

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

ΠΙΝΑΚΕΣ ΠΟΛΛΑΠΛΩΝ ΚΙΝΔΥΝΩΝ (MULTIPLE DECREMENT TABLES)

Στον πίνακα επιβίωσης θεωρούμε τον αριθμό ζώντων στην κάθε ηλικία ℓ_x αρχίζοντας από μια ομάδα γεννήσεων ζώντων που αποτελεί την ρίζα του πίνακα και μελετάμε την εξέλιξη (συρρίκνωση) αυτής της ομάδας (γενεάς) λόγω της θνησιμότητας.

Το μέγεθος λοιπόν αυτής της αρχικής ομάδας ℓ_0 ατόμων ελαττώνεται διαδοχικά λόγω των θανάτων (${}_n d_x$).

Ο πίνακας επιβίωσης λοιπόν αποτελεί ένα πίνακα ενός μοναδικού κινδύνου, μιας μόνο αιτίας συρρίκνωσης: του θανάτου.

Συχνά σε δημογραφικά προβλήματα θέλουμε να ορίσουμε τον αριθμό ζώντων σε μια ομάδα η οποία συρρικνώνεται σαν αποτέλεσμα δύο ή περισσοτέρων παραγόντων (αιτίων συρρίκνωσης), πχ. αν η αρχική ομάδα αποτελείται από ένα αριθμό άγαμων, αυτή διαδοχικά συρρικνώνεται λόγω της θνησιμότητας και της γαμηλιότητας. Αν η αρχική ομάδα αποτελείται από ένα αριθμό εργαζομένων, αυτή διαδοχικά συρρικνώνεται λόγω της θνησιμότητας, των απολύσεων, των παραιτήσεων, ή της συνταξιοδότησης των μελών της. Κάθε ένας από αυτούς τους παράγοντες αποτελεί αιτία εξόδου των μελών από την αρχική ομάδα. Ένα άλλο ευρύτατο πεδίο εφαρμογής ενός πίνακα πολλαπλών κινδύνων είναι η μελέτη της θνησιμότητας κατά αιτίες θανάτου. Για την κατασκευή τέτοιου πίνακα πρέπει λοιπόν να θεωρηθούν περισσότεροι του ενός κίνδυνοι (αιτίες συρρίκνωσης της αρχικής ομάδας, αιτίες εξόδου των μελών από την αρχική ομάδα).

4.1 Κατασκευή ενός Πίνακα Πολλαπλών Κινδύνων

Ας θεωρήσουμε σαν παράδειγμα, μια αρχική ομάδα 10.000 απασχολουμένων ηλικίας 45 ετών και να μελετήσουμε πώς αυτή η ομάδα διαδοχικά συρρικνώνεται λόγω τριών παραγόντων: 1) την θνησιμότητα των μελών της, 2) των απολύσεων και 3) της πρόωρης συνταξιοδότησης.

Ο πίνακας που ακολουθεί αποτελεί μέρος ενός πίνακα πολλαπλών κινδύνων.

x	ℓ_x	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
45	10.000	28	42	20
46	9910	30	46	24
47	9810	32	54	29
48	9695	37	22	31
49	9605
...

όπου x: η ηλικία

ℓ_x : ο αριθμός ατόμων ηλικίας x

- $d_x^{(1)}$: οι θάνατοι ατόμων ηλικίας $[x, x+1)$
 $d_x^{(2)}$: οι απολύσεις ατόμων ηλικίας $[x, x+1)$
 $d_x^{(3)}$: οι συνταξιοδοτήσεις ατόμων ηλικίας $[x, x+1)$

Έτσι
$$\ell_{n+1} = \ell_x - d_x^{(1)} - d_x^{(2)} - d_x^{(3)}$$

και
$$d_x = d_x^{(1)} + d_x^{(2)} + d_x^{(3)}$$

όπου d_x : ο συνολικός αριθμός ατόμων που προχωρούν από την ομάδα σε ηλικία του διαστήματος $[x, x+1)$.

