\Pi = \{(k,2k), k\in N^*\},$$

$$\mathrm{P} = \{(k,10^k), k\in N^*\}$$

Για το Π έχουμε:

$$\Pi^{-1} = \{(2,1),(4,2),(6,3),...\} = \{(2k,k), k\in N^*\},\ \Pi_0 = N^*$$

$$\Pi_r = \{2,4,6,...\} = \text{άρτιοι},\ \Pi(x) = \{2x\}$$

Για το Ρ έχουμε:

$$\mathrm{P}^{-1} = \{(10,1),(100,2),(1000,3),...\} = \{(10^k,k), k\in N^*\},$$

$$\mathrm{P}_0 = N^*$$

$$\mathrm{P}_r = \{10,100,1000,...\} = \{10^k : k\in N^*\},\ \mathrm{P}(x) = \{10^x\}$$

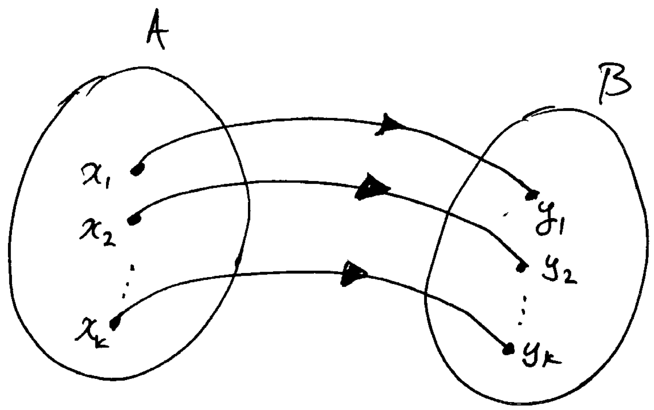
$$\mathrm{P}\circ\Pi = \{(1,100),(2,10^4),(3,10^6),...\},\ \mathrm{P}\circ\Pi(x) = \{10^{2x}\}$$

$$(\mathrm{P}\circ\Pi)_0 = \Pi_0 = N^*$$

$$(\mathrm{P}\circ\Pi)_r = \{10^{2k}, k\in N^*\}$$

2.6.7 ΒΕΛΟΕΙΔΕΣ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

Τα ζευγάρια (x, y) μπορούν γενικά να παρασταθούν ως εξής:



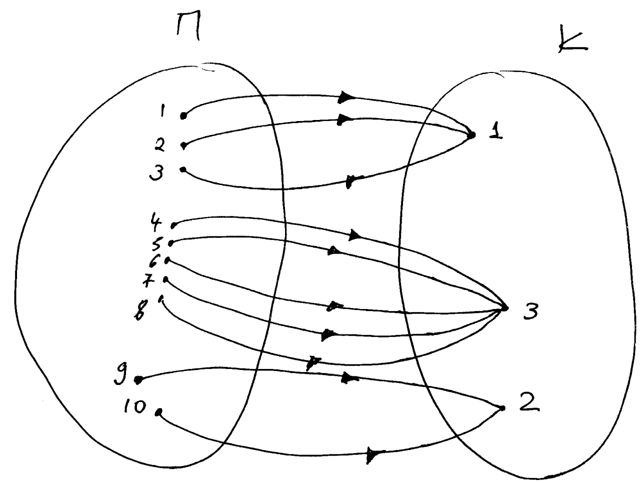
Παράδειγμα: Έστω ότι έχουμε 10 καταναλωτές και 3 καταστήματα, τότε:

$$\Pi = \{1,2,...,10\} \text{ και } K = \{1,2,3\}$$

Η σχέση πελάτη – καταστήματος δίνεται από το καρτεσιανό γινόμενο $\Sigma_1 \subseteq \Pi \times K$ με

$$\Sigma_1 = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,3),(5,3),(6,3),(7,3),(8,3),(9,2),(10,2)\}$$

και αναπαρίσταται:



2.6.8 ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΑ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑΤΑ

Χρησιμοποιούνται κυρίως σε περιπτώσεις που τα σύνολα αναφοράς συγκροτούνται από πραγματικούς αριθμούς.