Να ορίσουμε τώρα την πιθανότητα αποχώρησης από την αιτία i , δεδομένων των υπολοίπων κινδύνων, ατόμων ηλικίας $[x, x+1)$, $Q_x^{(i)}$:

$$Q_x^{(i)} = \frac{d_x^{(i)}}{\ell_x}, \quad i = 1, 2, 3$$

Τα $Q_x^{(i)}$ αποκαλούνται **εξαρτημένες πιθανότητες κινδύνων**, και είναι εξαρτημένα μεταξύ τους εφ' όσον:

$$\sum_i Q_x^{(i)} = \frac{d_x}{\ell_x} = Q_x$$

Το Q_x αποτελεί την πιθανότητα κάποιας ηλικίας x να αποσπαστεί από τον πληθυσμό στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$. Βάσει των τιμών αυτών των πιθανοτήτων και των τιμών ℓ_x μπορούν να υπολογιστούν οι υπόλοιπες συναρτήσεις του πίνακα επιβίωσης:

$$L_x, T_x, e_x^o$$

Παράλληλα μπορούν να υπολογιστούν ανεξάρτητες πιθανότητες κινδύνων, $q_x^{(i)}$, από την σχέση:

$$q_x^{(i)} = \frac{d_x^{(i)}}{\ell_x^{(i)}}, \quad i = 1, 2, 3$$

Όπου $d_x^{(i)}$ οι αποχωρήσεις από την ομάδα ατόμων ηλικίας $[x, x+1)$ από την αιτία i , και $\ell_x^{(i)}$ ο αριθμός ατόμων που θα έφτανε την ακριβή ηλικία x αν στον υπό εξέταση πληθυσμό επιδρούσε ο παράγοντας i σαν μόνος κίνδυνος (αιτία συρρίκνωσης).

Το $q_x^{(i)}$ λοιπόν είναι η πιθανότητα αποχώρησης ατόμων ηλικίας $[x, x+1)$ λόγω της αιτίας i , αν αυτή η αιτία ήταν ο μόνος κίνδυνος που επιδρούσε στην υπό εξέταση ομάδα.

Τα $q_x^{(i)}$ είναι κατά συνέπεια ανεξάρτητα μεταξύ τους. Στο παράδειγμα μας έχουμε:

x	$Q_x^{(1)}$	$Q_x^{(2)}$	$Q_x^{(3)}$	Q_x	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$	$q_x^{(1)}$	$q_x^{(2)}$	$q_x^{(3)}$
45	0.00280	0.00420	0.00200	0.0090	10.000	10.000	0.00280	0.00280	0.00420	0.00200
46	0.00303	0.00464	0.00242	0.0100	9972	9980	0.00300	0.00462	0.00462	0.00240
47	0.00326	0.00550	0.00296	0.0118	9942	9956	0.00321	0.00545	0.00545	0.00291
48	0.00382	0.00227	0.00320	0.0093	9910	9927	0.00373	0.00223	0.00223	0.00313
49	9873	9896
				

4.2 Σχέσεις μεταξύ $Q_x^{(1)}$ και $q_x^{(i)}$

Αν υποθέσουμε ομοιόμορφη κατανομή των εξόδων από κάθε αιτία μέσα στο διάστημα ηλικίας $[x, x+1)$ τότε προσεγγιστικά ισχύουν οι σχέσεις:

$$Q_x^{(i)} = q_x^{(i)} \left(1 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} q_x^{(j)} \right) \quad (1)$$

και

$$q_x^{(i)} = \frac{Q_x^{(i)}}{1 - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i} Q_x^{(j)}} \quad (2)$$

Σημείωση: Αν κάποιος από τους κινδύνους μπορεί να εξαλειφθεί τότε η αντίστοιχη εξαρτημένη πιθανότητα κινδύνου θα μηδενιστεί, για όλες τις ηλικίες του πίνακα επιβίωσης. Κατά συνέπεια και οι εξαρτημένες πιθανότητες των υπολοίπων κινδύνων θα μεταβληθούν, αφού υπάρχει εξάρτηση μεταξύ τους. Σε μια τέτοια περίπτωση τα νέα $Q_x^{(i)}$ υπολογίζονται από την ακόλουθη διαδικασία.

1. Από τα προηγούμενα $Q_x^{(i)}$ βάσει της σχέσης (2) υπολογίζονται τα αντίστοιχα $q_x^{(i)}$.
2. Θέτουμε $q_x^{(k)}=0$. Τα υπόλοιπα $q_x^{(i \neq k)}$ παραμένουν αμετάβλητα εφ' όσον είναι ανεξάρτητα μεταξύ τους.
3. Από τα νέα $q_x^{(i)}$ υπολογίζονται τα νέα $Q_x^{(i)}$ βάσει της σχέσης (1).

4.3. Σύνοψη των Συναρτήσεων του Πίνακα Πολλαπλών Κινδύνων

Αν θεωρήσουμε ότι ο πίνακας αναφέρεται στα διαστήματα ηλικίας εύρους n: $[x, x+n)$ τότε έχουμε :

- l_x : ο αριθμός ατόμων ακριβώς ηλικίας x.
- ${}_n d_x^{(i)}$: οι αποχωρήσεις από τον υποθετικό πληθυσμό του πίνακα επιβίωσης σε ηλικίες του διαστήματος $[x, x+n)$.

- ${}_nQ_x^{(i)}$: η πιθανότητα αποχώρησης από την αιτία i , δεδομένων των υπολοίπων κινδύνων, κάποιας ακριβής ηλικίας x , στο διάστημα $[x, x+n)$.
- $\ell_x^{(i)}$: ο αριθμός ατόμων που θα έφτανε την ακριβή ηλικία x , αν στο πληθυσμό του πίνακα επιβίωσης επιδρούσε σαν μόνος παράγοντας συρρίκνωσης ο κίνδυνος i .
- ${}_nq_x^{(i)}$: η πιθανότητα αποχώρησης λόγω της αιτίας i , στο διάστημα ηλικίας $[x, x+n)$, αν αυτή η αιτία συρρίκνωσης ήταν η μόνη που επιδρούσε στον υποθετικό πληθυσμό του πίνακα.
- ${}_nL_x$: ο συνολικός αριθμός ετών παραμονής στον πληθυσμό ατόμων ηλικίας του διαστήματος $[x, x+n)$.
- ${}_nT_x$: ο συνολικός αριθμός ετών παραμονής στον πληθυσμό ατόμων ηλικίας $[x, w)$ ($w-1$: η ανώτατη ηλικία).

${}^o e_x$: αναμενόμενος αριθμός ετών παραμονής στον πληθυσμό, μετά την ηλικία x .

4.4. Ένταση κινδύνων

Αν θεωρήσουμε την ηλικία x συνεχή μεταβλητή τότε το ℓ_x είναι επίσης μια συνεχής συνάρτηση του x . Η ένταση του συνολικού κινδύνου (για το σύνολο των αιτιών συρρίκνωσης), $\mu(x)$ δίνεται όπως έχει αναφερθεί προηγουμένα, από την σχέση:

$$\mu(x) = -\frac{\ell'(x)}{\ell(x)} \quad \text{ή} \quad \mu(x) = -(\ln(\ell(x)))'$$

Αν θεωρήσουμε $F(x)$ τον συνολικό αριθμό αποχωρήσεων από το σύνολο των αιτιών που επιδρούν από την ανώτερη ηλικία του πίνακα x_0 μέχρι την ηλικία x , τότε:

$$F(x) = \ell(x_0) - \ell(x)$$

Ακόμα
$$F(x) = \sum_i F_i(x)$$

όπου $F_i(x)$ είναι η συρρίκνωση από την αιτία i , από την ηλικία x_0 μέχρι την ηλικία x .