Παράδειγμα 1

Έστω $A = \{0,1,2,3,4,5\}$ και $\Sigma_1 \subseteq A \times A$ με

$\Sigma_1 = \{(0,0),(0,1),(1,1),(1,2),(2,2),(1,3),(1,0),(0,2),(2,1),$
$(2,0),(0,3),(3,1),(3,0),(0,4),(4,0)\}$

Ζητείται να βρεθεί η αλγεβρική διατύπωση του Σ_1 με τη βοήθεια του καρτεσιανού διαγράμματος.

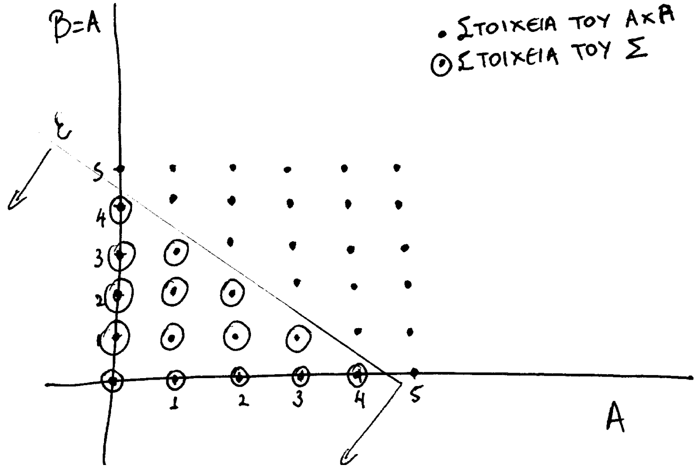
$\Sigma_1 = \{(x,y) \in N^* : (x,y)$ κάτω της ευθείας ε$\}$

ε $\rightarrow$ περνάει από τα σημεία (5,0) και (0,5)

Χρησιμοποιούμε τον τύπο: $\dfrac{x-x_1}{y-y_1} = \dfrac{x_2-x_1}{y_2-y_1}$

$$ή \quad \frac{x-5}{y-0} = \frac{0-5}{5-0} \Leftrightarrow \frac{x-5}{y} = -1 \Leftrightarrow x+y=5$$

Άρα $\Sigma_1 = \{(x,y) \in N^{*2} \times N^* : x+y<5\}$

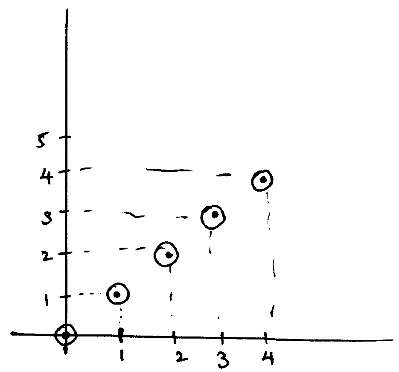


Παράδειγμα 2

Έστω $A = \{0,1,2,3,4,5,6\}$,

$\Sigma_2 = \{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$\Sigma_2 = \{(x,x) \in N^* : x<5\} = \{(x,y) \in N^* \times N^* : x=y, x<5\}$



2.6.9 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΣΧΕΣΕΩΝ

Έστω $\Sigma \subseteq A \times B$:

1) Το Σ έχει την **ανακλαστική** ιδιότητα αν

$$\forall x \in \Sigma_0 \Rightarrow (x, x) \in \Sigma$$

2) Το Σ έχει την **μεταβατική** ιδιότητα αν,

δεδομένου ότι $\left.\begin{matrix}(x, y) \in \Sigma \\ (y, z) \in \Sigma\end{matrix}\right\} \Rightarrow (x, z) \in \Sigma$

3) Το Σ έχει την **συμμετρική** ιδιότητα αν

$$\forall (x, y) \in \Sigma \Rightarrow (y, x) \in \Sigma$$

4) Το Σ έχει την **αντισυμμετρική** ιδιότητα αν

$$[(x, y) \in \Sigma \,\&\, (y, x) \in \Sigma] \Rightarrow x = y$$

2.7 ΘΕΩΡΙΑ ΓΡΑΦΗΜΑΤΩΝ

2.7.1 ΚΑΤΕΥΘΥΝΟΜΕΝΟ ΓΡΑΦΗΜΑ (DIRECTED GRAPH)

ΟΡΙΣΜΟΣ: Ένα διατεταγμένο ζεύγος $G = (V, A)$ με $A \subseteq V \times V$ λέγεται κατευθυνόμενο γράφημα. Τα στοιχεία του V λέγονται *κόμβοι ή κορυφές* (nodes) και τα στοιχεία του A *τόξα* (arcs). Αν A=Ø τότε το γράφημα ονομάζεται *κενό ή εκφυλισμένο*.

Παρατήρηση: Σε κάθε διμελή σχέση αντιστοιχεί ένα γράφημα.

ΣΥΜΒΟΛΙΣΜΟΣ: Για τους κόμβους: •

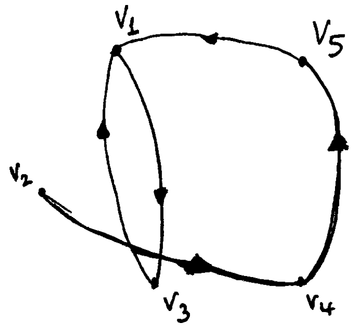
Για τα τόξα: $\longrightarrow$

<u>Παράδειγμα</u>

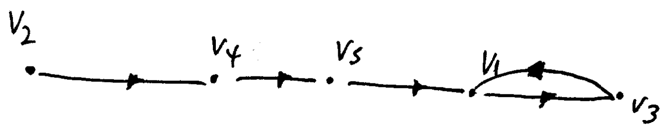
Έστω $G=(V,A)$ με $V=\{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ και

$A=\{(v_1,v_3),(v_3,v_1),(v_2,v_4),(v_4,v_5),(v_5,v_1)\}$.

Τότε



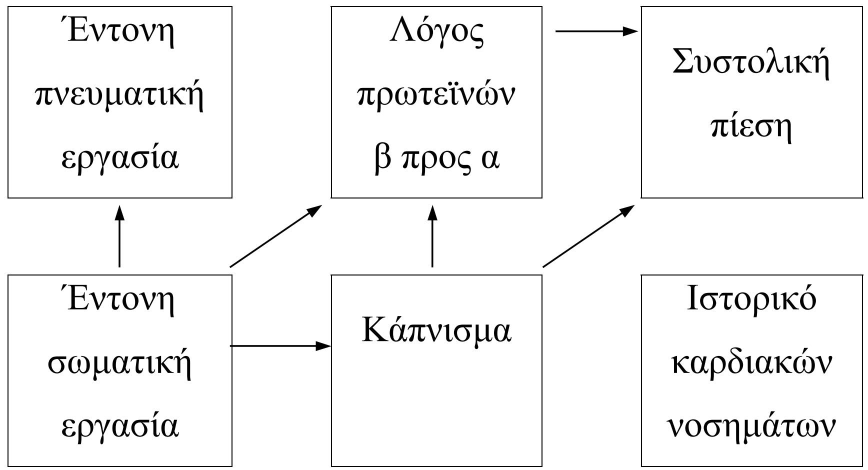
ή



<u>Παράδειγμα 1 από Στατιστική</u>: ***Παράγοντες κινδύνου καρδιακών νοσημάτων***

(Edwards & Havarek, 1985, JASA)

1841 άνδρες εξετάστηκαν για 6 παράγοντες κινδύνου καρδιακών νοσημάτων. Τα τόξα υποδεικνύουν σημαντική στατιστική σχέση.



Παράδειγμα 2 από Στατιστική: ***Μαθηματικά στο σχολείο***

Fowlkes *et.al* (1988) σε σχολείο του New Jersey