Άρα:
$$F'(x) = \sum_i F_i'(x)$$

αλλά
$$F'(x) = -\ell(x) \cdot \mu(x)$$

άρα
$$\ell(x) \cdot \mu(x) = \sum_i F_i'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{\ell(x)} \cdot \sum_i F_i'(x)$$

Αν ορίσουμε τώρα $\mu_i(x)$ την ένταση του κινδύνου i στην ηλικία x τότε

$$\mu_i(x) = \frac{1}{l(x)} \cdot F'_i(x)$$

και

$$\mu(x) = \sum_i \mu_i(x)$$

Η ένταση λοιπόν του συνολικού κινδύνου, από το σύνολο των αιτιών ισούται με το άθροισμα των επί μέρους εντάσεων από κάθε αιτία (i).

4.5 Συντελεστές κινδύνων

Ο κατά ηλικία συντελεστής θνησιμότητας στον κλασικό πίνακα επιβίωσης ορίζεται από την σχέση:

$${}_n m_x = \frac{{}_n d_x}{\int_x^{x+n} \ell(t) dt}$$

ή

$${}_n m_x = \frac{\int_x^{x+n} \ell(t) \cdot m(t) \cdot dt}{\int_x^{x+n} \ell(t) dt}$$

Κατ' αναλογία ο συνολικός συντελεστής κινδύνων από το σύνολο των αιτιών συρρίκνωσης ορίζεται από την ίδια σχέση, ενώ ο κάθε συντελεστής κινδύνων από κάθε αιτία (i) ορίζεται από την σχέση:

$${}_n m_x^{(i)} = \frac{{}_n d_x^{(i)}}{\int_x^{x+n} \ell(t) dt} = \frac{\int_x^{x+n} \ell(t) \cdot \mu_i(t) \cdot dt}{\int_x^{x+n} \ell(t) dt}$$

Έτσι έχουμε:

$${}_n m_x = \sum_{(i)} {}_n m_x^{(i)}$$

Όπως μπορεί να παρατηρηθεί από τις εκφράσεις που μόλις προηγήθηκαν ο συνολικός συντελεστής κινδύνων ${}_n m_x$ είναι σταθμικός μέσος των επιμέρους εντάσεων των διαφόρων κινδύνων με συντελεστές στάθμισης που συνδέονται με τον αριθμό ατόμων $\ell(x+t)$ σε κάθε χρονική στιγμή του διαστήματος $0 \leq t \leq 1$.

4.6. Σχόλια

Ο πίνακας πολλαπλών κινδύνων αποτελεί ένα σημαντικό βοήθημα του δημογράφου στην ανάλυση της θνησιμότητας κατά αιτίες θανάτου, στην ανάλυση γαμηλιότητας, σε αναλύσεις που αφορούν την αγορά εργασίας, ακόμα, αποτελεί χρήσιμο εργαλείο του αναλογιστή. Για την κατασκευή ενός τέτοιου πίνακα απαιτούνται μετρήσεις των συχνοτήτων κινδύνων εκτιμήσεις δηλαδή των $Q_x^{(i)}$ κατά ηλικία ή κατά ομάδες ηλικιών του πληθυσμού

στον οποίο αναφέρεται. Ένας πίνακας πολλαπλών κινδύνων βασίζεται σε μια σειρά εντάσεων κινδύνων. Η ένταση κινδύνου όμως είναι ένα θεωρητικό μέτρο το οποίο δεν μπορεί ευθέως να μετρηθεί σε εμπειρικά δεδομένα. Μόνο μέτρα που αναφέρονται σε συγκεκριμένα διαστήματα ηλικίας μπορούν να υπολογιστούν βάσει των εμπειρικών δεδομένων. Έτσι τα μέτρα που εμφανίζονται σε ένα πίνακα πολλαπλών κινδύνων αφορούν διαστήματα ηλικίας, υπόκεινται όμως στις αντίστοιχες εντάσεις με τις οποίες οι διάφοροι κίνδυνοι συνδέονται.